Educación General Básica - Subnivel Superior

MATEMÁTICA

1.º Curso

GUÍA DEL DOCENTE

DISTRIBUCIÓN GRATUITA
PROHIBIDA SU VENTA

Ministerio de Educación

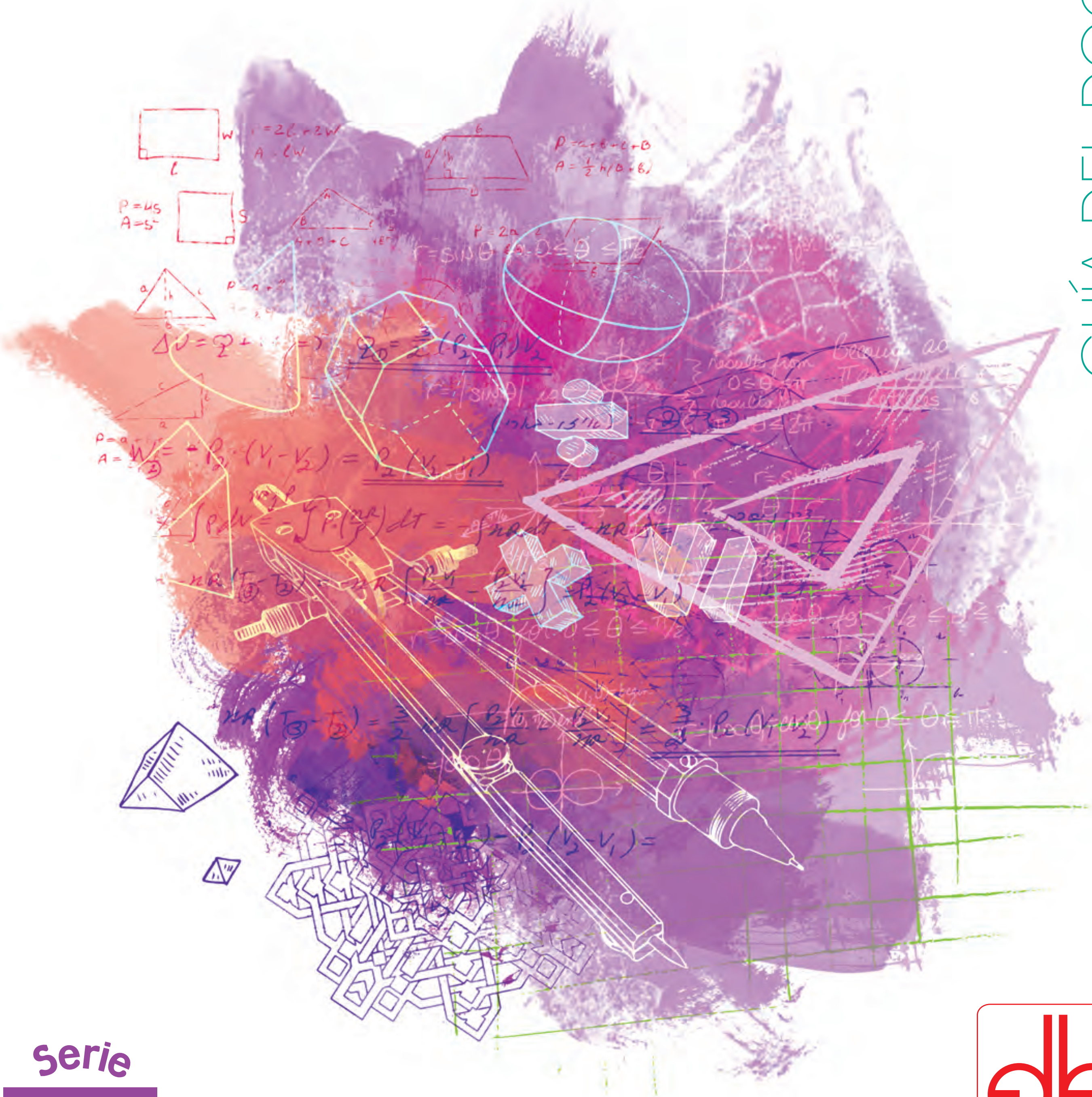
Transformar la educación
MISIÓN DE TODOS

Matemática

1 BGU

LNS

GUÍA DEL DOCENTE



Serie Ingenios

EDITORIAL DON BOSCO

edebé

PRESIDENTE DE LA REPÚBLICA
Rafael Correa Delgado

MINISTRO DE EDUCACIÓN
Augusto Espinosa Andrade

Viceministro de Educación
Freddy Peñafiel Larrea

Viceministro de Gestión Educativa
Wilson Rosalino Ortega Mafla

Subsecretario de Fundamentos Educativos (E)
Miguel Ángel Herrera Pavo

Subsecretaria de Administración Escolar
Mirian Maribel Guerrero Segovia

Directora Nacional de Currículo (S)
María Cristina Espinosa Salas

Directora Nacional de Operaciones y Logística
Ada Leonora Chamorro Vásquez

Av. Amazonas N34-451 y Atahualpa
Quito, Ecuador
www.educacion.gob.ec

Editorial Don Bosco
OBRAS SALESIANAS DE COMUNICACIÓN

Marcelo Mejía Morales
Gerente general

Eder Acuña Reyes
Dirección editorial

Sylvia Freile Montero
Adaptación y edición de contenidos

Sylvia Freile Montero
Creación de contenidos nuevos

Luis Felipe Sánchez
Coordinación de estilo

Luis Felipe Sánchez
Revisión de estilo

Pamela Cueva Villavicencio
Coordinación gráfica

Pamela Cueva Villavicencio
Diagramación

Darwin Parra
Ilustración

Darwin Parra
Diseño de portada e ilustración

En alianza con

Grupo edebé
Proyecto: Matemáticas 1
Bachillerato primer curso

Antonio Garrido González
Dirección general

María Banal Martínez
Dirección editorial

José Estela Herrero
Dirección de edición de Educación Secundaria

Santiago Centelles Cervera
Dirección pedagógica

Juan López Navarro
Dirección de producción

Equipo de edición Grupo edebé

Paseo San Juan Bosco, 62
08017 Barcelona
www.edebe.com

ISBN 978-9942-23-047-8
Primera impresión: julio 2016
Este libro fue evalaudo por la Universidad Tecnológica Equinoccial, y obtuvo la certificación curricular del Ministerio de Educación el el 30 de mayo de 2016.

ADVERTENCIA
Un objetivo manifiesto del Ministerio de Educación es combatir el sexismo y la discriminación de género en la sociedad ecuatoriana y promover, a través del sistema educativo, la equidad entre mujeres y hombres. Para alcanzar este objetivo, promovemos el uso de un lenguaje que no reproduzca esquemas sexistas, y de conformidad con esta práctica preferimos emplear en nuestros documentos oficiales palabras neutras, tales como las personas (en lugar de los hombres) o el profesorado (en lugar de los profesores), etc. Sólo en los casos en que tales expresiones no existan, se usará la forma masculina como genérica para hacer referencia tanto a las personas del sexo femenino como masculino. Esta práctica comunicativa, que es recomendada por la Real Academia Española en su Diccionario Panhispánico de Dudas, obedece a dos razones: (a) en español es posible <referirse a colectivos mixtos a través del género gramatical masculino>, y (b) es preferible aplicar <la ley lingüística de la economía expresiva> para así evitar el abultamiento gráfico y la consiguiente ilegibilidad que ocurriría en el caso de utilizar expresiones como las y los, os/as y otras fórmulas que buscan visibilizar la presencia de ambos sexos.

Este libro de texto que tienes en tus manos es una herramienta muy importante para que puedas desarrollar los aprendizajes de la mejor manera. Un libro de texto no debe ser la única fuente de investigación y de descubrimiento, pero siempre es un buen aliado que te permite descubrir por ti mismo la maravilla de aprender.

El Ministerio de Educación ha realizado un ajuste curricular que busca mejores oportunidades de aprendizaje para todos los estudiantes del país en el marco de un proyecto que propicia su desarrollo personal pleno y su integración en una sociedad guiada por los principios del Buen Vivir, la participación democrática y la convivencia armónica.

Para acompañar la puesta en marcha de este proyecto educativo, hemos preparado varios materiales acordes con la edad y los años de escolaridad. Los niños y niñas de primer grado recibirán un texto que integra cuentos y actividades apropiadas para su edad y que ayudarán a desarrollar el currículo integrador diseñado para este subnivel de la Educación General Básica. En adelante y hasta concluir el Bachillerato General Unificado, los estudiantes recibirán textos que contribuirán al desarrollo de los aprendizajes de las áreas de Ciencias Naturales, Ciencias Sociales, Lengua y Literatura, Matemática y Lengua Extranjera-Inglés.

Además, es importante que sepas que los docentes recibirán guías didácticas que les facilitarán enriquecer los procesos de enseñanza y aprendizaje a partir del contenido del texto de los estudiantes, permitiendo desarrollar los procesos de investigación y de aprendizaje más allá del aula.

Este material debe constituirse en un apoyo a procesos de enseñanza y aprendizaje que, para cumplir con su meta, han de ser guiados por los docentes y protagonizados por los estudiantes.

Esperamos que esta aventura del conocimiento sea un buen camino para alcanzar el Buen Vivir.

Ministerio de Educación

2016

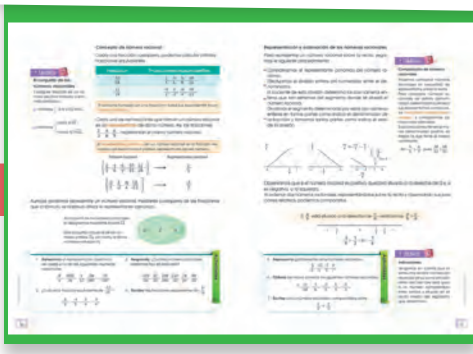
El proyecto de **Matemáticas** 2

Conoce tu guía

En contexto

- Noticias y enlaces que contextualizarán la temática a abordar.

Los contenidos



Los contenidos tendrán:

- Situaciones contextualizadas
- Soporte visual
- Uso de regletas y ábacos para facilitar la comprensión

Proyecto

Zona Wifi

- En esta página verás cómo el tema es tratado en la red.

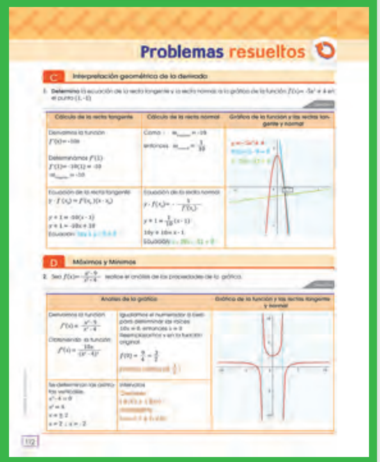
Un alto en el camino

- Actividades de base estructurada.

Resumen

- Síntesis de lo aprendido.

Problemas resueltos



- Énfasis en la presentación clara de los procedimientos.

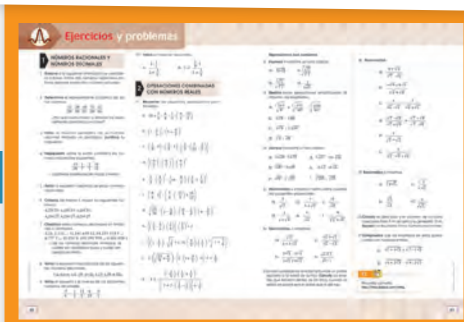
Para finalizar

Evaluando tus destrezas

Autoevaluación

- Propuesta al final de cada quimestre.

Ejercicios y problemas



- Para fortalecer tu aprendizaje, dispondrás de varios ejercicios.

¿Qué significan estos íconos?

EN GRUPO:

Y TAMBIÉN:

TIC

Conéctate con: Edibosco Interactiva

Actividades interactivas · Enlaces we b · Videos · Perfiles interactivos · Documentos · Presentación multimedia · Colaboratorios

INGENIOS: El proyecto educativo de Editorial Don Bosco

La sociedad actual se enfrenta a nuevos retos que solo pueden superarse con educación, esfuerzo y talento personal y social.

INGENIOS es el proyecto de Editorial Don Bosco que promueve el desarrollo óptimo de los potenciales individuales de cada alumno, contribuye a mejorar la calidad de su educación y le permite afrontar con garantías de éxito los retos del futuro y alcanzar un mayor nivel de felicidad.

INGENIOS contempla las esencias del talento y los contextos del talento, contribuyendo a un modelo de escuela que potencia al máximo el desarrollo de la persona.

Las esencias del talento

Talento analítico y crítico

Aprender a pensar, utilizar rutinas de pensamiento, valorar el pensamiento... Toda una actitud ante la vida.

Talento creativo

Dejar aflorar la imaginación, la expresividad... en la resolución de problemas y retos.

Talento emprendedor

Iniciativa, imaginación, trabajo en equipo, comunicación, constancia... Persigue tus sueños.

Talento emocional

Talento que permite gestionar de manera eficaz las emociones y las hace fluir adecuadamente.

Talento social

Sensible a la justicia social para lograr un mundo mejor.

Talento cooperativo

Para aprender con y de los demás, y generar productos de valor.

Los contextos del talento

El desarrollo del talento se lleva a cabo en un contexto determinado, relacionado con un **modelo de escuela** y **de sociedad**:

1. **Un aprendizaje en un contexto práctico y funcional.** El proyecto INGENIOS integra el trabajo del desarrollo de las destrezas con criterios de desempeño y las inteligencias múltiples.
   - El aprendizaje se sitúa en contextos reales, próximos y significativos para los alumnos, mediante actividades prácticas y funcionales.
   - Las destrezas con criterios de desempeño se programan, se trabajan (actividades, tareas y proyectos) y se evalúan (rúbricas).
2. **Unas propuestas educativas abiertas al mundo.** Una gran parte del conocimiento se adquiere en contextos no formales, por ello nuestros libros están «abiertos al mundo» (aprendizaje 360º). Para ello:
   - Proponemos temas que despiertan el interés y la curiosidad y mueven a indagar y ampliar el conocimiento.
   - Invitamos al alumno a aprender fuera del aula.
3. **Un entorno innovador y tecnológico.** El proyecto INGENIOS ha adquirido un compromiso con la innovación y las nuevas tecnologías, avanzando en la Escuela del Siglo XXI. En ese sentido, los principales elementos de innovación son:
   - Cultura del pensamiento. Dar valor al pensar; enseñar a pensar.
   - Espíritu emprendedor. El emprendimiento es una oportunidad para desarrollar capacidades, y una necesidad social.
   - Compromiso TIC. La tecnología al servicio de la persona (humanismo tecnológico) en formatos amigables y compatibles.
4. **Un modelo de escuela integradora.** La **diversidad** de la sociedad tiene su reflejo en la escuela y una escuela para todos debe ofrecer respuestas a esa diversidad. Además, una mayor equidad contribuye a mejorar los resultados académicos. INGENIOS apuesta por el enfoque preventivo, y lo concreta en:
   - Itinerarios alternativos para acceder al conocimiento basados en las IM.
   - Adaptaciones curriculares y actividades multinivel.
5. **Una sociedad con valores.** La actual sociedad necesita personas con una sólida formación en valores para lograr una convivencia más positiva y afrontar los retos del futuro. INGENIOS se apoya en:
   - Valores universalmente aceptados, con un mensaje adaptado a la nueva realidad.
   - La adquisición de compromisos firmes en la mejora de la sociedad.

Programación y orientaciones de las unidades didácticas

RUTINAS DEL PENSAMIENTO

En las aulas que han asumido la cultura del pensamiento se enseña a pensar; se deja tiempo para pensar y se valora el pensamiento. Un recurso privilegiado para promover la cultura del pensamiento en el aula lo constituyen las «rutinas del pensamiento», desarrolladas por los investigadores del «Project Zero» de la Universidad de Harvard.

Las rutinas son actividades pautadas según unos sencillos modelos que estimulan el pensamiento y favorecen la actividad reflexiva por parte de los alumnos, y además, hacen visibles los procesos de pensamiento, de manera que el alumno toma conciencia de su manera de pensar y de cómo piensan los demás.

Consideramos las rutinas que se han mostrado más eficaces, y las incorporamos en a continuación:

Círculo de puntos de vista

Desarrolla el «pensamiento de perspectiva», la capacidad para enfocar una situación desde distintos puntos de vista.

Ante una imagen (cuadro, fotografía...) o un texto, se pide a cada uno de los alumnos que dé su versión de lo que está pasando, situándose en el punto de vista de uno de los personajes que apareccen.

Al poner en común los distintos puntos de vista se obtiene una visión mucho más rica de la situación. Se adquiere el hábito (la rutina) de considerar diferentes puntos de vista al abordar un tema.

Palabra-Idea-Frase

Utilizar el pensamiento para comprender, para investigar y llegar al fondo de un texto.

De forma individual, los alumnos eligen una palabra, una idea y una frase que les hayan resultado llamativas en

un texto, o que expresen mejor su contenido.

Tras la puesta en común, los alumnos pueden llegar a alcanzar niveles de comprensión muy profundos, a los que difícilmente accederían de forma individual. Además, aprenden a pensar de manera más eficaz.

Veo, pienso, me pregunto

Desarrollar la curiosidad, la capacidad de exploración y la creatividad. Mirar la vida, la realidad, el arte, etc., de manera inteligente.

Ante una imagen o un texto, individualmente, el alumnado responde a esas tres demandas: anota lo que ve (sin interpretar), las ideas que le sugiere aquello, y las preguntas que le vienen a la mente.

La puesta en común, en la que cada uno justifica su percepción, evidencia las distintas percepciones de un mismo objeto o realidad; todo un aprendizaje.

Diez veces dos (observar y describir)

Hacer observaciones detalladas sobre un objeto o una imagen y expresarlas mediante palabras o frases.

Se observa la imagen durante 30 segundos. Se deja viajar a los ojos. Se elabora una lista de diez palabras o frases sobre la imagen. Se pone en común. Finalmente se repiten los pasos anteriores y se añaden diez nuevas palabras.

Principio, medio, final

Una misma imagen cambia su significado dependiendo de si forma parte del principio de una historia, del nudo o del desenlace. Lo mismo ocurre con un pequeño texto referido a una historia. Esta rutina potencia la creatividad y la imaginación.

Ante una imagen o un texto, cada uno de los alumnos debe construir una historia diferente, según pertenezca al inicio, al nudo o al final.

La puesta en común acostumbra a ser una auténtica fiesta creativa.

CSI: Color, Símbolo, Imagen

Asumir el reto de captar la esencia de un texto, esa es la meta de la comprensión. Esta rutina lo pone más fácil.

Tras la lectura, los alumnos, de forma individual, seleccionan las tres ideas que les parecen más importantes. Representan una con un color, otra mediante un símbolo y la última con una imagen.

En la puesta en común se manifiesta la inteligencia artística y la capacidad de comunicación no verbal.

Pienso, me interesa, investigo

Esta rutina permite conectar con el conocimiento previo sobre un tema y ampliarlo a traves de la búsqueda de información. Puede utilizarse al comienzo de un tema y como antecedente de una propuesta de investigación.

Se expone el tema a tratar y se deja a los alumnos un tiempo para reflexionar sobre ello. A continuación se les pide que respondan a:

- Pienso: ¿Qué sabes sobre este asunto?
- Me interesa: ¿Qué preguntas o qué aspecto de este tema despierta tu interés?
- Investigo: ¿Qué te gustaría estudiar sobre este tema? ¿Cómo podrías hacerlo?

Preguntas creativas

Para ampliar y profundizar el pensamiento del alumnado, activar su curiosidad y motivarlo a investigar.

Se propone a los alumnos que formulen preguntas sobre el tema que se está trabajando (como si de tratase de una «lluvia de ideas»).

Se seleccionan las que se consideran más interesantes; se elige una y se abre un diálogo sobre ella.

De esta manera, el alumno reflexiona y se plantea preguntas que le van a proporcionar nuevas ideas.

Titulares (*Headlines*)

Funciona igual que un titular de periódico, y ayuda a los alumnos a capturar la esencia de un texto, una clase, un debate, una exposición...

Al final de una discusión en el aula, de una sesión de trabajo... se propone a los alumnos que escriban el titular que mejor exprese la esencia de lo que se ha estado trabajando en clase. Durante la puesta en común se crea una lista de «titulares».

Al final, el profesor pegunta: ¿Cómo ha cambiadotu titular a partir de la puesta en común? ¿En qué difiere del que habías propuesto?

Colores, formas y líneas

En ocasiones resulta difícil analizar una situación o expresar un mensaje con palabras. Esta rutina permite hacerlo utilizando colores, líneas o formas geométricas.

En primer lugar se pide a los alumnos que reconozcan los colores, las formas y las líneas existentes en una imagen o en una situación; o qué colores, formas y líneas emplearían para describir esa situación.

En la puesta en común se comprueba la creatividad y el poder expresivo de esta rutina.

Puente

Esta rutina se basa en establecer un «puente» entre el nuevo aprendizaje y los conocimientos previos que tenga el alumno.

Pasos para su aplicación:

1. Los alumnos escriben 3 ideas, 2 preguntas y 1 metáfora o analogía sobre el tema que se trabaja.
2. Se realizan las actividades de aprendizaje programadas (lecturas, vídeos...).
3. Finalizada la actividad, los alumnos completan de nuevo el primer paso: apuntan 3 ideas, 2 preguntas, 1 metáfora.
4. En parejas, comparten su pensamiento inicial y su nuevo pensamiento, explicando cómo y por qué se ha producido el cambio. Esto ayuda a encontrar aspectos interesantes en la idea del otro y a justificar por qué ha seleccionado esas ideas o preguntas (esto es, a hacer visible su pensamiento). A continuación se comparte con el resto de la clase, creándose un ambiente de reflexión, de respeto y confianza que mejora el clima escolar.

El semáforo (Pensamiento crítico)

Ayuda a detectar señales de duda sobre la veracidad en los medios de comunicación.

Los estudiantes analizan un editorial, una noticia, un discurso... y detectan «luces rojas o amarillas» en aquellos puntos en los que aprecian señales de duda (afirmaciones sin argumentos, generalizaciones demasiado amplias, interés propio manifiesto, argumentos unilaterales...).

Se elabora una lista de los puntos rojos y amarillos y se señalan «zonas de peligro» en el texto analizado.

Finalmente se reflexiona sobre lo aprendido.

Página 10

Orientación didáctica

- En esta unidad aparece una colección de ejercicios de repaso y refuerzo de temas de grados anteriores, agrupados por bloques numéricos, que sirven además para realizar la evaluación diagnóstica que se recomienda en al finalizar esta unidad.

  El profesor o profesora puede sugerir la participación de los estudiantes en el pizarrón, verificando los procedimientos completos de los ejercicios con mayor dificultad, y de esta forma asegura conocimientos previos y anticipa posibles dificultades en los contenidos de la unidad.

  Se sugiere también que pida a los estudiantes que justifiquen sus respuestas.

  Otra sugerencia para iniciar esta unidad es que se aplique la rutina «Pienso, me intereso e investigo», a partir de la ilustración de esta página:

  Pienso:

  ¿Qué sabes sobre el balón de oro de la FIFA?

  - Me interesa:

  ¿Qué preguntas o qué aspecto de este tema despierta tu interés?

  - Investigo:

  ¿Qué te gustaría estudiar sobre este tema? ¿Cómo podrías hacerlo?

  También puede adaptar esta rutina a la primera unidad que se va a estudiar que son los números reales.


0

Herramientas matemáticas

CONTENIDOS:

1. Operaciones con radicales
2. Error
3. Notación científica
4. Intervalos
5. Operaciones con polinomios
6. Factorización
7. Ecuaciones y sistema de ecuaciones
8. Funciones y estadísticos
9. Probabilidad y combinatoria

10

Actividades complementarias

Un pintor ha obtenido el color que quería uno de sus clientes mezclando pequeños frascos de 100 g de diferentes colores. La cantidad empleada ha sido la siguiente: 2 frascos de color rojo, 3 frascos de color magenta, 1 frasco de color añil y 1/4 de un frasco de color verde manzana. Teniendo en cuenta estos datos:

a. ¿Qué porcentaje de pintura roja utiliza en la mezcla?

b. ¿Y de pintura magenta?

c. ¿Cuántos kilogramos de pintura verde manzana necesita si tiene que preparar 40 kg para pintar un piso?

Solucionario

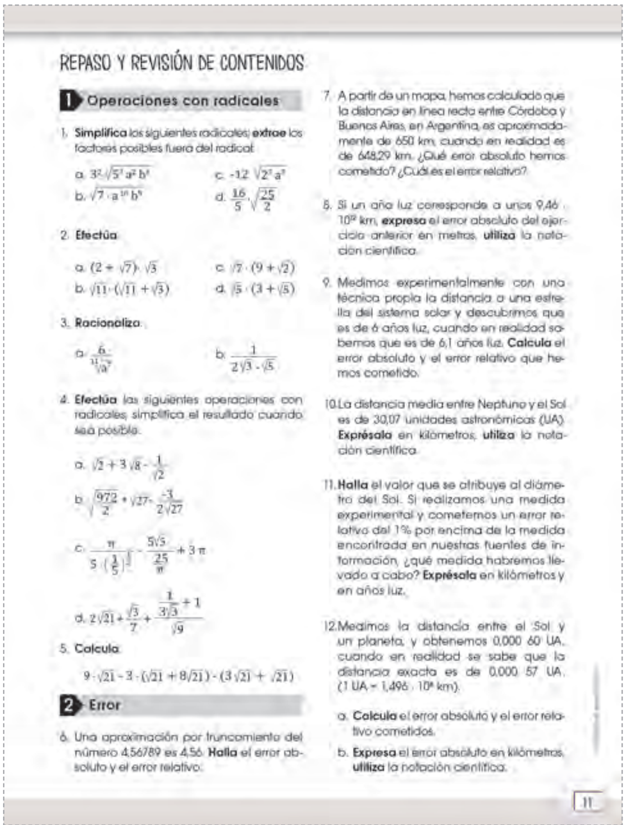
a. $\frac{200 \cdot 100}{625} = 32\ \%$. Utiliza un 32% de pintura roja.

b. $\frac{300 \cdot 100}{625} = 48\ \%$. Utiliza un 48% de pintura magenta.

c. $\frac{300 \cdot 100}{625} = 4\%$. Un $4\ \%$ de pintura verde manzana $4\ \%$ de $40 = 1{,}6$ .Necesita $1{,}6$ kg.

d. Roja: $32\ \%$ de $68 = 21{,}76$. Necesita $21{,}76$ kg en botes de 5 kg, $21{,}76 : 5 = 4{,}352$ Necesita 5 botes de pintura roja. Magenta: $48\ \%$ de $68 = 21{,}76$

Página 11


REPASO Y REVISIÓN DE CONTENIDOS

1 Operaciones con radicales

1. **Simplifica** los siguientes radicales; **extrae** los factores posibles fuera del radical:

a. $3^2\sqrt{5^3 a^2 b^3}$ c. $-12\sqrt{2^3 a^7}$

b. $\sqrt{7 \cdot a^{10} b^9}$ d. $\frac{16}{5}\sqrt{\frac{25}{2}}$

2. **Efectúa**

a. $(2+\sqrt{7})\cdot\sqrt{3}$ c. $\sqrt{7}\cdot(9+\sqrt{2})$

b. $\sqrt{11}\cdot(\sqrt{11}+\sqrt{3})$ d. $\sqrt{5}\cdot(3+\sqrt{5})$

3. **Racionaliza**

a. $\frac{6}{\sqrt[11]{a^7}}$ b. $\frac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

4. **Efectúa** las siguientes operaciones con radicales; simplifica el resultado cuando sea posible.

a. $\sqrt{2}+3\sqrt{8}-\frac{1}{\sqrt{2}}$

b. $\sqrt{\frac{972}{2}}+\sqrt{27}-\frac{-3}{2\sqrt{27}}$

c. $\frac{\pi}{5\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}}-\frac{5\sqrt{5}}{\frac{25}{\pi}}+3\pi$

d. $2\sqrt{21}+\frac{\sqrt{3}}{7}+\frac{\frac{1}{3\sqrt{3}}+1}{\sqrt{9}}$

5. **Calcula**

$9\cdot\sqrt{21}-3\cdot(\sqrt{21}+8\sqrt{21})-(3\sqrt{21}+\sqrt{21})$

2 Error

6. Una aproximación por truncamiento del número 4,56789 es 4,56. **Halla** el error absoluto y el error relativo.

7. A partir de un mapa, hemos calculado que la distancia en línea recta entre Córdoba y Buenos Aires, en Argentina, es aproximadamente de 650 km, cuando en realidad es de 648,29 km. ¿Qué error absoluto hemos cometido? ¿Cuál es el error relativo?

8. Si un año luz corresponde a unos $9{,}46\cdot10^{12}$ km, **expresa** el error absoluto del ejercicio anterior en metros; **utiliza** la notación científica.

9. Medimos experimentalmente con una técnica propia la distancia a una estrella del sistema solar y descubrimos que es de 6 años luz, cuando en realidad sabemos que es de 6,1 años luz. **Calcula** el error absoluto y el error relativo que hemos cometido.

10. La distancia media entre Neptuno y el Sol es de 30,07 unidades astronómicas (UA). **Exprésala** en kilómetros; **utiliza** la notación científica.

11. **Halla** el valor que se atribuye al diámetro del Sol. Si realizamos una medida experimental y cometemos un error relativo del 1% por encima de la medida encontrada en nuestras fuentes de información, ¿qué medida habremos llevado a cabo? **Exprésala** en kilómetros y en años luz.

12. Medimos la distancia entre el Sol y un planeta, y obtenemos 0,000 60 UA, cuando en realidad se sabe que la distancia exacta es de 0,000 57 UA. (1 UA = $1{,}496\cdot10^8$ km).

a. **Calcula** el error absoluto y el error relativo cometidos.

b. **Expresa** el error absoluto en kilómetros; **utiliza** la notación científica.

11

Solucionario

1.

a. $45\,ab^2\sqrt{5}$ c. $96\,a^3\sqrt{2a}$

b. $a^5b^4\sqrt{7b}$ d. $16\sqrt{\frac{1}{2}}$

2.

a. $2\sqrt{3}+\sqrt{21}$ c. $9\sqrt{7}+\sqrt{14}$

b. $11+\sqrt{33}$ d. $3\sqrt{3}+5$

3.

a. $\frac{6\sqrt[11]{a^4}}{a}$ b. $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{17}$

4.

a. $\frac{13}{2}\sqrt{2}$ c. 3π

b. $9\sqrt{6}+\frac{\pi\sqrt{5}}{17}$ d. ??

5. $9\cdot\sqrt{21}-3\cdot(9\sqrt{21})-(3\sqrt{21}+\sqrt{21})=-22\sqrt{21}$

6. $\mathcal{E}a=|4{,}56789-4{,}56|=0{,}00789;$

$\mathcal{E}r\approx0{,}00172\ldots<0{,}00173$

7. $\mathcal{E}a=650-648{,}29=1{,}71\text{km}\ \mathcal{E}r=\frac{1{,}71}{648{,}29}=0{,}26\%$

8. Un año luz son $9{,}46\cdot10^{12}$ km que, si los pasamos a metros, serán $9{,}46\cdot10^{12}\cdot10^3$ m, y como que el error absoluto es de 0,1, obtenemos que: $\varepsilon a=9{,}46\cdot10^{12}\cdot10^3\cdot0{,}1=9{,}46\cdot10^{14}$m.

9. $\varepsilon a=6-6{,}1=-0{,}1$ años luz

$\varepsilon r=-0{,}1/6{,}1=-0{,}016=-1{,}6\ \%$

10. $30\cdot149\,600\,000=4\,498\,472\,000=4{,}498\,472\cdot10^9$ km

11. $1{,}486\cdot10^{-7}$ años luz

12.

a. $\mathcal{E}a=|0{,}000\,60-0{,}000\,57|=0{,}000\,03.0{,}000\,03$ UA; $\mathcal{E}r=5{,}2\ \%$

b. $4{,}488\cdot103$ km

Solucionario

13.

a. $0{,}05 \cdot 10^2$ b. $200\ 006{,}67$

14.

a. $3\ 188\ 800{,}016$ b. $3.\ 10^{-8}$

15.

a. $[-6, 3]$; b. $(-2, +\infty)$

16.

a. $(-2, 2)$ c. $(1, 4]$ e. $(-4, -3)$

b. $(0, 3]$ d. $[6, 7]$ f. $(0, 1)$

17.

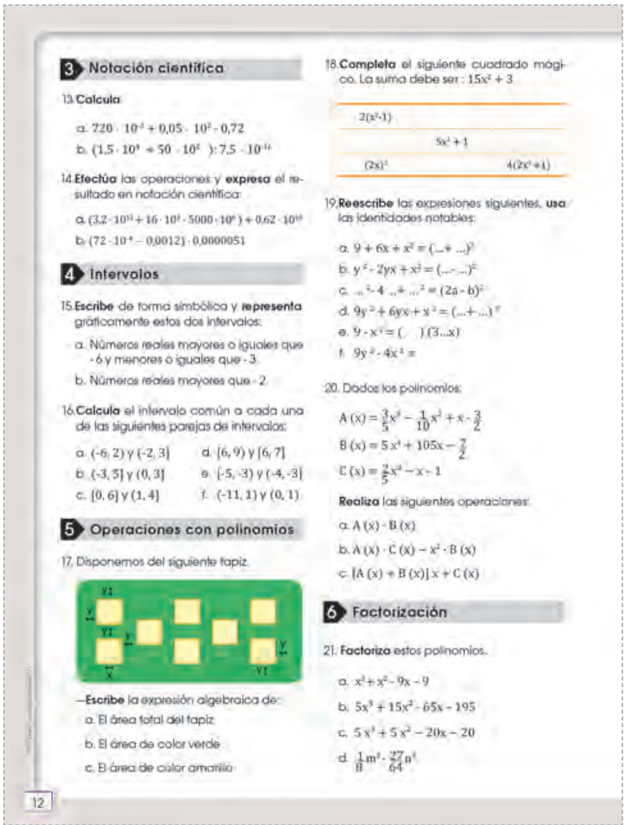
a. $18y^2 + 27xy + 10x^2$ c. $8x^2$

b. $18y^2 + 27xy + 8x^2$

18.

$2(x^2-1)$	$7x^2 + 3$	$2(3x^2 + 1)$
$9x^2 + 5$	$5x^2 + 1$	$x^2 - 3$
$(2x)^2$	$3x^2 - 1$	$4(2x^2 + 1)$

Página 12


3 Notación científica

13. **Calcula**

a. $720 \cdot 10^{-3} + 0{,}05 \cdot 10^2 - 0{,}72$

b. $(1{,}5 \cdot 10^{8} + 50 \cdot 10^{2}) : 7{,}5 \cdot 10^{-16}$

14. **Efectúa** las operaciones y **expresa** el resultado en notación científica:

a. $(3{,}2 \cdot 10^{11} + 16 \cdot 10^{3} \cdot 5000 \cdot 10^{6}) + 0{,}62 \cdot 10^{10}$

b. $(72 \cdot 10^{-5} - 0{,}0012) \cdot 0{,}0000051$

4 Intervalos

15. **Escribe** de forma simbólica y **representa** gráficamente estos dos intervalos:

a. Números reales mayores o iguales que - 6 y menores o iguales que - 3.

b. Números reales mayores que - 2.

16. **Calcula** el intervalo común a cada una de las siguientes parejas de intervalos:

a. $(-6, 2)$ y $(-2, 3]$ d. $[6, 9)$ y $[6, 7]$

b. $(-3, 5]$ y $(0, 3]$ e. $[-5, -3)$ y $(-4, -3]$

c. $[0, 6]$ y $(1, 4]$ f. $(-11, 1)$ y $(0, 1)$

5 Operaciones con polinomios

17. Disponemos del siguiente tapiz.

—**Escribe** la expresión algebraica de:

a. El área total del tapiz.

b. El área de color verde.

c. El área de color amarillo.

18. **Completa** el siguiente cuadrado mágico. La suma debe ser: $15x^2 + 3$

$2(x^2-1)$		
	$5x^2 + 1$	
$(2x)^2$		$4(2x^2+1)$

19. **Reescribe** las expresiones siguientes, **usa** las identidades notables:

a. $9 + 6x + x^2 = (... + ...)^2$

b. $y^2 - 2yx + x^2 = (... - ...)^2$

c. $...^2 - 4 ... + ...^2 = (2a - b)^2$

d. $9y^2 + 6yx + x^2 = (... + ...)^2$

e. $9 - x^2 = (\ \ )(3 ... x)$

f. $9y^2 - 4x^2 =$

20. Dados los polinomios:

$A(x) = \frac{3}{5}x^3 - \frac{1}{10}x^2 + x - \frac{3}{2}$

$B(x) = 5x^4 + 105x - \frac{7}{2}$

$C(x) = \frac{2}{5}x^3 - x - 1$

Realiza las siguientes operaciones:

a. $A(x) \cdot B(x)$

b. $A(x) \cdot C(x) - x^2 \cdot B(x)$

c. $[A(x) + B(x)]\, x + C(x)$

6 Factorización

21. **Factoriza** estos polinomios.

a. $x^3 + x^2 - 9x - 9$

b. $5x^3 + 15x^2 - 65x - 195$

c. $5x^3 + 5x^2 - 20x - 20$

d. $\frac{1}{8}m^3 - \frac{27}{64}n^3$

12

19.

a. $(3 + x)^2$ c. $4a^2 - 4ab + b^2$ e. $(3 - x)(3 + x)$

b. $(x + y)^2$ d. $(3y + x)^2$ f. $(3y + 2x)(3y - 2x)$

20.

a. $3x^7 + \dfrac{x^6}{2} + 5x^5 + 111\dfrac{x^4}{2} - 3\dfrac{x^3}{2} + 105x^2 + 161x + \dfrac{21}{4}$

b. $6\dfrac{x^6}{25} - \dfrac{x^5}{25} - \dfrac{x^4}{5} - 11\dfrac{x^3}{10} - 9\dfrac{x^2}{10} + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{2}$

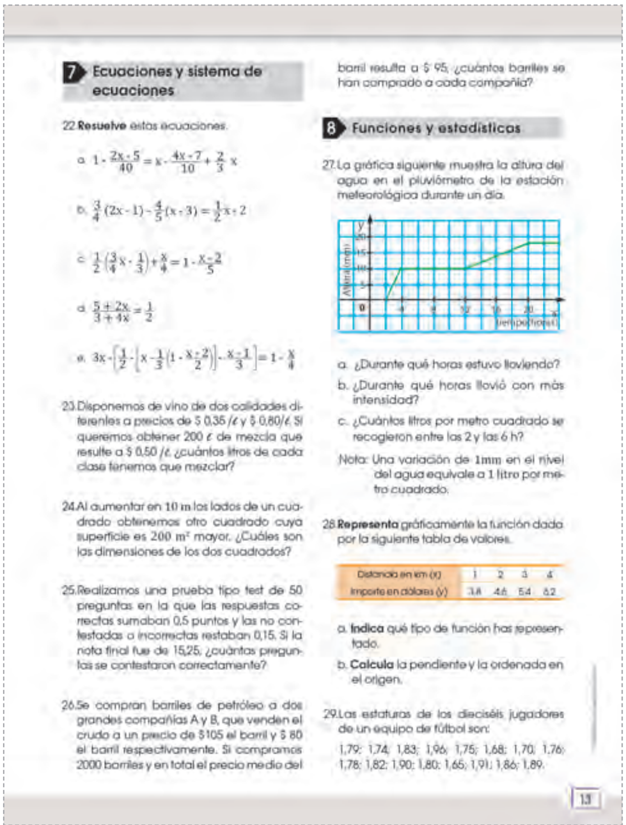
c. $5x^5 + \dfrac{3x^4}{5} + \dfrac{3x^3}{10} + 106x^2 - 6x - 1$

21.

a. $(x + 1)(x - 3)(x + 3)$ c. $5(x + 1)(x + 2)(x - 2)$

b. $5(x + 3)(x^2 + 13)$ d. $\left(\dfrac{1}{2}m - \dfrac{3}{4}n\right)\left(\dfrac{1}{2}m^2 + \dfrac{3}{8}mn + \dfrac{9}{16}n^2\right)$

Página 14



7 Ecuaciones y sistema de ecuaciones

22. **Resuelve** estas ecuaciones.

a. $1 - \frac{2x-5}{40} = x - \frac{4x-7}{10} + \frac{2}{3}x$

b. $\frac{3}{4}(2x-1) - \frac{4}{5}(x+3) = \frac{1}{2}x + 2$

c. $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{3}\right) + \frac{x}{4} = 1 - \frac{x-2}{5}$

d. $\frac{5+2x}{3+4x} = \frac{1}{2}$

e. $3x - \left[\frac{1}{2} - \left[x - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{x+2}{2}\right)\right] - \frac{x-1}{3}\right] = 1 - \frac{x}{4}$

23. Disponemos de vino de dos calidades diferentes a precios de $ 0,35 /ℓ y $ 0,80/ℓ. Si queremos obtener 200 ℓ de mezcla que resulte a $ 0,50 /ℓ, ¿cuántos litros de cada clase tenemos que mezclar?

24. Al aumentar en 10 m los lados de un cuadrado obtenemos otro cuadrado cuya superficie es 200 m² mayor. ¿Cuáles son las dimensiones de los dos cuadrados?

25. Realizamos una prueba tipo test de 50 preguntas en la que las respuestas correctas sumaban 0,5 puntos y las no contestadas o incorrectas restaban 0,15. Si la nota final fue de 15,25, ¿cuántas preguntas se contestaron correctamente?

26. Se compran barriles de petróleo a dos grandes compañías A y B, que venden el crudo a un precio de $105 el barril y $ 80 el barril respectivamente. Si compramos 2000 barriles y en total el precio medio del barril resulta a $ 95, ¿cuántos barriles se han comprado a cada compañía?

8 Funciones y estadísticas

27. La gráfica siguiente muestra la altura del agua en el pluviómetro de la estación meteorológica durante un día.

a. ¿Durante qué horas estuvo lloviendo?

b. ¿Durante qué horas llovió con más intensidad?

c. ¿Cuántos litros por metro cuadrado se recogieron entre las 2 y las 6 h?

Nota: Una variación de 1mm en el nivel del agua equivale a 1 litro por metro cuadrado.

28. **Representa** gráficamente la función dada por la siguiente tabla de valores.

Distancia en km (x)	1	2	3	4
Importe en dólares (y)	3,8	4,6	5,4	6,2

a. **Indica** qué tipo de función has representado.

b. **Calcula** la pendiente y la ordenada en el origen.

29. Las estaturas de los dieciséis jugadores de un equipo de fútbol son:

1,79; 1,74; 1,83; 1,96; 1,75; 1,68; 1,70; 1,76; 1,78; 1,82; 1,90; 1,80; 1,65; 1,91; 1,86; 1,89.

13

Solucionario

22.

a. $\frac{51}{158}$

b. $-\frac{73}{4}$

c. $\frac{188}{99}$

d. No tiene solución

e. $\frac{10}{19}$

23. Hay que mezclar 133 litros de una clase y 67 litros de la otra.

24. Las dimensiones son 5 y 10 m.

25. 35 preguntas correctas.

26. Se han comprado 1 200 barriles a la compañía A y 800 barriles a la B.

27.

a. Estuvo lloviendo entre las 2 y las 4 horas, y entre las 12 y las 20 horas.

b. Entre las 2 y las 4 horas llovió con mayor intensidad.

c. 10 – 0 = 10. Se recogieron 10 litros por metro cuadrado.

28. Es una función lineal. Su pendiente es 4/5 y la ordenada en el origen es 3.

29.

Intervalos	Frecuencias (fi)
1,65 - 1,73	3
1,73 - 1,81	6
1,81 - 1,89	4
1,89 - 1,97	3

Solucionario

30. El beneficio medio anual de la empresa A es 47.6 miles de dólares y el de la B 47.4 La empresa más rentable es la A.

31.

a. pendiente: 1, ordenada en el origen:-6

b. pendiente: -2, ordenada en el origen: 1

c. pendiente: 3, ordenada en el origen: 2

32.

a. Año de nacimiento: cualitativa ordinal.

b. Opinión sobre una determinada película: cualitativa nominal.

c. Peso de los estudiantes de una clase: cuantitativa continua.

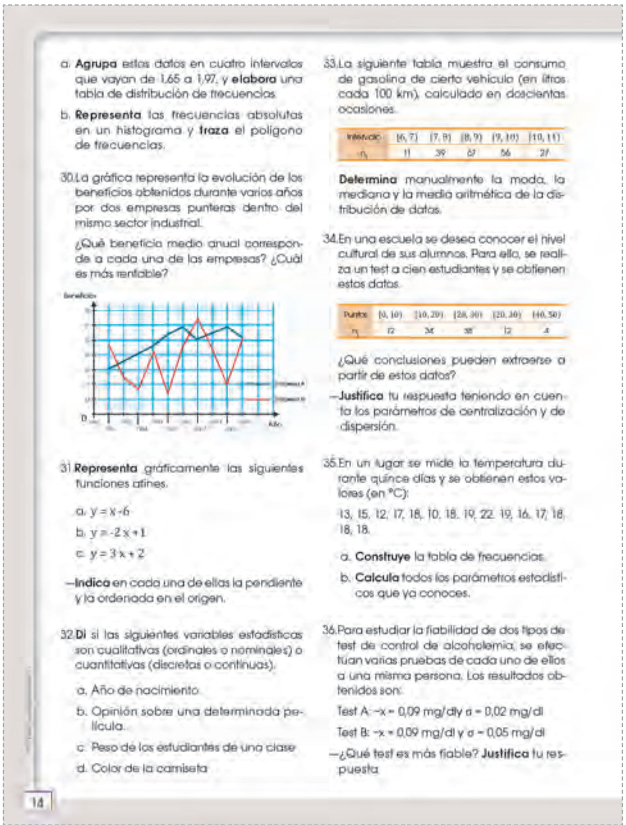
d. Color de la camiseta: cualitativa nominal.

33. $\overline{x} = 8{,}7$; $Me = 8.5$; $Mo = 8{,}5$

34. Se puede decir que el nivel cultural del grupo es bajo con relación a su media.

35. $\overline{x} = 16.7$; $Me = 18$; $Mo = 18$

Página 14



a. **Agrupa** estos datos en cuatro intervalos que vayan de 1,65 a 1,97, y **elabora** una tabla de distribución de frecuencias.

b. **Representa** las frecuencias absolutas en un histograma y **traza** el polígono de frecuencias.

30. La gráfica representa la evolución de los beneficios obtenidos durante varios años por dos empresas punteras dentro del mismo sector industrial.

¿Qué beneficio medio anual corresponde a cada una de las empresas? ¿Cuál es más rentable?

31. **Representa** gráficamente las siguientes funciones afines.

a. $y = x - 6$

b. $y = -2x + 1$

c. $y = 3x + 2$

—**Indica** en cada una de ellas la pendiente y la ordenada en el origen.

32. **Di** si las siguientes variables estadísticas son cualitativas (ordinales o nominales) o cuantitativas (discretas o continuas).

a. Año de nacimiento.

b. Opinión sobre una determinada película.

c. Peso de los estudiantes de una clase

d. Color de la camiseta

33. La siguiente tabla muestra el consumo de gasolina de cierto vehículo (en litros cada 100 km), calculado en doscientas ocasiones.

Intervalo	[6, 7)	[7, 8)	[8, 9)	[9, 10)	[10, 11)
n_i	11	39	67	56	27

Determina manualmente la moda, la mediana y la media aritmética de la distribución de datos.

34. En una escuela se desea conocer el nivel cultural de sus alumnos. Para ello, se realiza un test a cien estudiantes y se obtienen estos datos.

Puntos	[0, 10)	[10, 20)	[20, 30)	[30, 40)	[40, 50)
n_i	12	34	38	12	4

¿Qué conclusiones pueden extraerse a partir de estos datos?

—**Justifica** tu respuesta teniendo en cuenta los parámetros de centralización y de dispersión.

35. En un lugar se mide la temperatura durante quince días y se obtienen estos valores (en °C):

13, 15, 12, 17, 18, 10, 18, 19, 22, 19, 16, 17, 18, 18, 18.

a. **Construye** la tabla de frecuencias.

b. **Calcula** todos los parámetros estadísticos que ya conoces.

36. Para estudiar la fiabilidad de dos tipos de test de control de alcoholemia, se efectúan varias pruebas de cada uno de ellos a una misma persona. Los resultados obtenidos son:

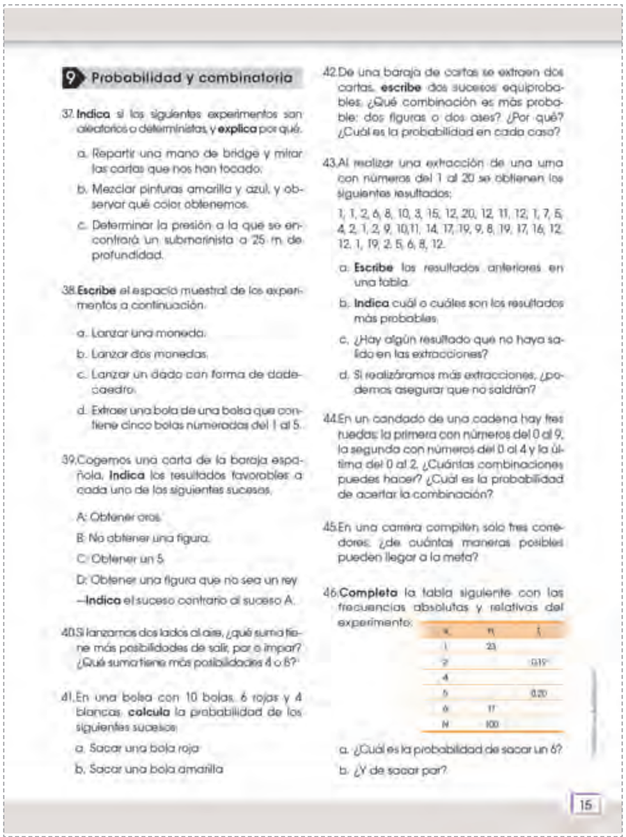
Test A: $\overline{x}$ = 0,09 mg/dl y σ = 0,02 mg/dl

Test B: $\overline{x}$ = 0,09 mg/dl y σ = 0,05 mg/dl

—¿Qué test es más fiable? **Justifica** tu respuesta.

14

Página 15



9 Probabilidad y combinatoria

37. **Indica** si los siguientes experimentos son aleatorios o deterministas, y **explica** por qué.

a. Repartir una mano de bridge y mirar las cartas que nos han tocado.

b. Mezclar pinturas amarilla y azul, y observar qué color obtenemos.

c. Determinar la presión a la que se encontrará un submarinista a 25 m de profundidad.

38. **Escribe** el espacio muestral de los experimentos a continuación.

a. Lanzar una moneda.

b. Lanzar dos monedas.

c. Lanzar un dado con forma de dodecaedro.

d. Extraer una bola de una bolsa que contiene cinco bolas numeradas del 1 al 5.

39. Cogemos una carta de la baraja española. **Indica** los resultados favorables a cada uno de los siguientes sucesos.

A: Obtener oros.

B: No obtener una figura.

C: Obtener un 5.

D: Obtener una figura que no sea un rey.

—**Indica** el suceso contrario al suceso A.

40. Si lanzamos dos lados al aire, ¿qué suma tiene más posibilidades de salir, par o impar? ¿Qué suma tiene más posibilidades 4 o 8?

41. En una bolsa con 10 bolas, 6 rojas y 4 blancas, **calcula** la probabilidad de los siguientes sucesos.

a. Sacar una bola roja.

b. Sacar una bola amarilla.

42. De una baraja de cartas se extraen dos cartas, **escribe** dos sucesos equiprobables. ¿Qué combinación es más probable: dos figuras o dos ases? ¿Por qué? ¿Cuál es la probabilidad en cada caso?

43. Al realizar una extracción de una urna con números del 1 al 20 se obtienen los siguientes resultados:

1, 1, 2, 6, 8, 10, 3, 15, 12, 20, 12, 11, 12, 1, 7, 5, 4, 2, 1, 2, 9, 10, 11, 14, 17, 19, 9, 8, 19, 17, 16, 12, 12, 1, 19, 2, 5, 6, 8, 12.

a. **Escribe** los resultados anteriores en una tabla.

b. **Indica** cuál o cuáles son los resultados más probables.

c. ¿Hay algún resultado que no haya salido en las extracciones?

d. Si realizáramos más extracciones, ¿podemos asegurar que no saldrán?

44. En un candado de una cadena hay tres ruedas: la primera con números del 0 al 9, la segunda con números del 0 al 4 y la última del 0 al 2. ¿Cuántas combinaciones puedes hacer? ¿Cuál es la probabilidad de acertar la combinación?

45. En una carrera compiten solo tres corredores: ¿de cuántas maneras posibles pueden llegar a la meta?

46. **Completa** la tabla siguiente con las frecuencias absolutas y relativas del experimento:

x_i	n_i	f_i
1	23	
2		0,19
4		
5		0,20
6	17	
N	100	

a. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un 6?

b. ¿Y de sacar par?

15

37. a. experimento determinista
b. experimento determinista
c. experimento aleatorio

38. a. Ω= {C, X}
b. Ω = {CC, XX, CX, XC}
c. Ω ={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}
d. Ω = {1, 2, 3, 4, 5}

39. $B = \{1O,...,9O,\ 1C,...,\ 9C,\ 1E,...,9E,\ 1B,...,9\ B\}$
$C = \{5\ O,\ 5\ C,\ 5\ E,\ 5\ B\}$
$D = \{10O,\ 11O,\ 10C,\ 11C,\ 10E,\ 11E,\ 10B,\ 11B\}$
Suceso contrario: No obtener oros, o también se puede indicar como obtener copas, espadas o bastos al sacar la carta de la baraja española.

40. Las posibilidades de salir par o impar son las mismas, pues cada uno de los sucesos tiene el mismo número de casos favorables.
La posibilidad de sumar 8 es mayor, pues este suceso tiene más casos favorables que el suceso de sumar 4.

41. El total de bolas en la bolsa es de 20 bolas. Así pues:

a. Sacar una bola roja. P(roja .= $\frac{6}{20} = 0{,}3 = 30\ \%$

b. Sacar una bola amarilla P(amarilla .= $\frac{0}{20} = 0\%$

42. La cantidad de figuras en una baraja es de 3 por cada palo, haciendo un total de 12 figuras, mientras que la cantidad de ases es solo de una por palo, siendo así 4. Así, es más probable el suceso de sacar dos figuras pues el número de casos favorables es mayor que el de sacar dos ases:

$$P(\text{fig} \cap \text{fig}) = \frac{12}{48} \cdot \frac{11}{47} = \frac{132}{2256} = 0{,}0585$$

$$P(\text{as} \cap \text{as}) = \frac{4}{48} \cdot \frac{3}{47} = \frac{12}{2256} = 0{,}0532$$

43. a. tabla:

x_i	n_i	f_i	n_i
1	5	11	2
2	4	12	6
3	1	13	0
4	1	14	1
5	2	15	1
6	2	16	1
7	1	17	2
8	3	18	0
9	2	19	3
10	2	20	1

b. El resultado más probable es el 12 con 6 repeticiones.

c. Sí, el 13 y el 18 no han aparecido en las extracciones. No podemos garantizar que no salgan en las extracciones puesto que no hay suficiente número de tiradas como para poder estimar el resultado.

44. Se pueden hacer 150 combinaciones.

La probabilidad de acertar la combinación

45. Para cada opción del primero, 3 corredores, hay 2 opciones del segundo, y para cada opción del segundo, solo un corredor por distribuir. Las posibles maneras de llegar a la meta son: 3 · 2 · 1 = 6

46.

x_i	n_i	f_i
1	23	0,23
2	10	0,19
4	21	0,21
5	20	0,20
6	17	0,17

a. P (6) = 0,17 = 17 %

b. P (par) = 0,19 + 0,21+ 0,17 = 0,57 = 57%

Nombre: ______________________ Fecha: ______________

1. **Indica** si las siguientes afirmaciones son verdade¬ras o falsas. **Justifica** tus respuestas.
   a. El número 6, es un número racional.
   b. Todos los números racionales son reales.
   c. Todos los números reales son racionales.
   d. El número pi no es racional.
   e. Un número puede ser racional e irracional a la vez.

2. El grosor de una moneda es de 1,65 mm mientras que la distancia de la Tierra a la Luna es de 0,384 Gm (1Gm = 1000000000 m). El grosor de la moneda y la distancia de la tierra a la luna, expresadas en notación científica son:

   a. $1{,}65 \cdot 10^{3}$m y $3{,}84 \cdot 10^{8}$m   b. $1{,}65 \cdot 10^{-3}$m y $3{,}84 \cdot 10^{8}$m   c. $16{,}5 \cdot 10^{-3}$m y $3{,}84 \cdot 10^{-8}$m

3. En una bureta del laboratorio de biología se nos indica que el error cometido al efectuar una medición es de 0,02 mL. Al medir un volumen de una disolución de ácido sulfúrico obtenemos un valor de 8,35 mL. ¿Entre qué valores se encontrará el valor exacto de la medida?

   a. Entre 8,32 y 8,36mL   b. Entre 8,33 mL y 8,37 mL   c. Entre 8,35 mL y 8,37 mL

4. En las siguientes relaciones de dependencia subraya las que sean funciones.
   a. La temperatura del agua de un lago y la profundidad.
   b. El crecimiento de una planta y el color de su flor.
   c. El perímetro de un polígono regular y el valor de su lado.

5. **Señala** cuál es el perímetro y la superficie de las siguientes figuras en función de x, enlazando la columna A con la B.

A	B
a. Un triángulo de base x y altura el doble de la base.	$P = 3x + x\sqrt{5}$, $A = \frac{3x^2}{2}$
b. Un rombo cuya diagonal menor es x y cuya diagonal mayor es 32 de la menor.	$P = 6x$, $A = x^2$
c. Un trapecio cuya base mayor es el doble que la base menor y esta es igual a la altura.	$P = x\sqrt{13}$, $A = \frac{3x^2}{4}$
d. Un polígono regular de x lados y cuya apotema es igual a la longitud del lado.	$P = 6x$, $A = \frac{3x^2}{4}$

6. La solución de la ecuación $\frac{7(1 - x)}{6} = \frac{5(2x + 7)}{18} + \frac{2x - 7}{24}$ es:

   a. $x = \frac{26}{7}$ b. $x = -\frac{35}{38}$ c. $x = -\frac{7}{26}$ d. $x = -7$

7. María es siete años mayor que su hermana Lidia, y la suma de sus edades dentro de dos años será el triple de la edad actual de Lidia. Las edades de las hermanas son:

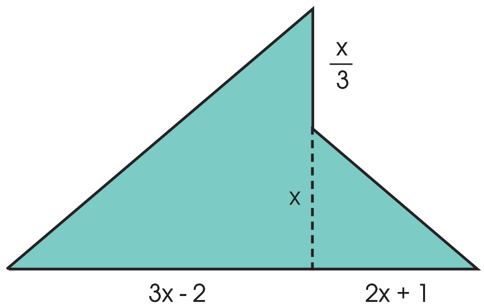
   a. María:18 y Lidia11años   b. María:15 y Lidia 22 años   c. María:26 y Lidia 19 años

Nombre: ______________________ Fecha: ______________

8. Un satélite se encuentra cinco veces más alejado que otro de la Tierra, y la suma de sus dos distancias es de 42 960 km. ¿A qué distancia de la Tierra se encuentran los dos satélites? Expresa el resultado en notación científica.

9. La diagonal de un terreno rectangular mide 93 m mientras que su altura mide 26 m.
   a. **Calcula** la longitud de la base de dicho rectángulo. **Trunca** el resultado a las milésimas.
   b. ¿Cuánto mide su área? **Redondea** hasta las centésimas.
   c. ¿Qué longitud de alambre necesitaremos para vallar el terreno con una doble cordada? **Indica** la longitud precisando hasta los centímetros.

10. **Expresa** mediante un polinomio el área de la figura.



11. **Resuelve** el siguiente sistema por el método de igualación:

$$\left.\begin{array}{l} 6x - 8y = -12 \\ 4x + 2y = -12 \end{array}\right\}$$

12. En una granja se tienen que distribuir las gallinas ponedoras en las jaulas, pero se desconoce la cantidad de jaulas y de gallinas. La relación que se conoce es que si colocamos 6 gallinas por jaula, faltan 2 gallinas por colocar, mientras que si colocamos 8 gallinas por jaula podríamos comprar 4 gallinas más. ¿Cuántas jaulas y gallinas hay?

13. Si $\operatorname{sen} \alpha = -1/3$ y α está en el tercer cuadrante, **calcula** el valor del coseno y de la tangente.

14. Una sociedad astronómica de 12 miembros debe escoger por votación a tres de ellos. El primero será el presidente; el segundo, el vicepresidente y el tercero, el secretario. ¿Cuántas posibles elecciones existen?

15. La siguiente tabla muestra las distancias (en años-luz y para diferentes intervalos) de las estrellas más cercanas: **Representa** estos datos en un histograma

NÚMERO DE ESTRELLAS	5	11	2	24	15
DISTANCIA (AÑOS-LUZ)	0 - 4	4 - 8	8 - 12	12 - 16	16 - 20

16. La edad de Sara es tal que sumada a la mitad de su cuadrado es igual a 1 300. ¿Qué edad tendrá Sara dentro de 4 años?

1. **Indica** si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. **Justifica** tus respuestas.
   a. El número 6, es un número racional. V
   b. Todos los números racionales son reales. V
   c. Todos los números reales son racionales. F
   d. El número pi no es racional. π es irracional
   e. Un número puede ser racional e irracional a la vez. F

2. El grosor de una moneda es de 1,65 mm mientras que la distancia de la Tierra a la Luna es de 0,384 Gm (1Gm = 1000000000 m). El grosor de la moneda y la distancia de la tierra a la luna, expresadas en notación científica son:

   a. $1{,}65 \cdot 10^{3}$m y $3{,}84 \cdot 10^{8}$m   b. $1{,}65 \cdot 10^{-3}$m y $3{,}84 \cdot 10^{8}$m   c. $16{,}5 \cdot 10^{-3}$m y $3{,}84 \cdot 10^{-8}$m

3. En una bureta del laboratorio de biología se nos indica que el error cometido al efectuar una medición es de 0,02 mL. Al medir un volumen de una disolución de ácido sulfúrico obtenemos un valor de 8,35 mL. ¿Entre qué valores se encontrará el valor exacto de la medida?

   a. Entre 8,32 y 8,36mL   b. Entre 8,33 mL y 8,37 mL   c. Entre 8,35 mL y 8,37 mL

4. En las siguientes relaciones de dependencia subraya las que sean funciones.
   a. La temperatura del agua de un lago y la profundidad.
   b. El crecimiento de una planta y el color de su flor.
   c. El perímetro de un polígono regular y el valor de su lado.

5. **Señala** cuál es el perímetro y la superficie de las siguientes figuras en función de x, enlazando la columna A con la B.

   a. Un triángulo de base x y altura el doble de la base.
   b. Un rombo cuya diagonal menor es x y cuya diagonal mayor es 32 de la menor.
   c. Un trapecio cuya base mayor es el doble que la base menor y esta es igual a la altura.
   d. Un polígono regular de x lados y cuya apotema es igual a la longitud del lado.

   $P = 3x + x\sqrt{5}$, $A = \dfrac{3x^2}{2}$

   $P = 6x$, $A = x^2$

   $P = x\sqrt{13}$, $A = \dfrac{3x^2}{4}$

   $P = 6x$, $A = \dfrac{3x^2}{4}$

6. La solución de la ecuación $\dfrac{7\,(1 - x)}{6} = \dfrac{5\,(2x + 7)}{18} + \dfrac{2x - 7}{24}$ es:

   a. $x = \dfrac{26}{7}$ b. $x = -\dfrac{35}{38}$ c. $x = -\dfrac{7}{26}$ d. $x = -7$

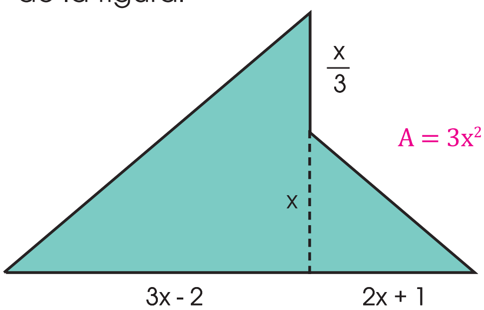
7. María es siete años mayor que su hermana Lidia, y la suma de sus edades dentro de dos años será el triple de la edad actual de Lidia. Las edades de las hermanas son:

   a. María:18 y Lidia 11 años   b. María:15 y Lidia 22 años   c. María:26 y Lidia 19 años

8. Un satélite se encuentra cinco veces más alejado que otro de la Tierra, y la suma de sus dos distancias es de 42 960 km. ¿A qué distancia de la Tierra se encuentran los dos satélites? Expresa el resultado en notación científica. **Un satélite se encontrará a una distancia de $7{,}16 \cdot 10^3$ km, y el otro a $3{,}58 \cdot 10^4$ km**

9. La diagonal de un terreno rectangular mide 93 m mientras que su altura mide 26 m.
   a. **Calcula** la longitud de la base de dicho rectángulo. **Trunca** el resultado a las milésimas.
   b. ¿Cuánto mide su área? **Redondea** hasta las centésimas.
   c. ¿Qué longitud de alambre necesitaremos para vallar el terreno con una doble cordada? **Indica** la longitud precisando hasta los centímetros.

10. **Expresa** mediante un polinomio el área de la figura.



$A = 3x^2 - \frac{5x}{6}$

11. **Resuelve** el siguiente sistema por el método de igualación:

$$\left.\begin{aligned} 6x - 8y &= -12 \\ 4x + 2y &= -12 \end{aligned}\right\}$$

Sol: $x = 2, y = 3$

12. En una granja se tienen que distribuir las gallinas ponedoras en las jaulas, pero se desconoce la cantidad de jaulas y de gallinas. La relación que se conoce es que si colocamos 6 gallinas por jaula, faltan 2 gallinas por colocar, mientras que si colocamos 8 gallinas por jaula podríamos comprar 4 gallinas más. ¿Cuántas jaulas y gallinas hay? **El número de gallinas es de 20 y el número de jaulas 3.**

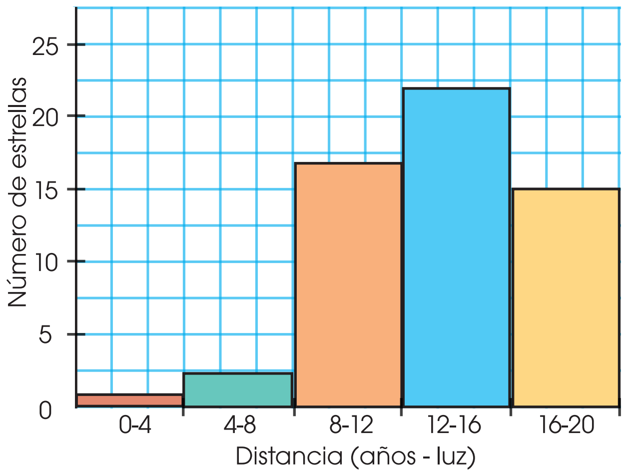
13. Si $\operatorname{sen} \alpha = -1/3$ y α está en el tercer cuadrante, **calcula** el valor del coseno y de la tangente.

$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{8}}{3}$ $\quad$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{8}}{8}$

14. No se utilizan todos los elementos del conjunto y el orden sí importa, ya que según el orden que los escojamos ocuparán un cargo u otro. Por lo tanto, se tratará de una variación. Como la misma persona no puede tener más de un cargo no se permiten repeticiones. Así pues, tendremos una variación sin repetición. Hay 12 miembros y tenemos que escoger 3. Por lo tanto, m = 12 y n = 3. Existen 1320 posibles elecciones

15. La siguiente tabla muestra las distancias (en años-luz y para diferentes intervalos) de las estrellas más cercanas: **Representa** estos datos en un histograma

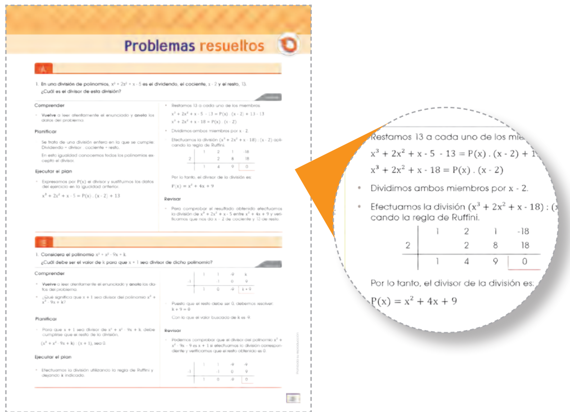
NÚMERO DE ESTRELLAS	5	11	2	24	15
DISTANCIA (AÑOS-LUZ)	0 - 4	4 - 8	8 - 12	12 - 16	16 - 20

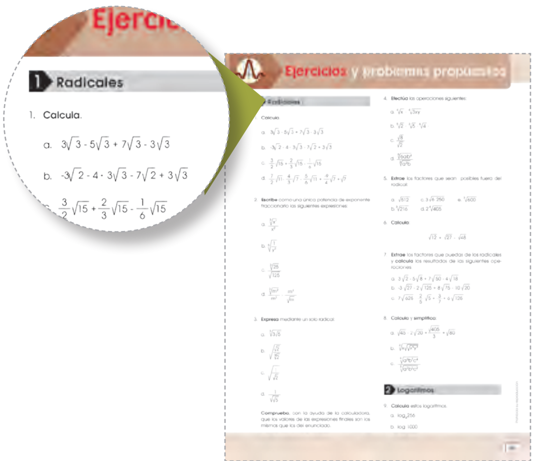


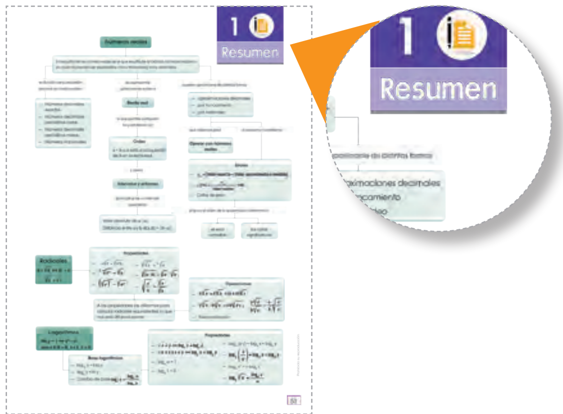
16. La edad de Sara es tal que sumada a la mitad de su cuadrado es igual a 1 300. ¿Qué edad tendrá Sara dentro de 4 años?

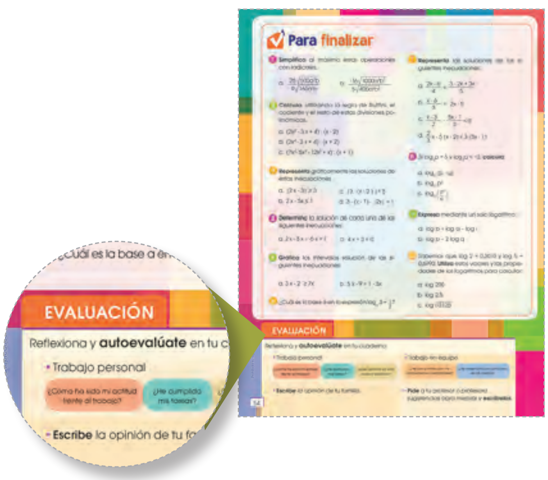
Sara tendrá 54 años.

Números reales









UNIDAD 1

1 Números reales

CONTENIDOS:

1. **Conjunto de números reales**
   1.1. Propiedades de los números reales
   1.2. Propiedades de orden de los números reales
   1.3. Potenciación de números reales con exponente entero
   1.4. Raíz enésima de un número real
   1.5. Radicales. Signos y radicales semejantes
   1.6. Operaciones con radicales
   1.7. Operaciones combinadas
   1.8. Potenciación de números reales con exponente racional
   1.9. Intervalos de números reales
   1.10. Operaciones con intervalos, unión e intersección
   1.11. Operaciones con intervalos, diferencia y complemento
   1.12. Valor absoluto y distancia
2. **Logaritmos**
   2.1. Cálculo de logaritmos
   2.2. Propiedades de los logaritmos
   2.3. Logaritmos en bases distintas de 10
3. **Operaciones con polinomios**
   3.1. Suma, resta y multiplicación de polinomios
   3.2. División de polinomios
   3.3. Método de Ruffini
   3.4. Teorema del residuo
   3.5. Método de Hörner
4. **Ecuaciones e inecuaciones**
   4.1. Ecuaciones de primer grado con una incógnita y con valor absoluto
   4.2. Inecuaciones fraccionarias con una incógnita
   4.3. Inecuaciones de primer grado con una incógnita y con valor absoluto
   4.4. Ecuaciones irracionales

16

Noticias:

El 14 de marzo se celebra el Día del Número Pi

El físico Larry Shaw fue quien, en 1988, creó este día conmemorativo, que en aquel entonces tuvo su primera celebración en el Museo Exploratorium de San Francisco, en California (EE. UU.), donde Shaw trabajaba. El Día Nacional de Pi fue reconocido por la Cámara de Representantes de los Estados Unidos en el año 2009.

RPP noticias, 14/03/2012

http://links.edebe.com/ffikke

Películas:

En el cine hay diversas películas en las que el número adquiere protagonismo. Un ejemplo es Cortina rasgada (Alfred Hitchcock, 1966), pero encontrarás otras referencias en el siguiente enlace:

http://links.edebe.com/uita

Web:

En esta página web encontrarás diversas curiosidades sobre el número:

http://links.edebe.com/4hypw

EN CONTEXTO:

1. **Investiga** en Internet sobre cuál ha sido la evolución de la cantidad de cifras conocidas del número π a lo largo de la historia.
2. **Los números reales e y ϕ son tan conocidos como el número π. ¿Qué tienen en común?**
   —Busca en la Red alguna curiosidad sobre el número e relacionada con el cálculo financiero.
   —¿En qué edificios de la Antigüedad está presente el número ϕ?
3. En el artículo "A vueltas con pi" cuyo enlace se incluye más arriba (en el apartado Película), se cita un diálogo de la serie Person of Interest sobre la infinitud de las cifras decimales de π
   a. ¿Qué sabes sobre los números irracionales y el número?
   b. ¿Qué preguntas o inquietudes te sugiere que en π estén incluidos todos los números y todas las palabras del mundo?
   c. ¿Qué te gustaría investigar sobre el tema? Ponga en común sus respuestas en el grupo de clase y establezcan posibles estrategias de investigación.

17

Eje temático	Contenidos	
Números reales	1.Conjunto de números reales (18 - 32)	1.1. Propiedades algebraicas de los números reales (18) 1.2. Propiedades de orden de los números reales (19) 1.3. Potenciación de números reales con exponente entero (20) 1.4. Raíz enésima de un número real (20) 1.5. Radicales. Signos y radicales semejantes (20) 1.6. Operaciones con radicales (23 - 25) 1.7. Operaciones combinadas (26 - 28) 1.8. Potenciación de números reales con exponente racional (26 - 28) 1.9. Intervalos de números reales (29) 1.10.Operaciones con intervalos, unión e intersección (30) 1.11.Operaciones con intervalos, diferencia y complemento (31) 1.12.Valor absoluto y distancia (32)
	2.Logaritmos. Propiedades (34-35)	2.1. Cálculo de logaritmos. Propiedades (34 - 35)
	3.Operaciones con polinomios (37-42)	3.1 Suma, resta y multiplicación de polinomios (37) 3.2 División de polinomios (38) 3,3 Método de Ruffini (39) 3.4 Teorema del residuo (40) 3.5 Método de Hörner (41 - 42)
	4.Ecuaciones de inecuaciones (44 - 47)	4.1 Ecuaciones de primer grado con una incógnita y con valor absoluto (44) 4.2 Inecuaciones fraccionarias con una incógnita (45) 4,3 Inecuaciones de primer grado con una incógnita y con valor absoluto (46) 4.4 Ecuaciones irracionales (47)

Objetivos generales del área que se evalúan

- Aplicar las propiedades algebraicas de los números reales en la resolución de productos notables y en la factorización de expre¬siones algebraicas.
- Deducir propiedades algebraicas de la potenciación de números reales con exponentes enteros en la simplificación de expresiones numéricas y algebraicas.
- Aplicar las propiedades algebraicas de los números reales para re¬solver fórmulas (Física, Química, Biología., y ecuaciones que se deriven de dichas fórmulas.
- Aplicar las propiedades de orden de los números reales para rea¬lizar operaciones con intervalos (unión, intersección, diferencia y complemento), de manera gráfica (en la recta numérica. y de ma¬nera analítica.
- Aplicar las propiedades de los exponentes y los logaritmos para resolver ecuaciones e inecuaciones con funciones exponenciales y logarítmicas, con ayuda de las TIC.

Objetivos del área por subnivel

- Transformar raíces enésimas de un número real en potencias con exponentes racionales para simplificar expresiones numéricas y algebraicas.
- Aplicar las propiedades de orden de los números reales para resolver ecuaciones e inecuaciones de primer grado con una incógnita y con valor absoluto.
- O.M.5.1. Proponer soluciones creativas a situaciones concretas de la realidad nacional y mundial mediante la aplicación de las operaciones básicas de los diferentes conjuntos numéricos, y el uso de modelos funcionales, algoritmos apropiados, estrategias y métodos formales y no formales de razonamiento matemático, que lleven a juzgar con responsabilidad la validez de procedimientos y los resultados en un contexto.

Criterio de evaluación

- Emplea conceptos básicos de las propiedades algebraicas de los números reales para optimizar procesos, realizar simplificaciones y resolver ejercicios de ecuaciones e inecuaciones, aplicados en contextos reales e hipotéticos.

Indicadores para la evaluación del criterio

- Aplica las propiedades algebraicas de los números rea¬les en productos notables, factorización, potenciación y radica¬ción.
- Halla la solución de una ecuación de primer grado, con valor absoluto, con una o dos variables; resuelve analíticamente una inecuación; expresa su respuesta en intervalos y la gráfica en la recta numérica; despeja una variable de una fórmula para aplicarla en diferentes contextos.

Objetivo del area por subnivel

- OI.5.1. Analizar los diversos proyectos políticos, las propuestas de cambio democrático en una sociedad intercultural y sus efectos en diferentes ámbitos, a partir del reconocimiento de las características del origen, expansión y desarrollo, así como las limitaciones de la propia y otras culturas y su interrelación, y la importancia de sus aportes tecnológicos, económicos y científicos.
- OI.5.12. Participar en procesos interdisciplinares de experimentación y creación colectiva, responsabilizándose del trabajo compartido, respetando y reconociendo los aportes de los demás durante el proceso y en la difusión de los resultados obtenidos.

Elementos del perfil de salida a los que se contribuye

- Tenemos iniciativas creativas, actuamos con pasión, mente abierta y visión de futuro; asumimos liderazgos auténticos, procedemos con proactividad y responsabilidad en la toma de decisiones y estamos preparados para enfrentar los riesgos que el emprendimiento conlleva.
- Sabemos comunicarnos de manera clara en nuestra lengua y en otras, utilizamos varios lenguajes como el numérico, el digital, el artístico y el corporal; asumimos con responsabilidad nuestros discursos.
- Actuamos de manera organizada, con autonomía e independencia; aplicamos el razonamiento lógico, crítico y complejo; y practicamos la humildad intelectual en un aprendizaje a lo largo de la vida.

Básicos imprescindibles | Básicos deseables

Eje temático	Destrezas con criterio de desempeño
Números reales	Aplicar las propiedades algebraicas de los números reales en la resolución de productos notables y en la factorización de expresiones algebraicas.
	Deducir propiedades algebraicas de la potenciación de números reales con exponentes enteros en la simplificación de expresiones numéricas y algebraicas.
	Transformar raíces enésimas de un número real en po¬tencias con exponentes racionales para simplificar expresiones numéricas y algebraicas
	Aplicar las propiedades algebraicas de los números rea¬les para resolver fórmulas (física, química, biología., y ecuacio¬nes que se deriven de dichas fórmulas).
	Aplicar las propiedades de orden de los números reales para realizar operaciones con intervalos (unión, intersección, diferencia y complemento), de manera gráfica (en la recta numérica. y de manera analítica).
	Aplicar las propiedades de orden de los números reales para resolver ecuaciones e inecuaciones de primer grado con una incógnita y con valor absoluto.

<table>
<tr><td>LOGO INSTITUCIONAL</td><td colspan="4">NOMBRE DE LA INSTITUCIÓN</td><td colspan="3">AÑO LECTIVO</td></tr>
<tr><td colspan="8">PLAN DE UNIDAD TEMÁTICA</td></tr>
<tr><td colspan="8">1. DATOS INFORMATIVOS:</td></tr>
<tr><td>Docente:</td><td>Nombre del docente que ingresa la información</td><td>Área/asignatura:</td><td>MATEMÁTICA</td><td>Grado/Curso:</td><td>1° BACHILLERATO</td><td>Paralelo:</td><td></td></tr>
<tr><td>N.º de unidad de planificación:</td><td>1</td><td>Título de unidad de planificación:</td><td>LOS NÚMEROS REALES</td><td colspan="2">Objetivos específicos de la unidad de planificación:</td><td colspan="2">Producir, comunicar y generalizar información de manera escrita, verbal, simbólica, gráfica y/o tecnológica mediante la aplicación de conocimientos matemáticos y el manejo organizado, responsable y honesto de las fuentes de datos para comprender otras disciplinas, entender las necesidades y potencialidades de nuestro

Valorar el empleo de las TIC para realizar cálculos y resolver, de manera razonada y crítica, problemas de la realidad nacional, argumentado la pertinencia de los métodos utilizados y juzgando la validez de los resultados.</td></tr>
<tr><td>PERÍODOS</td><td colspan="2">18</td><td colspan="2"></td><td>SEMANA DE INICIO:</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="8">2. PLANIFICACIÓN</td></tr>
<tr><td colspan="6">DESTREZAS CON CRITERIOS DE DESEMPEÑO A SER DESARROLLADAS:</td><td colspan="2">CRITERIOS DE EVALUACIÓN</td></tr>
<tr><td colspan="6">• Aplicar las propiedades algebraicas de los números reales en la resolución de productos notables y en la factorización de expresiones algebraicas.
• Identificar la intersección gráfica de dos rectas como solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
• Resolver analíticamente sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas utilizando diferentes métodos (igualación, sustitución, eliminación).
• Aplicar las propiedades de orden de los números reales para realizar operaciones con intervalos (unión, intersección, diferencia y complemento) de manera gráfica (en la recta numérica) y de manera analítica.
• Aplicar las propiedades de orden de los números reales para resolver ecuaciones e inecuaciones de primer grado con una incógnita y con valor absoluto.
• Descomponer funciones racionales en fracciones parciales resolviendo los sistemas de ecuaciones correspondientes.
• Realizar operaciones de suma, multiplicación y división entre funciones polinomiales y multiplicación de números
• Reales por polinomios en ejercicios algebraicos de simplificación.
• Aplicar las operaciones entre polinomios de grados =4, esquema de Hörner, teorema del residuo y sus respectivas propiedades para factorizar polinomios de grados =4 y reescribir los polinomios.
• Resolver problemas o situaciones que pueden ser modelizados con funciones polinomiales identificando las variables
• Significativas presentes y las relaciones entre ellas y juzgar la validez y pertinencia de los resultados obtenidos</td><td colspan="2">CE.M.5.1. Emplea conceptos básicos de las propiedades algebraicas de los números reales para optimizar procesos,
realizar simplificaciones y resolver ejercicios de ecuaciones e inecuaciones, aplicados en contextos reales e hipotéticos.</td></tr>
</table>

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	RECURSOS	INDICADORES DE LOGRO	TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN
Experiencia Representación concreta, gráfica y simbólica de los números reales en la recta numérica y de intervalos Resolución de problemas de aplicación de los números reales. Conceptualización Uso de diagramas que resuman los principales conceptos, propiedades y procedimientos con logaritmos. Uso de softwares que refuercen la resoluciòn de ecuaciones e inecuación Aplicación ¿Por qué es importante el uso y aplicación de los números reales? Planteamiento y resolución de problemas que invulucren números reales, ecuaciones e inecuaciones. Reflexión ¿qué diferencia el conjunto de los números reales del resto de conjuntod estudiados? Identificación de las propiedades de los logaritmos que se pueden aplicar en cada ejercicio o problema. Reflexión y análisis sobre la aplicación de las propiedades de los logaritmos y la relación con la potenciación de números reales	- Texto - Cuaderno - Videos (sitios web) - Pizarra - Calculadora	I.M.5.1.1. Aplica las propiedades algebraicas de los números reales en productos notables, factorización, potenciación y radicación. (I.3.) I.M.5.1.2. Halla la solución de una ecuación de primer grado, con valor absoluto, con una o dos variables; resuelve analíticamente una inecuación; expresa su respuesta en intervalos y la gráfica en la recta numérica; despeja una variable de una fórmula para aplicarla en diferentes contextos. (I.2.)	Comprobar el desarrollo de las destrezas necesarias para el manejo de operaciones algebraicas, como Productos notables y factorización, y la aplicación de las propiedades de potenciación y radicación en la simplificación de expresiones algebraicas. Se utiliza estos aprendizajes en la resolución y despejes de fórmulas, y la resolución de ecuaciones e inecuaciones en Matemática y en otros campos. Se resuelve sistemas de ecuaciones por varios métodos, incluyendo el gráfico, aplicando las propiedades de orden y las propiedades de las igualdades y desigualdades.

ELEMENTOS DEL PERFIL DE SALIDA
I.2. Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos e información posibles. I.3. Sabemos comunicarnos de manera clara en nuestra lengua y en otras, utilizamos varios lenguajes como el numérico, el digital, el artístico y el corporal; asumimos con responsabilidad nuestros discursos.

ELABORADO	REVISADO	APROBADO
Docente:	Director del área :	Vicerrector:
Firma:	Firma:	Firma:
Fecha:	Fecha:	Fecha:

Inecuaciones de segundo grado con una incógnita

Considera la inecuación con una incógnita $9x + x^2 > 3x - 2$. Esta inecuación es equivalente a $x^2 + 6x + 2 > 0$, en la que sólo aparece un *polinomio de segundo grado.*

a cualquier inecuación equivalente a $\mathbf{ax^2 + bx + c} < 0$*,* $\mathbf{ax^2 + bx + c} \leq 0$*,* $\mathbf{ax^2 + bx + c} > 0$ *o* $\mathbf{ax^2 + bx + c} \geq 0$*, donde* a, b, c R, $a \neq 0$.

Veamos mediante un ejemplo cómo se resuelve este tipo de inecuaciones.

Considera la inecuación $x^2 - 5x + 6 > 0$.
En primer lugar factorizamos $x^2 - 5x + 6$ en polinomios de primer grado.
Para ello hallamos las soluciones de la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$:

Llamamos ***inecuación de segundo grado*** *con una incógnita*

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$$

Luego resolver $x^2 - 5x + 6 > 0$ equivale a resolver $(x - 3)(x - 2) > 0$.
Para que el producto de dos factores sea positivo ha de suceder que ambos sean positivos o que ambos sean negativos. Es decir:

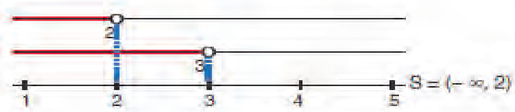
$$\left.\begin{matrix} x - 3 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{matrix}\right\} \quad \text{o bien} \quad \left.\begin{matrix} x - 3 < 0 \\ x - 2 < 0 \end{matrix}\right\}$$

El problema se reduce, entonces, a resolver *dos sistemas lineales de inecuaciones con una incógnita.*

El problema se reduce, entonces, a resolver *dos sistemas lineales de inecuaciones con una incógnita.*

$$\left.\begin{matrix} x - 2 > 0 \\ x - 3 > 0 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} \rightarrow x > 2 \\ \rightarrow x > 3 \end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix} x - 2 < 0 \\ x - 3 < 0 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} \rightarrow x < 2 \\ \rightarrow x < 3 \end{matrix}\right\}$$



Por tanto, el conjunto solución será:

$S = (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

Observa que el conjunto solución es la unión de dos de los intervalos en que las soluciones de la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$ dividen a la recta real.
En general, las soluciones de una inecuación de segundo grado se corresponden con algunos de los intervalos definidos por las soluciones de la ecuación de segundo grado correspondiente.

Ampliación de contenidos
Método práctico de resolución

Para resolver inecuaciones de segundo grado procedemos como sigue:

- Representamos en la recta real las soluciones de la ecuación de segundo grado correspondiente a la inecuación y consideramos los intervalos definidos por dichas soluciones.
- Tomamos un valor cualquiera de la incógnita en cada uno de los intervalos y probamos si verifica la inecuación. Si la verifica, el intervalo es solución de la inecuación. Si no la verifica, el intervalo no es solución de la inecuación.
- Incluimos en el conjunto solución los extremos finitos de los intervalos, es decir, las soluciones de la ecuación de segundo grado, si la inecuación contiene los signos £ o ³.

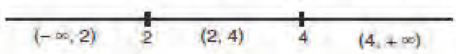
EJEMPLO 15

Resuelve la inecuación: $x^2 - 6x + 8 < 0$

— Hallamos las soluciones de la ecuación $x^2 - 6x + 8 = 0$:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

— Representamos en la recta real las soluciones que hemos hallado:



Estas soluciones definen tres intervalos: $(-\infty, 2)$, $(2, 4)$ y $(4, +\infty)$.

— Tomamos un valor cualquiera de x en cada intervalo y probamos si verifica la inecuación:

Intervalo	x	¿$x^2 - 6x + 8 < 0$?
$(-\infty, 2)$	$x = 0$	$0^2 - 6 \cdot 0 + 8 = 8 \not< 0$
$(2, 4)$	$x = 3$	$3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = -1 < 0$
$(4, +\infty)$	$x = 5$	$5^2 - 6 \cdot 5 + 8 = 3 \not< 0$

— Los extremos finitos de los intervalos no son solución, puesto que la inecuación contiene el signo $<$.

Por tanto, el conjunto solución es:

$S = (2, 4)$

Y TAMBIÉN: ¿?

Algunas inecuaciones se pueden resolver sin necesidad de efectuar cálculos. Observa:

- $x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0$

  Esta desigualdad se satisface siempre. Así, todos los números reales cumplen esta relación, por consiguiente, el conjunto solución es $S = \mathbb{R}$.

- $x^2 + 1 < 0$

  Esta desigualdad no se cumple nunca, por tanto el conjunto solución es $S = \varnothing$.

TIC

Si quieres obtener más ejemplos sobre la resolución de ecuaciones e inecuaciones, conéctate a: www.unizar.es/aragon_tres/u2.htm. En esta página podrás encontrar ejercicios en los que se utiliza el álgebra para resolver problemas de carácter económico.

Nombre: ______________________ Fecha: ______________

1. El orden correcto de mayor a menor los números reales :2,64$\hat{5}$; $\frac{5}{3}$; -$\sqrt{3}$; 2,56; $\sqrt{7}$; $\sqrt{2}$; 1,$\widehat{74}$

   A) $\sqrt{7}$; $\sqrt{2}$; 2,64$\hat{5}$; 2,56; $\frac{5}{3}$; 1,$\widehat{74}$; -$\sqrt{3}$ B. $\sqrt{7}$; 2,64$\hat{5}$; 2,56; 1,$\widehat{74}$; $\frac{5}{3}$; $\sqrt{2}$; -$\sqrt{3}$ C. $\sqrt{7}$; $\frac{5}{3}$; 2,64$\hat{5}$; 2,56; 1,$\widehat{74}$; ; -$\sqrt{3}$

2. Enlaza la columna A con la B, según el resultado correcto:

A	B
$\sqrt[3]{27\,000}$	$6+3\sqrt{3}$
$\sqrt{32}-\sqrt{18}+\sqrt{12}$	$-2-\sqrt{3}$
$\frac{3}{2-\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}+2\sqrt{3}$
$\sqrt{243}+\sqrt{147}-\sqrt{50}+\sqrt{32}$	30
$\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$	$2\sqrt{3}-\sqrt{2}$

3. El conjunto numérico que corresponde a la siguiente representación gráfica es:

   A) (-∞; 1) B. (-5;1) C.(-∞; 1] D. [-5;1]

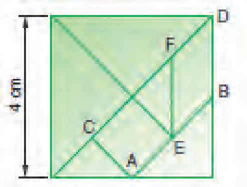
4. Si log x = 3,1, log y = - 0,7 y log z = 0,4, entonces : $\log\sqrt[5]{\frac{xy^3}{z^2}}$ =

   A) -0,1866.. B. 1 C. 1/5 D.0,04

5. En una división de polinomios, el divisor es $2x^3 - 3$; el cociente, $x + 3$, y el resto, $x - 1$. ¿Cuál es el dividendo?

   A) $2x^4 + 6x^3 - 2x - 10$ B. $2x^4 + x - 10$ C. $9x^3 - 2x - 10$ D. $2x^4 + 6x^3 + 2x - 8$

6. El tangram es un juego de paciencia de origen chino. Consta de siete piezas llamadas tans, conseguidas a partir de un cuadrado recortado de una manera determinada. Los siete tans son cinco triángulos de tamaños diferentes, un cuadrado y un paralelogramo.



— Si el lado del cuadrado mide 4 cm, calcula las longitudes de *AB*, *AC*, *CD* y *EF*.

7. Para $a \neq 1$, comprueba que la expresión $\dfrac{\log a^3}{\log a + \log \sqrt{a}}$ equivale a 2.

8. Sabemos que log 2 = 0,3010 y log 5 = 0,6990. Utiliza estos valores y las propiedades de los logaritmos para calcular:

a. log 200 *b.* log 2,5

9. Calcula el cociente y el resto de la división de $P(x) = = 7x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 1$ entre $Q(x) = x + 1$. A continuación, calcula el valor de $P(-1)$.

10. Resuelve la siguiente ecuación y comprueba el resultado

$\sqrt{x+7} + \sqrt{x} = 7$

11. Dada la inecuación $3x - 2y < 6 - y$:

a. ¿Qué puntos del eje de ordenadas son solución de la inecuación?

b. ¿Qué puntos del eje de abscisas son solución de la inecuación?

12. Resuelve la siguiente inecuación: $\dfrac{x+2}{2} - 3(x+1) \geq -2 - \dfrac{5x}{2}$.

13. Una empresa de alquiler de máquinas para la horticultura cobra por una cortacésped \$18 fijos más \$3 al día. Otra empresa no tiene tasa fija, pero cobra \$6 al día por el alquiler de la misma máquina. ¿A partir de cuántos días le resulta más ventajosa al cliente la primera opción?

Recurso para la evaluación

1. El orden correcto de mayor a menor los números reales: $2{,}64\widehat{5}$; $\frac{5}{3}$; $-\sqrt{3}$; 2,56; $\sqrt{7}$; $\sqrt{2}$; $1{,}\widehat{74}$ es la opción B. $\sqrt{7}$; $2{,}64\widehat{5}$; 2,56; $1{,}\widehat{74}$; $\frac{5}{3}$; $\sqrt{2}$; $-\sqrt{3}$

2.

$\sqrt[3]{27\,000}=30$

$\sqrt{32}-\sqrt{18}+\sqrt{12}=\sqrt{2}+2\sqrt{3}$

$\frac{3}{2-\sqrt{3}}=6+3\sqrt{3}$

$\sqrt{243}+\sqrt{147}-\sqrt{50}+\sqrt{32}=2\sqrt{3-}\sqrt{2}$

$\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=-2-\sqrt{3}$

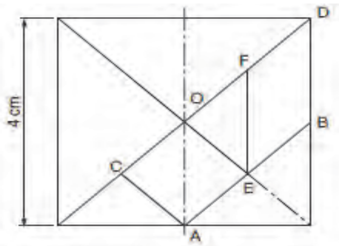
3. La opción correcta es la c

4. $\log\sqrt[5]{\frac{xy^3}{z^2}}=\frac{1}{5}(\log x+3\log y-2\log z)$, reemplazando log x,logy y log z:

$\frac{1}{5}[3{,}1+3(-0{,}7)-2.\,(0{,}4)]=\frac{1}{5}[3{,}1-2{,}1-0{,}8]=\frac{1}{5}[0{,}2]=0{,}04.$

Por tanto la opción correcta es D

5. El dividendo se corresponderá a: $P(x) = C(x)\cdot D(x) + R(x) = (x + 3)(2x^3 - 3) + x - 1 = 2x^4 + 6x^3 - 2x - 10$



6.

En la figura observamos que *A* es el punto medio del lado inferior del cuadrado y *B* es el punto medio de su lado derecho.

- Calculamos, pues, la longitud de *AB*: $l\,(AB.^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \Rightarrow l(AB\,.= \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ cm

$$l(AE)=\frac{l(AB)}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\text{ cm}$$

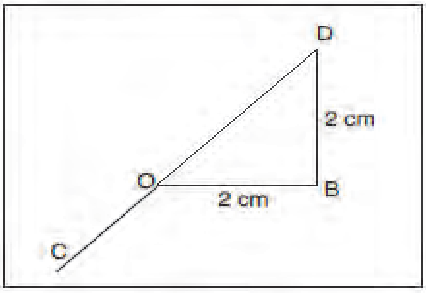
- Ahora, como *AB* es el doble de largo que *AE:*

y como *AE* y *AC* son lados del mismo cuadrado, resulta que: $l(AC. = l(AE) = \sqrt{2}$ cm

- Por otra parte, $l(CD. = l(CO) + l(OD.$

Calculemos $l(CO)$ y $l(OD.$:

$l(CO) = l(AE) = \sqrt{2}$ cm, por ser *CO* y *AE* dos lados de un mismo cuadrado.



Así,

$$l(CD) = l(CO) + l(OD) =$$
$$= \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}\text{ cm}$$

$l(OD.^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \Rightarrow l(OD. = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ cm l

Soluciones. Recursos para evaluación

Finalmente, como uno de los tans debe ser un paralelogramo distinto del cuadrado y el único que puede ser tal es el polígono *EFDB*, éste es el paralelogramo, y por tanto:

$l(EF) = l(BD. = 2$ cm, pues son lados opuestos.

7. Sea $a \neq 1$, entonces:

$$\frac{\log a^3}{\log a + \log\sqrt{a}} = \frac{3\cancel{\log a}}{\cancel{\log a} + \frac{\cancel{\log a}}{2}} = \frac{3}{1+\frac{1}{2}} = 2$$

a) $\log 200 = \log(2^3 \cdot 5^2) = \log 2^3 + \log 5^2 =$

$= 3\log 2 + 2\log 5 =$

$= 3 \cdot 0{,}3010 + 2 \cdot 0{,}6990 = 2{,}3010$

b) $\log 2{,}5 = \log\frac{5}{2} = \log 5 - \log 2 =$

$= 0{,}6990 - 0{,}3010 = 0{,}3980$

8.

	7	–2	3	0	1
–1		–7	9	–12	12
	7	–9	12	–12	13

9.

C (x) = $7x^3 - 9x^2 + 12x - 12$ R (x) = 13

Recursos para trabajo inclusivo

- Para resolver una inecuación lineal con dos incógnitas, asignamos a cada par de valores de *x* e *y* de una solución el punto (*x*, *y*) del plano de coordenadas.
  Las soluciones de se pueden representar gráficamente en un sistema de coordenadas cartesianas.
- Dado un número real *a* positivo y diferente de 1, se llama **logaritmo en base *a* de un número *p*** y se representa por $\log_a p$, al exponente al que hay que elevar la base *a* para obtener *p*.

$$\log_a p = x \Leftrightarrow a^x = p$$

- Se llama **logaritmo decimal de *p*** aquel cuya base es **10,** y se escribe simplemente **log *p*.**

1. **Calcula** y **simplifica** estos radiales:

   a) $5\sqrt{2} - 3\sqrt{18} - 2\sqrt{50}$ c) $\sqrt{4a^2 b}$

   b) $\sqrt{18} + \sqrt{8}$ d) $\sqrt[3]{81x^2 y^3 z^7}$

2. **Escribe** de forma simbólica y **representa** gráficamente estos intervalos:
   a. Números reales mayores o iguales que - 6 y menores o iguales que - 3.
   b. Números reales mayores que - 2.

3. **Representa** en la recta real los siguientes conjuntos:
   a. $\{x \in R| -1 \leq x \leq 4\}$
   b. $(-\infty, -1) \cup [2, +\infty)$
   c. $[-3, 2) \cup (3, 5]$
   d. $\{x \in R| 2 \leq x \leq 6\}$

4. **Escribe** en forma logarítmica estas igualdades:

   a. $6^2 = 36$ b. $4^{-3} = \frac{1}{64}$ c. $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$

5. **Escribe** en forma exponencial estas igualdades:

   a. $\log_{\frac{1}{3}} 243 = -5$ b. $\log_{10} 1000 = 3$ c. $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$

6. **Calcula** la base *a* en cada caso.

   a. $\log_a 49 = 2$ b. $\log_a 27 = -3$ c. $\log_a \left(\frac{1}{16}\right) = -4$

7. **Calcula** los siguientes logaritmos:

   a. $\log_3 81$ b. $\log_{\frac{1}{5}} 125$ c. $\log_2(-4)$ d. $\log_7 7^6$

8. Si $\log_3 p = 15$ y $\log_3 q = -7$, calcula:

   a. $\log_3(p \cdot q)$ b. $\log_3 p^2$ c. $\log_3(p \cdot q^3)$ d.. $\log_3\left(\frac{p^5}{q}\right)$

9. **Expresa** mediante un solo logaritmo:
   a. log p + log q – log r b. 2 log p – log q − 1

10. **Indica** si los siguientes pares pertenecen al conjunto solución de la inecuación $x - 1 \leq 2y - 3$.
    a. $x = 0$, $y = 0$ b. $x = 3$, $y = 1$ c. $x = -1$, $y = 4$

1. a. $5\sqrt{2} - 3\sqrt{9\,.\,2} - 2\sqrt{25\,.\,2} = 5\sqrt{2} - 9\sqrt{2} - 10\sqrt{2} = -14\sqrt{2}$

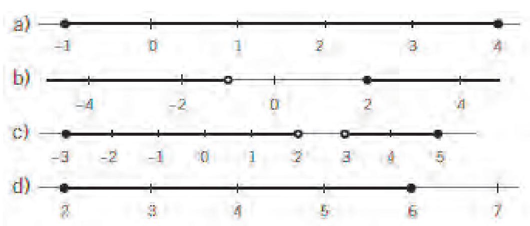
b. $\sqrt{18} + \sqrt{8} = \sqrt{9\,.\,2} + \sqrt{4\,.\,2} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

c. $\sqrt{4\,a^2 . b} = 2a\sqrt{b}$

d. $\sqrt[3]{81x^2y^3z^7} = \sqrt[3]{27\,.\,3\,x^2y^3z^6 . z} = 3yz^2\sqrt[3]{3x^2z}$

2. a. [- 6, 3]; b. (- 2, +∞)

3.



4. a. $\log_6 36 = 2$ b. $\log_4 \frac{1}{64} = -3$ c. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81} = 4$

a. $\log_{\frac{1}{3}} 243 = -5$ b. $\log_{10} 1000 = 3$ c. $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$

5. a. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-5} = 243$ b. 103 = 1000 c. $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

6. a. a = 7 b.a = $\frac{1}{3}$ c. a = 2

7. a. $\log_3 81 = 4$ b. $\log_{\frac{1}{5}} 125 = -3$ c. $\log_2(-4)$ d. $\log_7 7^6 = 6$

8. *a.* $\log_3 p + \log_3 q = 15 - 7 = 8$ *b.* $\log_3 p^2 = 2.\log_3 p = 2\,.\,15 = 30$

c. $\log_3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}^3) = \log_3 \mathbf{p} + 3\log_3 \mathbf{q} = 15 - 3\,.7 = -6$ *d.* $\log_3\left(\frac{\mathbf{p}^5}{\mathbf{q}}\right) = 5\log_3 \mathbf{p} - \log_3 \mathbf{q} =$
5. 15 –(-7) = 75 + 7 = 82

9. a. $\log \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}}{\mathbf{r}}$ b. $\log \frac{p^2}{q+1}$–

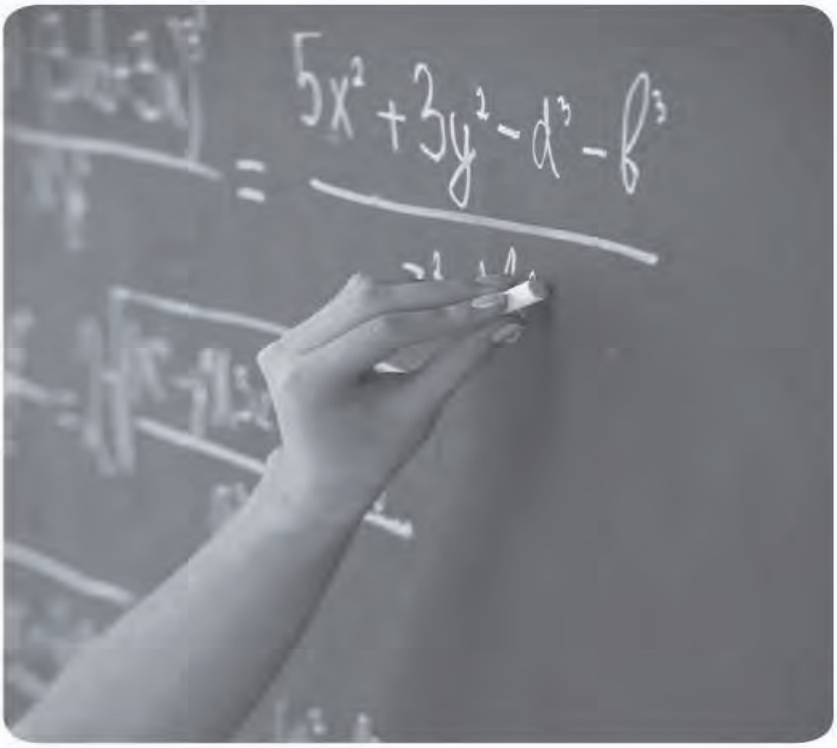
10. $x - 1 \leq 2\,y - 3$.

a. (0; 0) No pertenece porque 0-1 ≤ 2.0 – 3 →-1≥ -3
b. (3; 1) No pertenece, porque 3-1 ≤ 2.1 – 3 →2 ≥ -1
c. (−1; 4) Sí pertenece, porque -1-1 ≤ 2.4 – 3 →-2 ≤ 5

Trabajo inclusivo

Some Maths in English

Polynomials



Visit:

@ http://links.edebe.com/mbw8

Read its contents and answer the questions below:

1. Add the following terms to your English Maths Dictionary: monomial, binomial, polynomial, add, multiply, divide, degree and standard form.
2. Practice a little: Write 2 polynomials and 2 not polynomials. Justify your answers.

¿Cómo dinamizo el aula?

Experiencia

Representación concreta, gráfica y simbólica de los números reales en la recta numérica y de intervalos

Resolución de problemas de aplicación de los números reales.

Conceptualización

Uso de diagramas que resuman los principales conceptos, propiedades y procedimientos con logaritmos.

Uso de softwares que refuercen la resolucìón de ecuaciones e inecuación

Reflexión

¿qué diferencia el conjunto de los números reales del resto de conjuntod estudiados?

Identificación de las propiedades de los logaritmos que se pueden aplicar en cada ejercicio o problema.

Reflexión y análisis sobre la aplicación de las propiedades de los logaritmos y la relación con la potenciación de números reales

Aplicación

¿Por qué es importante el uso y aplicación de los números reales?

Planteamiento y resolución de problemas que invulucren números reales, ecuaciones e inecuaciones.

1. Di cuáles de las siguientes igualdades son ciertas y cuáles no:

a) $(-3+2\sqrt{7})^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{(-3+2\sqrt{7})^{3}}$

b) $(25 \cdot a \cdot b^{3})^{\frac{5}{4}} = \frac{1}{(25 \cdot a \cdot b^{3})^{-\frac{5}{4}}}$

c) $(-6-a)^{-\frac{2}{3}} = \left[(-6-a)^{\frac{2}{3}}\right]^{-1}$

d) $a^{\frac{-1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{-1}{4} \cdot \frac{1}{3}}$

- Solucón : Son ciertas las igualdades b y c

2. Introduce los factores en cada raíz:

a) $3\sqrt[3]{2}$

b) $2\sqrt{\frac{1}{3}}$

c) $\frac{x}{3}\sqrt{\frac{7}{2x}}$

Sol.: a) $\sqrt[3]{54}$; b) $\sqrt{\frac{4}{3}}$; c) $\sqrt{\frac{7x}{18}}$

3. Calcula:

a. $(11+\sqrt{2})^2$ c. $(\sqrt{10}-\sqrt{17})(\sqrt{10}+\sqrt{17})$

b. $(\sqrt{6}-\sqrt{5})^2$ d. $(7-\sqrt{21})(7+\sqrt{21})$

Solución.: a.$123+22\sqrt{2}$ b.-7 c.$11+2\sqrt{30}$ d.28

4. Calcula el área total y el volumen de un cono cuya base mide 5 m de radio y su generatriz, 10 m. **Expresa** los resultados como números irracionales.

Solución: 75π m2; $\frac{125\pi\sqrt{3}}{3}$ m^3

5. Al calcular $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ se obtiene un número entero. **Halla** dicho número.

Sol.: 4

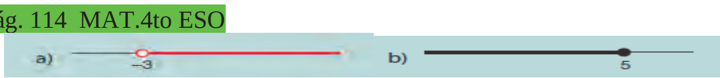
6. Basándote en la definición de logaritmo, **halla** el valor de *x* que **verifica** cada una de las siguientes igualdades:

a. $\log(x-5)=2$ b. $\log(3x+1)=1$ c. $\log\frac{4x}{5}=3$ d. $\log\frac{3x+40}{x-19}=2$

Solución.: a.x=95 b. x=3 c.x=1250 d. x=20

7. Escribe en cada caso dos inecuaciones equivalentes cuyo conjunto solución sea el representado en la figura.

pág. 114 MAT.4to ESO



Solución.: a. $x>-3$; $2x+1 > -6+1$ b. $x\leq 5$; $3x\leq 15$

8. Representa gráficamente las soluciones de estas inecuaciones.

a. $2x - y \geq 3$ c. $3 \cdot (x - 2y) < 5$

b. $2x + y \leq 1$ d. $3 \cdot (x - 1) - 2y > 1$

RECURSOS PROPIOS DEL ÁREA

En este campo desempeñan un importante papel los recursos tecnológicos al alcance de estudiantes y profesores y profesoras (calculadora, ordenador, herramientas informáticas...), pues facilitan el trabajo tradicional y ofrecen nuevas aplicaciones. La incorporación de herramientas tecnológicas como recurso didáctico para el aprendizaje de la matemática, especialmente en el caso de que se apliquen estos recursos

Así, las principales herramientas TIC disponibles y algunos ejemplos de sus utilidades concretas son:

- Uso de procesadores de texto para redactar, revisar la ortografía, hacer resúmenes, añadir títulos, imágenes, hipervínculos, gráficos y esquemas sencillos, etc.
- Usos sencillos de las hojas de cálculo para organizar la información (datos) y presentarla, en ocasiones, de forma gráfica.
- Utilización de herramientas simples de algún programa de diseño gráfico.
- Usos simples de bases de datos.
- Utilización de programas de correo electrónico.
- Usos y opciones básicas de los programas navegadores.
- Acceso, entre otras muchas utilidades, a las noticias de prensa (prensa digital) para establecer comparaciones, recabar información actualizada, etc., o para investigaciones bibliográficas.
- Uso de buscadores:
- Extracción de información (enlaces) a partir de los propios directorios de cada buscador principal.
- Uso de los recursos de búsqueda por términos clave en búsquedas simples y avanzadas.
- Usos sencillos de programas de presentación (Powerpoint o similares): trabajos multimedia, presentaciones creativas de contenidos, esquemas, o realización de diapositivas.
- Uso de los recursos de búsqueda por términos clave en búsquedas simples y avanzadas.
- Creación y organización de listas de favoritos, así como seguimiento y actualización de la información de las distintas URL consultadas.
- Uso de enciclopedias virtuales (cd y www).
- Uso de periféricos: escáner, impresoras, etc.
- Puesta en práctica de videoconferencias, chats...
- Usos sencillos de programas de presentación (Powerpoint o similares): trabajos multimedia, presentaciones creativas de textos.

Orientación didáctica

Para anticipar posibles dificultades en los contenidos de la unidad, el profesor o profesora puede utilizar las siguientes propuestas: repasar los conceptos y las operaciones con fracciones y números decimales y propiedades de la potenciación y radicación.

Se recomienda que el profesor o profesora resuelva varios ejemplos en la pizarra y solucione todas las dudas de los estudiantes. Observar los pasos para calcular la expresión decimal de un número racional, y viceversa.

Es importante repasar las operaciones con números enteros positivos y negativos antes de iniciar las operaciones con números racionales. Además, debe recordarse la prioridad en las operaciones combinadas.

Propuestas:

- Dedicar el tiempo suficiente a explicar detenidamente cómo se calcula la raíz cuadrada de un número
- Preguntar a menudo a los estudiantes si tienen dudas en el momento de explicar la simplificación de radicales y saber si son semejantes entre sí.

Página 17

Noticias:

El 14 de marzo se celebra el Día del Número Pi

El físico Larry Shaw fue quien, en 1988, creó este día conmemorativo, que en aquel entonces tuvo su primera celebración en el Museo Exploratorium de San Francisco, en California (EE. UU.), donde Shaw trabajaba. El Día Nacional de Pi fue reconocido por la Cámara de Representantes de los Estados Unidos en el año 2009.

RPP noticias, 14/03/2012

http://links.edebe.com/ftkke

Películas:

En el cine hay diversas películas en las que el número adquiere protagonismo. Un ejemplo es Cortina rasgada (Alfred Hitchcock, 1966), pero encontrarás otras referencias en el siguiente enlace:

http://links.edebe.com/uito

Web:

En esta página web encontrarás diversas curiosidades sobre el número:

http://links.edebe.com/4hypw

EN CONTEXTO:

1. **Investiga** en Internet sobre cuál ha sido la evolución de la cantidad de cifras conocidas del número π a lo largo de la historia.
2. **Los números reales e y ϕ son tan conocidos como el número π. ¿Qué tienen en común?**
   —Busca en la Red alguna curiosidad sobre el número e relacionado con el cálculo financiero.
   —¿En qué edificios de la Antigüedad está presente el número ϕ?
3. En el artículo "A vueltas con pi" cuyo enlace se incluye más arriba (en el apartado Película), se cita un diálogo de la serie Person of Interest sobre la infinitud de las cifras decimales de π
   a. ¿Qué sabes sobre los números irracionales y el número?
   b. ¿Qué preguntas o inquietudes te sugiere que en π estén incluidos todos los números y todas las palabras del mundo?
   c. ¿Qué te gustaría investigar sobre el tema? Ponga en común sus respuestas en el grupo de clase y establezcan posibles estrategias de investigación.

17

Solucionario

a. Respuesta sugerida:

Se puede consultar la siguiente página web para investigar sobre la evolución de las cifras del número p: http://links.edebe.com/fkfa

b. Respuesta sugerida:

- En matemática financiera, el número e se utiliza para calcular el interés continuo a partir de la fórmula siguiente:

$C = C0\ e\ rt$, donde C es el capital final de la inversión, C0 es el capital inicial, r es el interés anual compuesto en tanto por uno y t es el tiempo transcurrido desde el inicio de la inversión.

- La fachada de grandes edificios desde el Partenón a la Gran Mezquita de Kairouan y todo el camino a través de hitos modernos como la Ópera de Sídney y la Galería Nacional de Londres.

c. Respuesta abierta a modo de reflexión individual que puede servir como introducción a los números reales.

Página 20

1.3. Potenciación de números reales con exponente entero

Sabemos que el producto de varios números racionales iguales puede expresarse como una potencia de base racional.

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

La [illegible] de base a, es un número [illegible] y su [illegible] es un número [illegible] n, la potencia es el producto del número a por sí mismo, n veces. [illegible]

$$\frac{a^6}{a^5}=\frac{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}=a^1$$

Pero, ¿qué sucede si el exponente de una potencia es 1? En tal caso no podemos aplicar la definición de potencia, ya que no existen productos con un único factor. En este caso se toma como valor de la potencia la propia base. Así, por ejemplo, $\pi^1=\pi$.

$$\frac{a^{n+1}}{a^n}=a^1 \qquad n\in\mathbb{N}, a\in\mathbb{R}$$

Las [illegible] de base real y exponente natural tienen las mismas propiedades que las de base racional.

Consideremos seguidamente el caso en que el exponente sea un número entero.

Las potencias de base real y exponente entero positivo son justamente las potencias de base real y exponente natural. Pero ¿qué ocurre si el exponente es 0 o un número entero negativo?

A las potencias de exponente 0 o un número entero negativo las definimos de manera que las propiedades de las potencias de exponente natural continúen siendo válidas, en particular la propiedad de la división de potencias de la misma base.

Potencias de exponente 0	Potencias de exponente negativo
• Consideramos la división $\pi^4:\pi^4$.	• Consideramos la división $\pi^3:\pi^5$.
$\pi^4:\pi^4 \rightarrow \frac{\pi\cdot\pi\cdot\pi\cdot\pi}{\pi\cdot\pi\cdot\pi\cdot\pi}=1 \rightarrow \boxed{\pi^0=1}$	$\pi^3:\pi^5 \rightarrow \frac{\pi\cdot\pi\cdot\pi\cdot\pi}{\pi\cdot\pi\cdot\pi\cdot\pi}=\frac{1}{\pi\cdot\pi}=\frac{1}{\pi^2} \rightarrow \boxed{\pi^{-2}=\frac{1}{\pi^2}}$
Si aplicásemos la regla para dividir potencias $\rightarrow \pi^{4-4}=\pi^0$	Si aplicásemos la regla para dividir potencias $\rightarrow \pi^{3-5}=\pi^{-2}$
La [illegible] de base número real a, $a\neq0$, y [illegible] 0 es igual a 1. $a^0=1$, con $a\neq0$	La [illegible] de base número real a, $a\neq0$, y [illegible] un número entero [illegible] es igual al inverso de la potencia de base a y exponente positivo. [illegible]

Tabla 3

20

Página 21

1.4. Raíz enésima de un número real

Los radicales están estrechamente relacionados con las potencias. En este apartado veremos cómo se relacionan y aprenderemos a trabajar con expresiones en las que aparecen radicales o potencias de exponente racional.

Si accedes a la página **http://www.josemariabea.com/index.php/tecnicasde-calculo-mental/5-raices-cuadradas** encontrarás una estrategia para calcular mentalmente raíces cuadradas de números entre 1 y 1 000. Observarás que el resultado que obtienes es aproximado, pero se va acercando más al resultado real cuanto mayor es el número.

Las raíces cuadradas de un número real b son los números reales +a y −a si y solo si $(+a)^2=b$ y $(-a)^2=b$. Se expresa: [illegible]

Observa que b debe ser un número real mayor o igual que 0, ya que es una potencia par de + a y de - a. De este modo:

Si el radicando es positivo...	Si el radicando es negativo ...
Existen dos raíces cuadradas que son dos números reales opuestos. $\sqrt{25}=\pm5$	No existe ninguna raíz cuadrada real. $\sqrt{-3}=?$

Tabla 4

También conviene observar que si b es un número racional, su raíz cuadrada puede ser un número racional o irracional.

Si el radicando es un racional cuadrado perfecto...	Si el radicando no es un racional cuadrado perfecto...
La raíz cuadrada es un número racional. $\sqrt{\frac{9}{16}}=\pm\frac{3}{4}$	La raíz cuadrada es un número irracional. $\sqrt{\frac{2}{3}}$

Tabla 5

A las raíces de índice diferente de 2 las definimos de forma parecida a las raíces cuadradas.

Por ejemplo, el número 125 es el resultado de elevar al cubo el número 5. Así, el número 5 es la raíz cúbica de 125. Y el número -125 es el resultado de elevar al cubo el número -5. Así, el número -5 es la raíz cúbica de -125.

b es la raíz enésima de a, es decir, $b=\sqrt[n]{a}$, si y solo si $b^n=a$, donde a, b son reales y n es un natural mayor que 1.

$b=\sqrt[n]{a}$: $\sqrt[n]{\ }$ es el signo radical; n es el índice del radical; a es el radicando; b es la raíz.

Actividades

7. **Señala** en cuáles de las fracciones siguientes el numerador y el denominador son cuadrados perfectos.

$$\frac{125}{4};\ \frac{9}{16};\ \frac{99}{35};\ \frac{16}{25};\ \frac{111}{38};\ \frac{169}{81}$$

   a. **Escribe** las raíces cuadradas de todas las fracciones.
   b. **Clasifica** las raíces obtenidas en números racionales y números irracionales.

21

Orientación didáctica

- Debe dedicarse el tiempo suficiente a asentar la potenciación con números reales con exponentes enteros y negativos, estableciendo la semejanza de estas operaciones con la de los números racionales que estudiaron en el año anterior.
- Asegurarse de la total comprensión de este tema por parte de los estudiantes, resolviendo varios ejemplos en el pizarrón.

Actividades complementarias

- **Laberinto de radicales...**

tomado de http://www.sinewton.org/

Busca un camino, partiendo de la casilla superior izquierda, pasando de una casilla a otra lateral, superior o inferior, sabiendo que los radicales de ambas casillas tienen que ser equivalentes, hasta salir por la casilla inferior derecha.

A los estudiantes que encuentren pronto el camino se les puede pedir que agrupen las raíces y potencias por conjuntos equivalentes.

$\sqrt{8}$	$8^{\frac{1}{2}}$	$4^{\frac{1}{4}}$	8
$\sqrt{2^3}$	$2\sqrt{2}$	$2\cdot2^{\frac{1}{2}}$	$4^{\frac{1}{3}}$
$2^{\frac{2}{3}}$	$\sqrt[4]{2^6}$	$2^{\frac{3}{2}}$	$\sqrt[4]{4^3}$
$\sqrt[4]{16}$	4	$2^{\frac{6}{4}}$	$\sqrt[4]{64}$

Solucionario

7. Son cuadrados perfectos $\frac{125}{4};\ \frac{9}{16};\ \frac{16}{25};\ \frac{169}{81}$

   Las raices cuadradas son:

$$\frac{5}{2};\ \frac{3}{4};\sqrt{\frac{11}{35}};\ \frac{4}{5};\sqrt{\frac{111}{38}};\frac{13}{9}$$

Actividades complementarias

- Piensa rápido

$3 \cdot 2 = 10$

$4 \cdot 3 = 21$

$5 \cdot 4 = 36$

$6 \cdot 5 = 55$

$7 \cdot 6 = ?$

«?» equivale a 78: se multiplican los dos números y se le suma el cuadrado del segundo.

Solucionario

8. Las raíces positivas son: $\sqrt{\frac{11}{13}}$;

$\sqrt[3]{\frac{3}{24}} = \frac{1}{2}$; $\sqrt{\frac{1052}{4208}} = \pm\frac{1}{2}$; $\sqrt[5]{\frac{1}{2}}$

Las raíces negativas son: $\sqrt[4]{-\frac{27}{64}} = -\frac{3}{4}$;

$\sqrt[4]{-\frac{111}{333}}$;

9. Los radicales semejantes son:

$4\sqrt[3]{2}$ y $-6\sqrt[3]{2}$ $\quad$ $-2\sqrt{5}$ y $6\sqrt{5}$

Solucionario

10.

a. $(-2+5-8+3-5+7)\sqrt{7} = 0$

b. $\left(\frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{6\sqrt{2}}\right) + (-2+7)\sqrt{2} =$

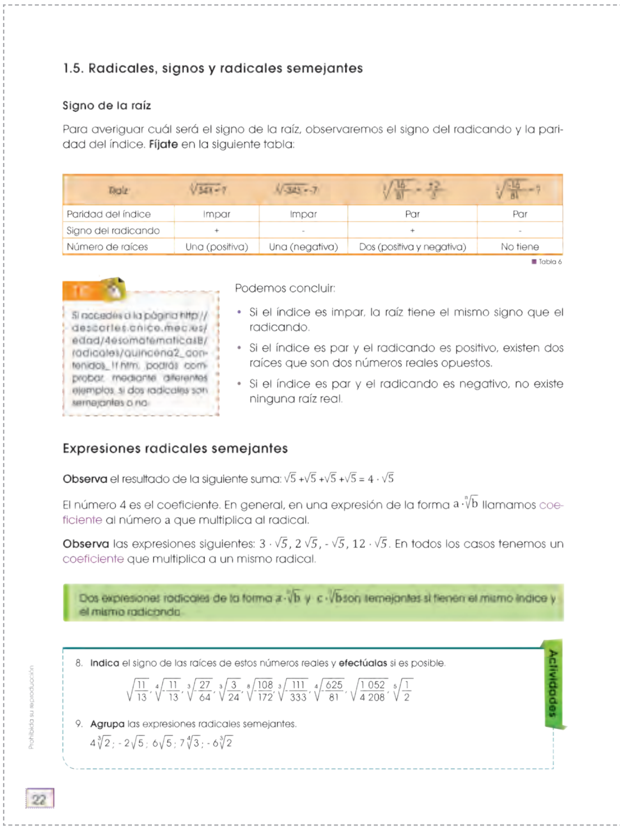
$\left(\frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{12}\right) + 5\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{12} + 5\sqrt{2} = \frac{61}{12}\sqrt{2}$

c. $(5\sqrt{11} - 4\sqrt{11} - 9\sqrt{11}) + (-3\sqrt{17} + 8\sqrt{17}) =$

11. $\sqrt{17} + 8\sqrt{(17)} = -8\sqrt{11} + 5\sqrt{17}$

$\sqrt{4} = \pm 2$; $\sqrt{\frac{a}{2b}}$; $\sqrt{\frac{144}{16c}}$ $\sqrt{\frac{9}{c}} = \frac{3\sqrt{c}}{c}$; $\sqrt{\frac{12a}{3a}} = \sqrt{4} = \pm 2$

Página 22



1.5. Radicales, signos y radicales semejantes

Signo de la raíz

Para averiguar cuál será el signo de la raíz, observaremos el signo del radicando y la paridad del índice. **Fíjate** en la siguiente tabla:

Raíz	$\sqrt[3]{343}=7$	$\sqrt[3]{-343}=-7$	$\sqrt[4]{\frac{16}{81}}=\pm\frac{2}{3}$	$\sqrt[4]{-\frac{16}{81}}=?$
Paridad del índice	Impar	Impar	Par	Par
Signo del radicando	+	-	+	-
Número de raíces	Una (positiva)	Una (negativa)	Dos (positiva y negativa)	No tiene

Tabla 6

TIC: Si accedes a la página http://descartes.cnice.mec.es/edad/4esomatematicasB/radicales/quincena2_contenidos_1f.htm, podrás comprobar, mediante diferentes ejemplos, si dos radicales son semejantes o no.

Podemos concluir:

- Si el índice es impar, la raíz tiene el mismo signo que el radicando.
- Si el índice es par y el radicando es positivo, existen dos raíces que son dos números reales opuestos.
- Si el índice es par y el radicando es negativo, no existe ninguna raíz real.

Expresiones radicales semejantes

Observa el resultado de la siguiente suma: $\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{5} = 4\cdot\sqrt{5}$

El número 4 es el coeficiente. En general, en una expresión de la forma $a\cdot\sqrt[n]{b}$ llamamos coeficiente al número a que multiplica al radical.

Observa las expresiones siguientes: $3\cdot\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$, $12\cdot\sqrt{5}$. En todos los casos tenemos un coeficiente que multiplica a un mismo radical.

Dos expresiones radicales de la forma $a\cdot\sqrt[n]{b}$ y $c\cdot\sqrt[n]{b}$ son semejantes si tienen el mismo índice y el mismo radicando.

Actividades

8. **Indica** el signo de las raíces de estos números reales y **efectúalas** si es posible.

$\sqrt{\frac{11}{13}}$, $\sqrt[4]{-\frac{11}{13}}$, $\sqrt[3]{-\frac{27}{64}}$, $\sqrt[3]{\frac{3}{24}}$, $\sqrt[8]{-\frac{108}{172}}$, $\sqrt[3]{-\frac{111}{333}}$, $\sqrt[4]{-\frac{625}{81}}$, $\sqrt{\frac{1052}{4208}}$, $\sqrt[5]{\frac{1}{2}}$

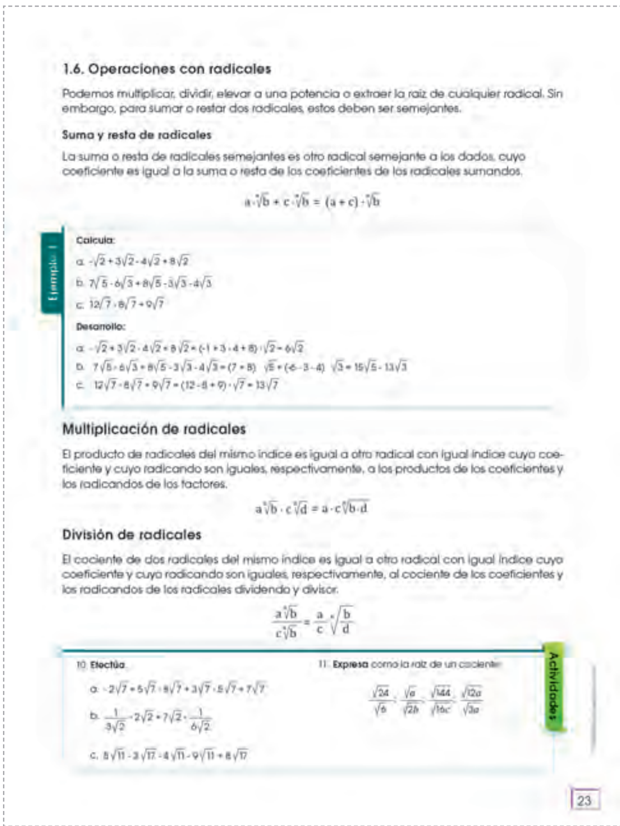
9. **Agrupa** las expresiones radicales semejantes.

$4\sqrt[3]{2}$; $-2\sqrt{5}$; $6\sqrt{5}$; $7\sqrt[4]{3}$; $-6\sqrt[3]{2}$

Prohibida su reproducción

22

Página 23



1.6. Operaciones con radicales

Podemos multiplicar, dividir, elevar a una potencia o extraer la raíz de cualquier radical. Sin embargo, para sumar o restar dos radicales, estos deben ser semejantes.

Suma y resta de radicales

La suma o resta de radicales semejantes es otro radical semejante a los dados, cuyo coeficiente es igual a la suma o resta de los coeficientes de los radicales sumandos.

$$a\cdot\sqrt[n]{b} + c\cdot\sqrt[n]{b} = (a+c)\cdot\sqrt[n]{b}$$

Ejemplo 1

Calcula:

a. $-\sqrt{2}+3\sqrt{2}-4\sqrt{2}+8\sqrt{2}$

b. $7\sqrt{5}-6\sqrt{3}+8\sqrt{5}-3\sqrt{3}-4\sqrt{3}$

c. $12\sqrt{7}-8\sqrt{7}+9\sqrt{7}$

Desarrollo:

a. $-\sqrt{2}+3\sqrt{2}-4\sqrt{2}+8\sqrt{2} = (-1+3-4+8)\cdot\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

b. $7\sqrt{5}-6\sqrt{3}+8\sqrt{5}-3\sqrt{3}-4\sqrt{3} = (7+8)\sqrt{5}+(-6-3-4)\sqrt{3} = 15\sqrt{5}-13\sqrt{3}$

c. $12\sqrt{7}-8\sqrt{7}+9\sqrt{7} = (12-8+9)\cdot\sqrt{7} = 13\sqrt{7}$

Multiplicación de radicales

El producto de radicales del mismo índice es igual a otro radical con igual índice cuyo coeficiente y cuyo radicando son iguales, respectivamente, a los productos de los coeficientes y los radicandos de los factores.

$$a\sqrt[n]{b}\cdot c\sqrt[n]{d} = a\cdot c\sqrt[n]{b\cdot d}$$

División de radicales

El cociente de dos radicales del mismo índice es igual a otro radical con igual índice cuyo coeficiente y cuyo radicando son iguales, respectivamente, al cociente de los coeficientes y los radicandos de los radicales dividendo y divisor.

$$\frac{a\sqrt[n]{b}}{c\sqrt[n]{d}} = \frac{a}{c}\sqrt[n]{\frac{b}{d}}$$

Actividades

10. **Efectúa**

a. $-2\sqrt{7}+5\sqrt{7}-8\sqrt{7}+3\sqrt{7}-5\sqrt{7}+7\sqrt{7}$

b. $\frac{1}{3\sqrt{2}}-2\sqrt{2}+7\sqrt{2}-\frac{1}{6\sqrt{2}}$

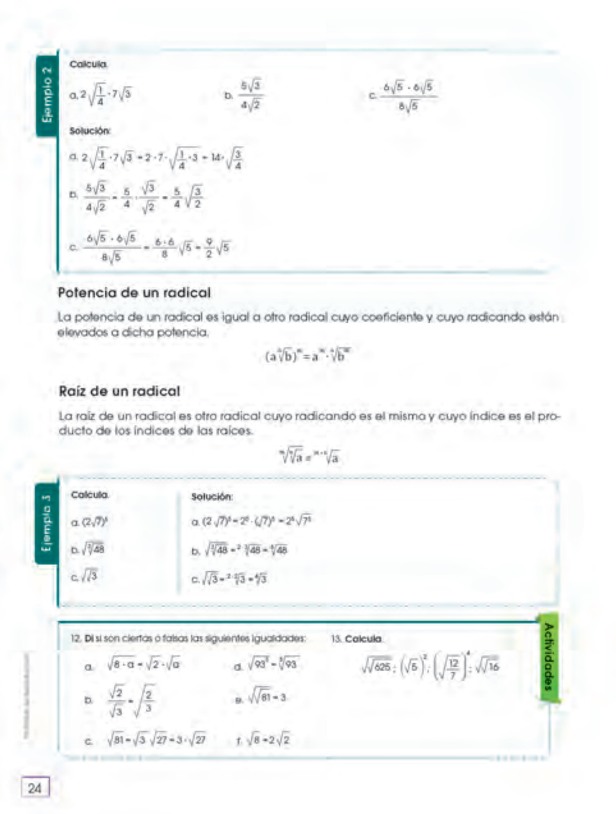
c. $5\sqrt{11}-3\sqrt{17}-4\sqrt{11}-9\sqrt{11}+8\sqrt{17}$

11. **Expresa** como la raíz de un cociente

$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}$; $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2b}}$; $\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{16c}}$; $\frac{\sqrt{12a}}{\sqrt{3a}}$

23

Página 24


Calcula.

a. $2\sqrt{\frac{1}{4}}\cdot 7\sqrt{3}$ b. $\frac{5\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$ c. $\frac{6\sqrt{5}\cdot 6\sqrt{5}}{8\sqrt{5}}$

Solución:

a. $2\sqrt{\frac{1}{4}}\cdot 7\sqrt{3} = 2\cdot 7\cdot\sqrt{\frac{1}{4}\cdot 3} = 14\cdot\sqrt{\frac{3}{4}}$

b. $\frac{5\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = \frac{5}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{5}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}$

c. $\frac{6\sqrt{5}\cdot 6\sqrt{5}}{8\sqrt{5}} = \frac{6\cdot 6}{8}\sqrt{5} = \frac{9}{2}\sqrt{5}$

Potencia de un radical

La potencia de un radical es igual a otro radical cuyo coeficiente y cuyo radicando están elevados a dicha potencia.

$$(a\sqrt[n]{b})^m = a^m\cdot\sqrt[n]{b^m}$$

Raíz de un radical

La raíz de un radical es otro radical cuyo radicando es el mismo y cuyo índice es el producto de los índices de las raíces.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$$

Calcula.

a. $(2\sqrt{7})^5$ b. $\sqrt{\sqrt[3]{48}}$ c. $\sqrt{\sqrt{3}}$

Solución:

a. $(2\sqrt{7})^5 = 2^5\cdot(\sqrt{7})^5 = 2^5\sqrt{7^5}$

b. $\sqrt{\sqrt[3]{48}} = \sqrt[2\cdot 3]{48} = \sqrt[6]{48}$

c. $\sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt[2\cdot 2]{3} = \sqrt[4]{3}$

12. Di si son ciertas o falsas las siguientes igualdades:

a. $\sqrt{8\cdot a} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{a}$ d. $\sqrt{93^3} = \sqrt[5]{93}$

b. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ e. $\sqrt{\sqrt{81}} = 3$

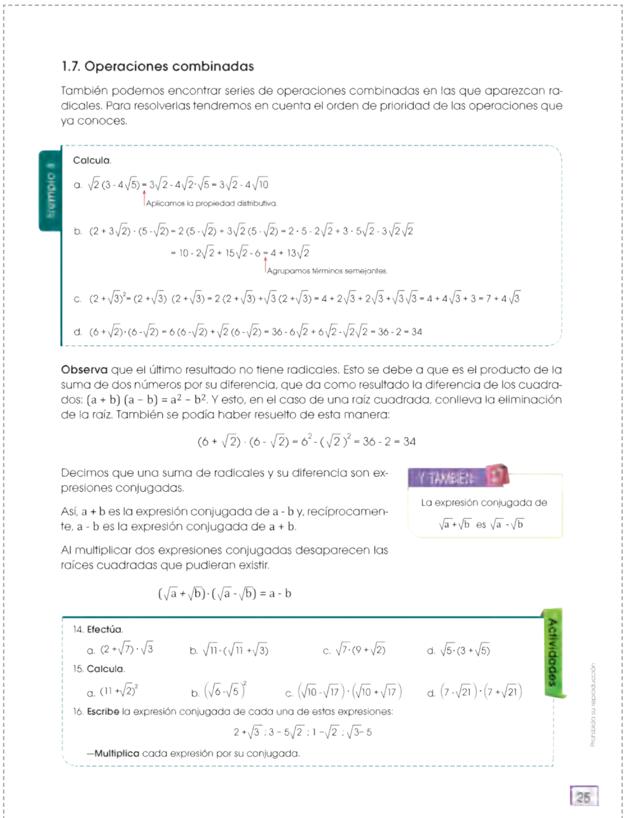
c. $\sqrt{81} = \sqrt{3}\sqrt{27} = 3\cdot\sqrt{27}$ f. $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

13. Calcula.

$\sqrt{\sqrt{625}}$; $(\sqrt{5})^2$; $\left(\sqrt{\frac{12}{7}}\right)^4$; $\sqrt{\sqrt{16}}$

24

Página 25


1.7. Operaciones combinadas

También podemos encontrar series de operaciones combinadas en las que aparezcan radicales. Para resolverlas tendremos en cuenta el orden de prioridad de las operaciones que ya conoces.

Calcula.

a. $\sqrt{2}(3-4\sqrt{5}) = 3\sqrt{2}-4\sqrt{2}\cdot\sqrt{5} = 3\sqrt{2}-4\sqrt{10}$

Aplicamos la propiedad distributiva.

b. $(2+3\sqrt{2})\cdot(5-\sqrt{2}) = 2(5-\sqrt{2})+3\sqrt{2}(5-\sqrt{2}) = 2\cdot 5-2\sqrt{2}+3\cdot 5\sqrt{2}-3\sqrt{2}\sqrt{2}$

$= 10-2\sqrt{2}+15\sqrt{2}-6 = 4+13\sqrt{2}$

Agrupamos términos semejantes.

c. $(2+\sqrt{3})^2 = (2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 2(2+\sqrt{3})+\sqrt{3}(2+\sqrt{3}) = 4+2\sqrt{3}+2\sqrt{3}+\sqrt{3}\sqrt{3} = 4+4\sqrt{3}+3 = 7+4\sqrt{3}$

d. $(6+\sqrt{2})\cdot(6-\sqrt{2}) = 6(6-\sqrt{2})+\sqrt{2}(6-\sqrt{2}) = 36-6\sqrt{2}+6\sqrt{2}-\sqrt{2}\sqrt{2} = 36-2 = 34$

Observa que el último resultado no tiene radicales. Esto se debe a que es el producto de la suma de dos números por su diferencia, que da como resultado la diferencia de los cuadrados: $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$. Y esto, en el caso de una raíz cuadrada, conlleva la eliminación de la raíz. También se podía haber resuelto de esta manera:

$$(6+\sqrt{2})\cdot(6-\sqrt{2}) = 6^2-(\sqrt{2})^2 = 36-2 = 34$$

Decimos que una suma de radicales y su diferencia son expresiones conjugadas.

Así, a + b es la expresión conjugada de a - b y, recíprocamente, a - b es la expresión conjugada de a + b.

Al multiplicar dos expresiones conjugadas desaparecen las raíces cuadradas que pudieran existir.

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a-b$$

Y TAMBIÉN: La expresión conjugada de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ es $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

14. **Efectúa**.

a. $(2+\sqrt{7})\cdot\sqrt{3}$ b. $\sqrt{11}\cdot(\sqrt{11}+\sqrt{3})$ c. $\sqrt{7}\cdot(9+\sqrt{2})$ d. $\sqrt{5}\cdot(3+\sqrt{5})$

15. **Calcula**.

a. $(11+\sqrt{2})^2$ b. $(\sqrt{6}-\sqrt{5})^2$ c. $(\sqrt{10}-\sqrt{17})\cdot(\sqrt{10}+\sqrt{17})$ d. $(7-\sqrt{21})\cdot(7+\sqrt{21})$

16. **Escribe** la expresión conjugada de cada una de estas expresiones:

$2+\sqrt{3}$; $3-5\sqrt{2}$; $1-\sqrt{2}$; $\sqrt{3}-5$

—**Multiplica** cada expresión por su conjugada.

25

Actividades complementarias

Indique a los estudiantes que deben extraer todos los factores posibles fuera de los radicales:

a. $\sqrt[4]{a^{12}}$ b. $\sqrt[5]{a^{10}b^5c^6}$

c. $\sqrt[3]{324}$ d. $\sqrt[3]{81a^4b^2}$

e. $\sqrt[4]{a^5b^7}$ f. $\sqrt[4]{16a^4b^8c^{12}}$

Solucionario

12. Las igualdades verdaderas son «b», «e» y «f».

13. $\sqrt{\sqrt{625}} = \sqrt{25} = 5$

$(\sqrt{5})^2 = 5$

$\left(\sqrt{\frac{12}{7}}\right)^4 = \left(\frac{12}{7}\right)^2 = \frac{144}{49}$

$\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = 2$

Solucionario

14. a. $2\sqrt{3}+\sqrt{21}$ b. $11+\sqrt{33}$

c. $9\sqrt{7}+\sqrt{14}$ d. $3\sqrt{5}+5$

15. a. $123+22\sqrt{2}$ b. $11-2\sqrt{30}$

c. $(\sqrt{10})^2-(\sqrt{17})^2 = -7\text{d}\cdot 49-21 = 28$

16. $2+\sqrt{3}$, su conjugada es $2-\sqrt{3} \rightarrow (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$

$= 2^2-(\sqrt{3})^2 = 4-3 = 1$

$\sqrt{3}-5\sqrt{2}$ su conjugada es $\sqrt{3}+5\sqrt{2} \rightarrow (\sqrt{3}-5\sqrt{2})(\sqrt{3}+5\sqrt{2})$

$= (\sqrt{3})^2-(5\cdot\sqrt{2})^2 = 3-25\cdot 2 = -47$

$1-\sqrt{2}$, conjugada $1+\sqrt{2} \rightarrow (1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) = 1-2 = -1$

$\sqrt{3}-5$, conjudaga $\sqrt{3}+5 \rightarrow (\sqrt{3}+5)(\sqrt{3}-5) = 3-25 = -22$

Actividades complementarias

Para este tema se resume al final de la página las propiedades de la potenciación de números reales, a partir de operaciones con potencias.

El profesor o profesora puede proponer una actividad complementaria, semejante a la que se propone más abajo, aplicando la técnica estructura 1-2-4: A grupos de cuatro personas, el profesor o profesora facilitará una plantilla a cada miembro del grupo con tres recuadros para que los estudiantes anoten las sucesivas respuestas. En la situación 1, cada miembro del grupo piensa cuál es la respuesta correcta a la pregunta y la anota en el primer recuadro. En la situación 2 los estudiantes trabajan en parejas, intercambian sus respuestas y las comentan para extraer una única respuesta que anotan en el segundo recuadro. En la situación 3, se reúne todo el grupo y se muestran las respuestas de las dos parejas, entre todos deben componer la respuesta o solución final.

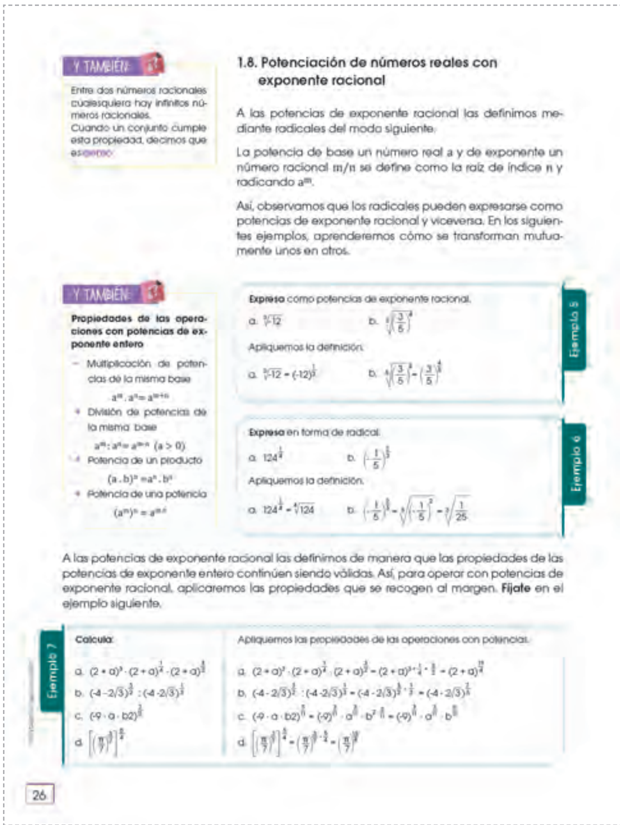
Ejercicio:

Expresa en forma de una sola potencia con exponente positivo:

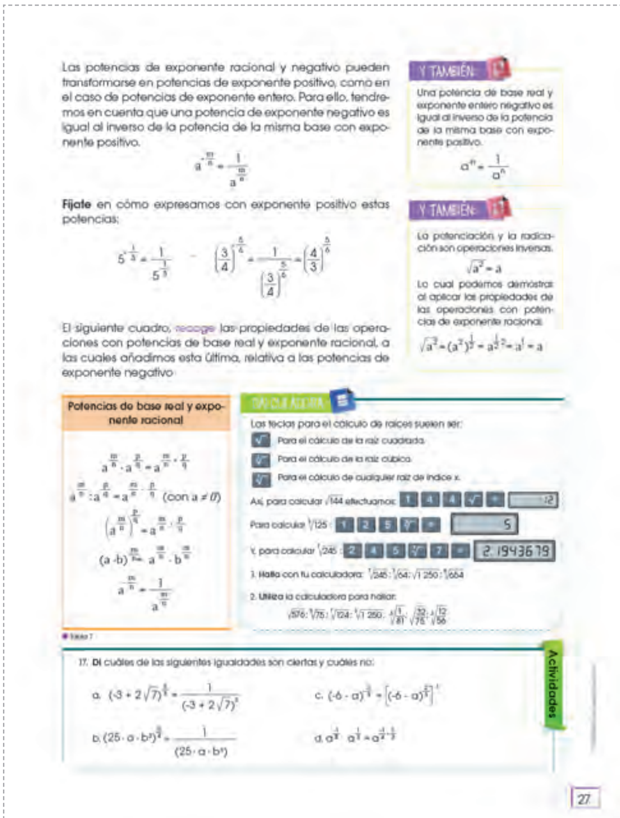
$$\left(\frac{-1}{2}\right)^{-5}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)7\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)^{-5}$$

$$\left[\left(\frac{-4}{3}\right)^{8}\cdot\left(\frac{-4}{3}\right)^{-3}\right]:\left[\left(\frac{-4}{3}\right)^{5}\right]^{2}$$

Página 26



Página 27



Solucionario

17. a. $\left(-3+2\sqrt{7}\right)^{\frac{5}{2}}=\sqrt[3]{\left(-3+2\sqrt{7}\right)^{5}}$, por tanto es falsa

b. Las igualdades que son ciertas son la b y c

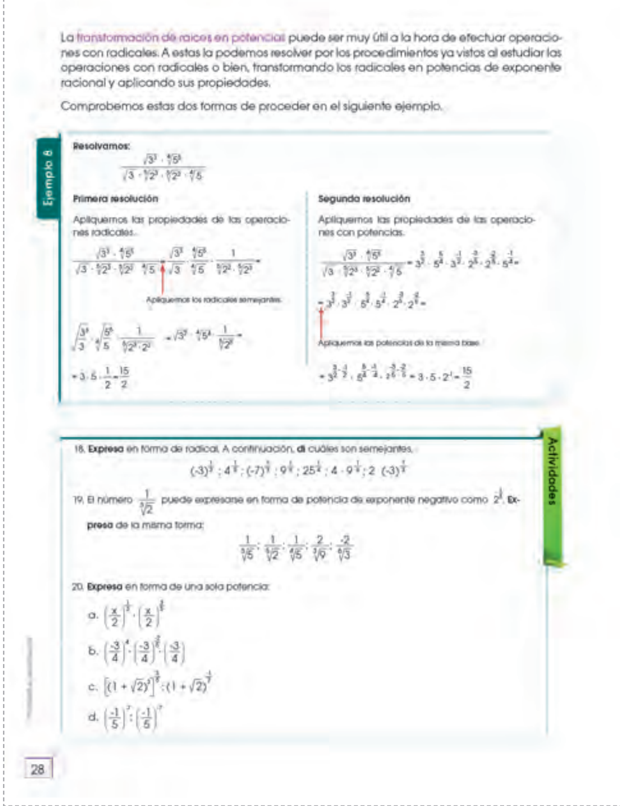
$\sqrt[3]{-3};\sqrt[5]{4};\sqrt[3]{-7};\sqrt[6]{9};\sqrt[4]{5^2};4\sqrt[6]{9};2\sqrt[3]{-3}$

c. $\sqrt[3]{-3}$ y $2\sqrt[3]{-3}$ y $\sqrt[6]{9}$ y $4\sqrt[6]{9}$

Son radicales semejantes:

d. $5^{-1/3};2^{-1/5};5^{-1/4};\left(8/9\right)^{1/3};\left(-8/9\right)^{1/3}$

Página 28


La transformación de raíces en potencias puede ser muy útil a la hora de efectuar operaciones con radicales. A estas la podemos resolver por los procedimientos ya vistos al estudiar las operaciones con radicales o bien, transformando los radicales en potencias de exponente racional y aplicando sus propiedades.

Comprobemos estas dos formas de proceder en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8

Resolvamos:

Primera resolución

Apliquemos las propiedades de las operaciones radicales.

Apliquemos los radicales semejantes.

$= 3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$

Segunda resolución

Apliquemos las propiedades de las operaciones con potencias.

Apliquemos las potencias de la misma base.

$= 3 \cdot 5 \cdot 2^{-1} = \frac{15}{2}$

Actividades

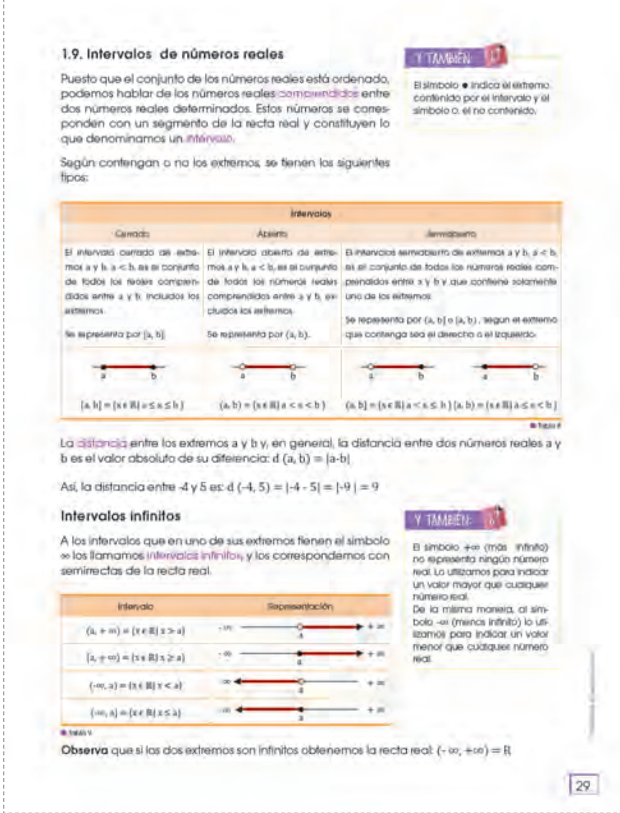
18. **Expresa** en forma de radical. A continuación, **di** cuáles son semejantes.

19. El número $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ puede expresarse en forma de potencia de exponente negativo como $2^{-\frac{1}{3}}$. **Expresa** de la misma forma:

20. **Expresa** en forma de una sola potencia:

28

Página 29


1.9. Intervalos de números reales

Puesto que el conjunto de los números reales está ordenado, podemos hablar de los números reales comprendidos entre dos números reales determinados. Estos números se corresponden con un segmento de la recta real y constituyen lo que denominamos un intervalo.

Según contengan o no los extremos, se tienen los siguientes tipos:

Y TAMBIÉN: El símbolo ● indica el extremo contenido por el intervalo y el símbolo o, el no contenido.

Intervalos		
Cerrado	Abierto	Semiabierto
El intervalo cerrado de extremos a y b, a < b, es el conjunto de todos los reales comprendidos entre a y b, incluidos los extremos. Se representa por [a, b].	El intervalo abierto de extremos a y b, a < b, es el conjunto de todos los números reales comprendidos entre a y b, excluidos los extremos. Se representa por (a, b).	El intervalo semiabierto de extremos a y b, a < b, es el conjunto de todos los números reales comprendidos entre a y b y que contiene solamente uno de los extremos. Se representa por (a, b] o [a, b), según el extremo que contenga sea el derecho o el izquierdo.
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$	$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$ $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$

La distancia entre los extremos a y b y, en general, la distancia entre dos números reales a y b es el valor absoluto de su diferencia: d (a, b) = |a-b|

Así, la distancia entre -4 y 5 es: d (-4, 5) = |-4 - 5| = |-9| = 9

Intervalos infinitos

A los intervalos que en uno de sus extremos tienen el símbolo ∞ los llamamos intervalos infinitos, y los correspondemos con semirrectas de la recta real.

Intervalo	Representación
$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	
$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge a\}$	
$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	
$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le a\}$	

Y TAMBIÉN: El símbolo +∞ (más infinito) no representa ningún número real. Lo utilizamos para indicar un valor mayor que cualquier número real. De la misma manera, el símbolo -∞ (menos infinito) lo utilizamos para indicar un valor menor que cualquier número real.

Observa que si los dos extremos son infinitos obtenemos la recta real: $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

29

Solucionario

20. a. $\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{5}} = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}+\frac{3}{5}} = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{14}{15}}$

b. $\left(\frac{-3}{4}\right)^{4+\frac{-2}{5}+1} = \left(\frac{-3}{4}\right)^{\frac{23}{5}}$

c. $\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{3}\right]^{\frac{3}{5}} = \left[\left(1+\sqrt{2}\right)\right]^{\frac{9}{5}}$

$\left[\left(1+\sqrt{2}\right)\right]^{\frac{9}{5}} : \left(1+\sqrt{2}\right)^{\frac{-1}{2}} = \left(1+\sqrt{2}\right)^{\frac{9}{5}-\frac{-1}{2}} = \left(1+\sqrt{2}\right)^{\frac{23}{10}}$

d. $\left(\frac{-1}{5}\right)^{-7-(-7)} = \left(\frac{-1}{5}\right)^{-7+7} = 1$

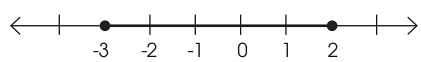
Orientación didáctica

Para anticipar posibles dificultades en este tema, el profesor o profesora debe hacer énfasis en el uso correcto de la simbología y el vocabulario matemático, y puede reforzarlo mediante ejercicios de forma oral, presentando intervalos representados de forma gráfica y que los estudiantes sean capaces de identificar qué tipo de intervalo es y cómo lo define, o de forma contraria, mostrar varios intervalos finitos infinitos y que algunos estudiantes pasen al pizarrón y los representen gráficamente.

Actividades Complementarias

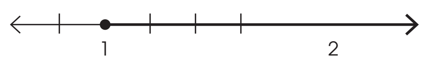
Pida a los estudiantes que escriban como intervalo el conjunto definido sobre la recta real.

a.



b.

c.

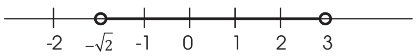


Solucionario

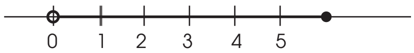
21. Basta con representarlos gráficamente y escribirlos de izquierda (menor) a derecha (mayor).

Por lo tanto: $-\sqrt{2} < -1 < 1/3 < \sqrt{3} < \pi < 9$

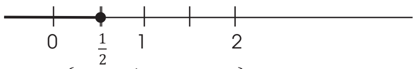
22. $\left(-2{,}3\right)=\left\{\chi \in R - \sqrt{2} < \chi\, 3\right\}$



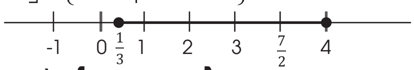
$\left(0{,}5\right]=\left\{\chi \in \mathbb{R} \middle| 0 < \chi \leq 5\right\}$



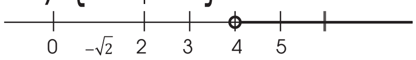
$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right] - \left\{\chi \in \mathbb{R} \middle| \chi \leq \frac{1}{2}\right\}$



$\left[\frac{1}{3}, \frac{7}{2}\right] = \left\{\chi \in \mathbb{R} \middle| \frac{1}{3} \leq \chi \leq \frac{7}{2}\right\}$



$\left(4, +\infty\right) = \left\{\chi \in \mathbb{R} \middle| \chi > 4\right\}$



23. a. Son los reales comprendidos entre - 4 y 7 sin incluir a los extremos, o sea, es el intervalo abierto (- 4, 7).

b. Son los números reales mayores que 2, incluido el 2, luego es (2, + ∞).

c. Son los reales mayores o iguales que - 6 y menores que 5, o sea, (- 6, 5).

$A \cup B = \left(-4{,}7\right) \cup \left[2, +\infty\right) = \left(-4, +\infty\right)$

$A \cup C = \left(-4{,}7\right) \cup \left[-6{,}5\right) = \left[-6{,}7\right)$

$B \cup C = \left[2, +\infty\right) \cup \left[-6{,}5\right) = \left[-6, +\infty\right)$

$A \cap B = \left(-4{,}7\right) \cap \left[2, +\infty\right) = \left(2{,}7\right)$

$A \cap C = \left(-4{,}7\right) \cap \left[-6{,}5\right) = \left[-6{,}5\right)$

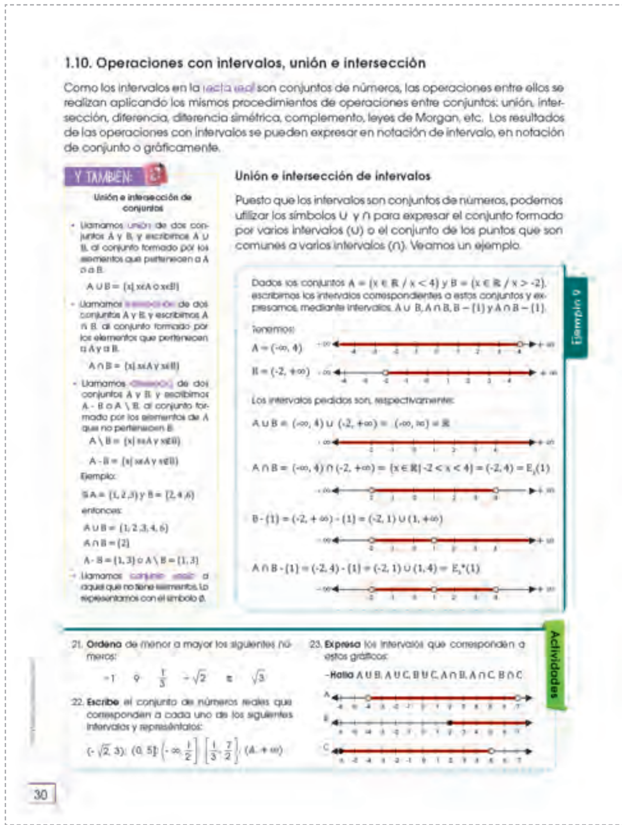
$B \cap C = \left[2, +\infty\right) \cap \left[-6{,}5\right) = \left[2{,}5\right)$

Solucionario

24. a. (-4; 3) b. (-2; 1) c. (-1; 0) d. (-∞; 1)
e) (-6, 9) f) ∅ g) (-2;7) h)(-∞;4)

25. a. (-3; 12) b. (-1;10) c.(-3;-1)
d. (10; 12) e) ∅ f)∅

Página 30



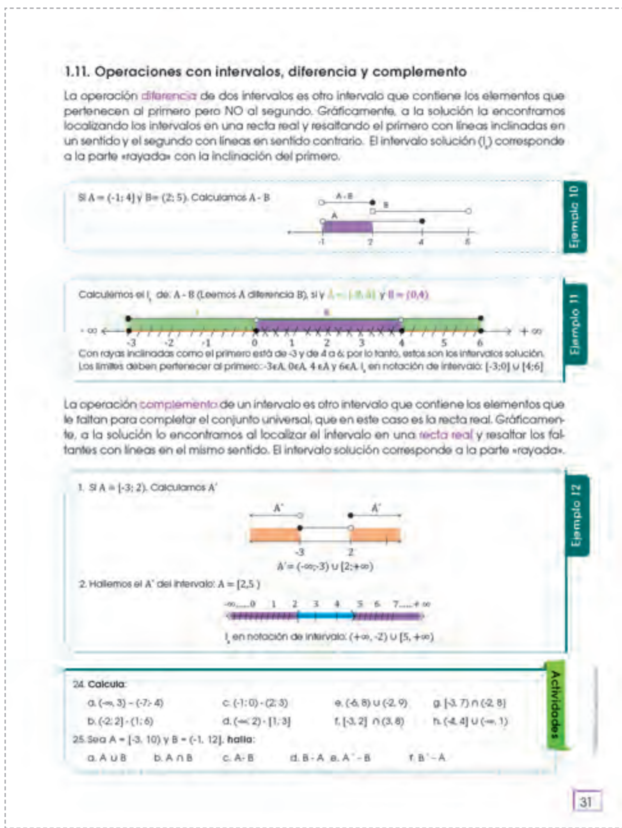
1.10. Operaciones con intervalos, unión e intersección

Como los intervalos en la recta real son conjuntos de números, las operaciones entre ellos se realizan aplicando los mismos procedimientos de operaciones entre conjuntos: unión, intersección, diferencia, diferencia simétrica, complemento, leyes de Morgan, etc. Los resultados de las operaciones con intervalos se pueden expresar en notación de intervalo, en notación de conjunto o gráficamente.

Unión e intersección de intervalos

Puesto que los intervalos son conjuntos de números, podemos utilizar los símbolos ∪ y ∩ para expresar el conjunto formado por varios intervalos (∪) o el conjunto de los puntos que son comunes a varios intervalos (∩). Veamos un ejemplo.

Página 31

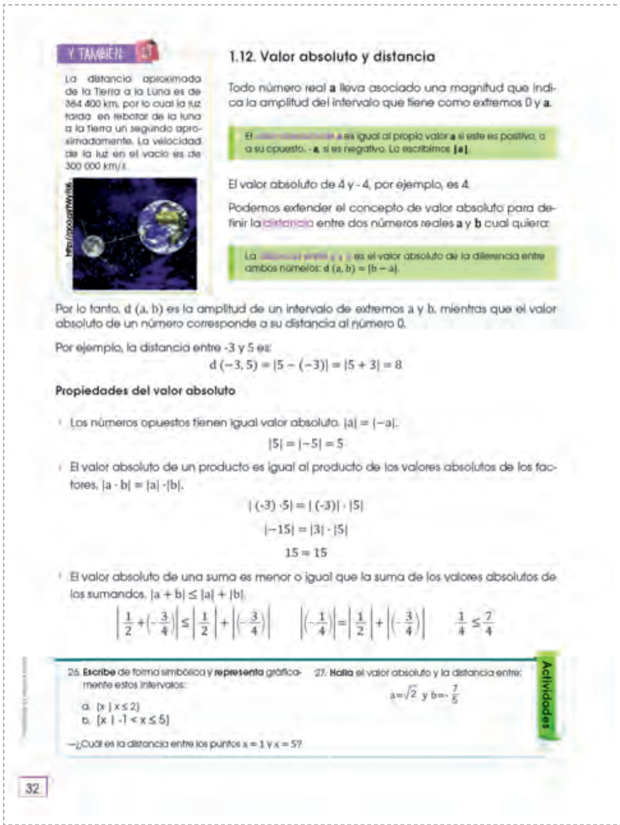


1.11. Operaciones con intervalos, diferencia y complemento

La operación diferencia de dos intervalos es otro intervalo que contiene los elementos que pertenecen al primero pero NO al segundo. Gráficamente, a la solución la encontramos localizando los intervalos en una recta real y resaltando el primero con líneas inclinadas en un sentido y el segundo con líneas en sentido contrario. El intervalo solución corresponde a la parte «rayada» con la inclinación del primero.

La operación complemento de un intervalo es otro intervalo que contiene los elementos que le faltan para completar el conjunto universal, que en este caso es la recta real. Gráficamente, a la solución lo encontramos al localizar el intervalo en una recta real y resaltar los faltantes con líneas en el mismo sentido. El intervalo solución corresponde a la parte «rayada».

Página 32


Y TAMBIÉN

La distancia aproximada de la Tierra a la Luna es de 384 400 km, por lo cual la luz tarda en rebotar de la luna a la Tierra un segundo aproximadamente. La velocidad de la luz en el vacío es de 300 000 km/s.

1.12. Valor absoluto y distancia

Todo número real **a** lleva asociado una magnitud que indica la amplitud del intervalo que tiene como extremos 0 y **a**.

El [illegible] es igual al propio valor **a** si este es positivo, o a su opuesto, **-a**, si es negativo. Lo escribimos **|a|**.

El valor absoluto de 4 y -4, por ejemplo, es 4.

Podemos extender el concepto de valor absoluto para definir la [illegible] entre dos números reales **a** y **b** cual quiera:

La [illegible] es el valor absoluto de la diferencia entre ambos números: d (a, b) = |b − a|.

Por lo tanto, d (a, b) es la amplitud de un intervalo de extremos a y b, mientras que el valor absoluto de un número corresponde a su distancia al número 0.

Por ejemplo, la distancia entre -3 y 5 es:

$$d(-3,5) = |5-(-3)| = |5+3| = 8$$

Propiedades del valor absoluto

- Los números opuestos tienen igual valor absoluto. $|a| = |-a|$.
  $|5| = |-5| = 5$
- El valor absoluto de un producto es igual al producto de los valores absolutos de los factores. $|a\cdot b| = |a|\cdot|b|$.
  $|(-3)\cdot 5| = |(-3)|\cdot|5|$
  $|-15| = |3|\cdot|5|$
  $15 = 15$
- El valor absoluto de una suma es menor o igual que la suma de los valores absolutos de los sumandos. $|a+b| \le |a|+|b|$.
  $\left|\frac{1}{2}+\left(-\frac{3}{4}\right)\right| \le \left|\frac{1}{2}\right|+\left|\left(-\frac{3}{4}\right)\right| \quad \left|\left(-\frac{1}{4}\right)\right| = \left|\frac{1}{2}\right|+\left|\left(-\frac{3}{4}\right)\right| \quad \frac{1}{4} \le \frac{7}{4}$

Actividades

26. **Escribe** de forma simbólica y **representa** gráficamente estos intervalos:
a. {x | x ≤ 2}
b. {x | -1 < x ≤ 5}
—¿Cuál es la distancia entre los puntos x = 1 y x = 5?

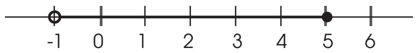
27. **Halla** el valor absoluto y la distancia entre: $a=\sqrt{2}$ y $b=-\frac{7}{5}$

32

Solucionario

26. a. $\left\{x/_{x} \le 2\right\} \to (-\infty,2]$

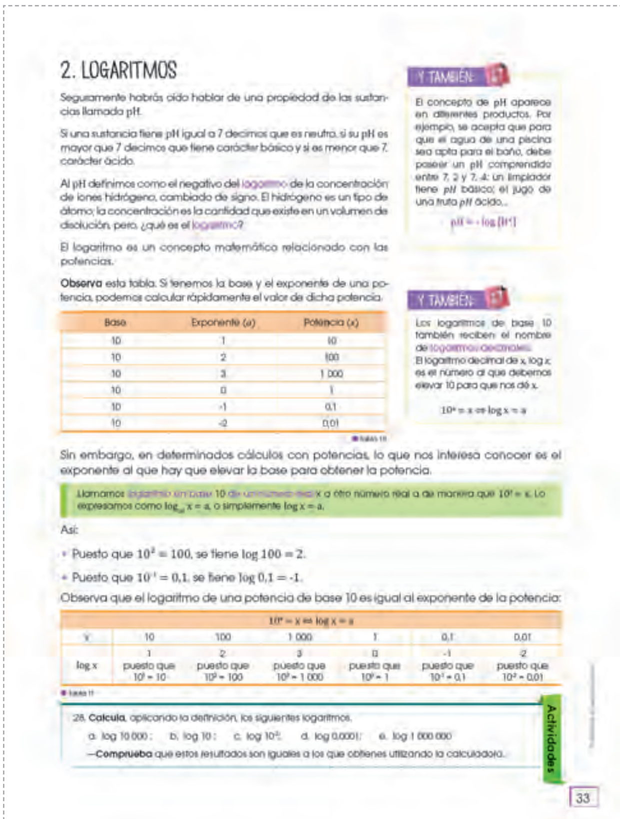
a) $\left\{x/_{-1} < x \le 5\right\} \to (-1,5]$



Aplicamos lo siguiente: $d(a,b\cdot = |b-a| \to d(1,5) = |5-1|$

27. $|a| = \sqrt{2}, |b| = 7/_5, d(a,b\cdot = 2.8)$

Página 33


2. LOGARITMOS

Seguramente habrás oído hablar de una propiedad de las sustancias llamada pH.

Si una sustancia tiene pH igual a 7 decimos que es neutra, si su pH es mayor que 7 decimos que tiene carácter básico y si es menor que 7, carácter ácido.

Al pH definimos como el negativo del logaritmo de la concentración de iones hidrógeno, cambiado de signo. El hidrógeno es un tipo de átomo; la concentración es la cantidad que existe en un volumen de disolución, pero, ¿qué es el logaritmo?

El logaritmo es un concepto matemático relacionado con las potencias.

Observa esta tabla. Si tenemos la base y el exponente de una potencia, podemos calcular rápidamente el valor de dicha potencia.

Base	Exponente (a)	Potencia (x)
10	1	10
10	2	100
10	3	1 000
10	0	1
10	-1	0,1
10	-2	0,01

Tabla 10

Y TAMBIÉN

El concepto de pH aparece en diferentes productos. Por ejemplo, se acepta que para que el agua de una piscina sea apta para el baño, debe poseer un pH comprendido entre 7, 2 y 7, 4; un limpiador tiene pH básico; el jugo de una fruta pH ácido...

pH = - log [H⁺]

Y TAMBIÉN

Los logaritmos de base 10 también reciben el nombre de logaritmos decimales. El logaritmo decimal de x, log x, es el número al que debemos elevar 10 para que nos dé x.

$10^a = x \Leftrightarrow \log x = a$

Sin embargo, en determinados cálculos con potencias, lo que nos interesa conocer es el exponente al que hay que elevar la base para obtener la potencia.

Llamamos logaritmo en base 10 de un número real x a otro número real a de manera que $10^a = x$. Lo expresamos como $\log_{10} x = a$, o simplemente $\log x = a$.

Así:

- Puesto que $10^2 = 100$, se tiene $\log 100 = 2$.
- Puesto que $10^{-1} = 0,1$, se tiene $\log 0,1 = -1$.

Observa que el logaritmo de una potencia de base 10 es igual al exponente de la potencia:

$10^a = x \Leftrightarrow \log x = a$						
x	10	100	1 000	1	0,1	0,01
log x	1 puesto que $10^1 = 10$	2 puesto que $10^2 = 100$	3 puesto que $10^3 = 1\,000$	0 puesto que $10^0 = 1$	-1 puesto que $10^{-1} = 0,1$	-2 puesto que $10^{-2} = 0,01$

Tabla 11

Actividades

28. **Calcula**, aplicando la definición, los siguientes logaritmos.
a. log 10 000; b. log 10; c. log 10^{-2}; d. log 0,0001; e. log 1 000 000
—**Comprueba** que estos resultados son iguales a los que obtienes utilizando la calculadora.

33

Orientación didáctica

Asegúrese de que los estudiantes entienden bien el concepto de logaritmo decimal. Para ello, se recomienda que, además de resolver varias potencias de 10, se recuerden las propiedades de potencias de exponente racional, estudiadas en páginas anteriores.

Actividades Complementarias

121 ➔ 43

231 ➔ 64

313 ➔ 74

435 ➔ 128

544 ➔ 4

Piensa rápido:
Si 121 ➔ 43, 131 ➔ 64, 313 ➔ 74, 435 ➔128, el resultado de 544 ➔ ?

Solucionario

28. a. log 10 000=4 b. log 10=1

c. log 10-2 = -2 d. log 0,0001=-4

e. log 1 000 000 = 6

Orientación didáctica

Resolver varios ejemplos

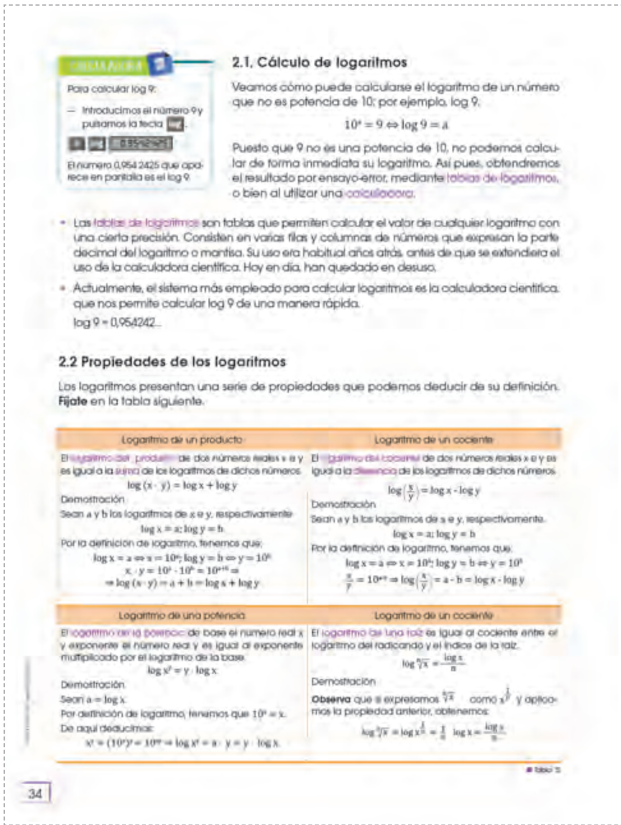
En esta página encontrarás la de¬mostración de la propiedad que se refiere al logaritmo del producto:

http://links.edebe.com/vrk

La demostración de la expresión del logaritmo de un cociente es análoga.

Se deben intentar demostrar cuáles son las expresiones del logaritmo de una potencia y del logaritmo de un radical, teniendo en cuenta que: la demostración que se refiere al logaritmo de una potencia es una consecuencia de la del logaritmo del producto. Se puede utilizar que *(x n)n = x* y la expresión del logaritmo de la potencia para demostrar la del logaritmo de un radical.

Página 34



2.1. Cálculo de logaritmos

Veamos cómo puede calcularse el logaritmo de un número que no es potencia de 10; por ejemplo, log 9.

$10^a = 9 \Leftrightarrow \log 9 = a$

Puesto que 9 no es una potencia de 10, no podemos calcular de forma inmediata su logaritmo. Así pues, obtendremos el resultado por ensayo-error, mediante tablas de logaritmos, o bien al utilizar una calculadora.

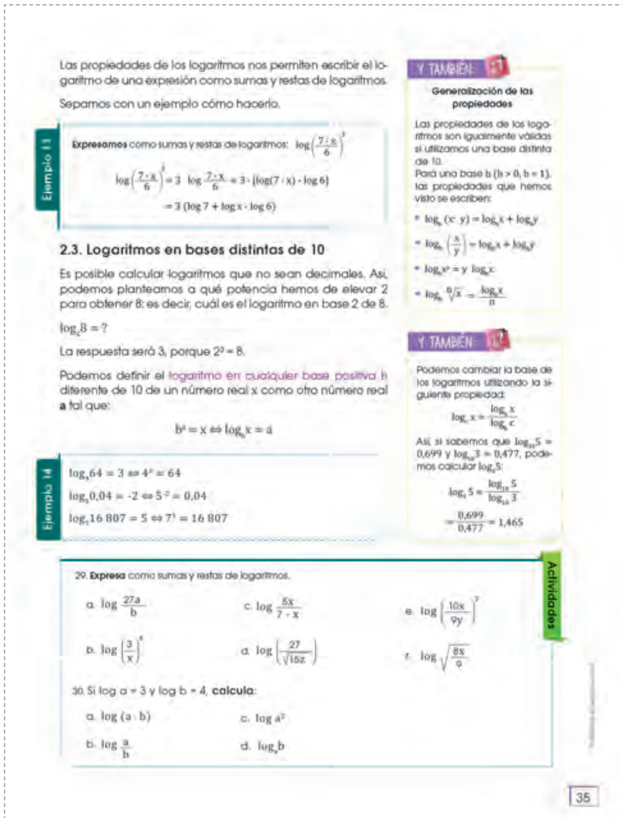
- Las tablas de logaritmos son tablas que permiten calcular el valor de cualquier logaritmo con una cierta precisión. Consisten en varias filas y columnas de números que expresan la parte decimal del logaritmo o mantisa. Su uso era habitual años atrás, antes de que se extendiera el uso de la calculadora científica. Hoy en día, han quedado en desuso.
- Actualmente, el sistema más empleado para calcular logaritmos es la calculadora científica, que nos permite calcular log 9 de una manera rápida.

log 9 = 0,954242...

2.2 Propiedades de los logaritmos

Los logaritmos presentan una serie de propiedades que podemos deducir de su definición. **Fíjate** en la tabla siguiente.

Página 35



Las propiedades de los logaritmos nos permiten escribir el logaritmo de una expresión como sumas y restas de logaritmos.

Veamos con un ejemplo cómo hacerlo.

2.3. Logaritmos en bases distintas de 10

Es posible calcular logaritmos que no sean decimales. Así, podemos plantearnos a qué potencia hemos de elevar 2 para obtener 8; es decir, cuál es el logaritmo en base 2 de 8.

$\log_2 8 = ?$

La respuesta será 3, porque $2^3 = 8$.

Podemos definir el logaritmo en cualquier base positiva b diferente de 10 de un número real x como otro número real a tal que:

$b^a = x \Leftrightarrow \log_b x = a$

29. Expresa como sumas y restas de logaritmos.

30. Si log a = 3 y log b = 4, calcula:

Solucionario

29 a. $\left(\log 27+\log a\cdot-\log b\right)$

b. $5\left(\log 3-\log x\right)$

c. $\log 5x-\log\left(7-x\right)$

d. $\log 27-1/2\log 15z$

e. $2\left(\log 10x-\log 9y\right)$

f. $1/2\left(\log 8x-9\right)$

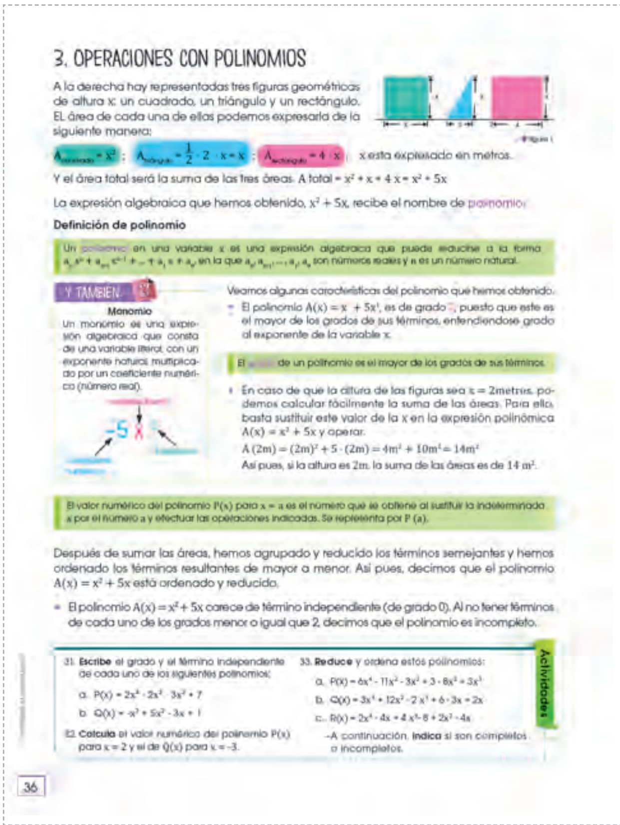
30. a. $\log (a\,.\,b.=\log a+\log b=3+4=7$

b. $\log\dfrac{a}{b}=\log a-\log b=3-4=-1$

c. c. $\log a^2=2\,.\log a=2\,.\,3=6$

d. $\log_a b=\log_3 4$

Página 36



3. OPERACIONES CON POLINOMIOS

A la derecha hay representadas tres figuras geométricas de altura x: un cuadrado, un triángulo y un rectángulo. El área de cada una de ellas podemos expresarla de la siguiente manera:

$A_{cuadrado} = x^2$; $A_{triángulo} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x = x$; $A_{rectángulo} = 4 \cdot x$; x esta expresado en metros.

Y el área total será la suma de las tres áreas. A total = $x^2 + x + 4x = x^2 + 5x$

La expresión algebraica que hemos obtenido, $x^2 + 5x$, recibe el nombre de polinomio.

Definición de polinomio

Un polinomio en una variable x es una expresión algebraica que puede reducirse a la forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, en la que $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ son números reales y n es un número natural.

Y TAMBIÉN: **Monomio**. Un monomio es una expresión algebraica que consta de una variable literal, con un exponente natural, multiplicado por un coeficiente numérico (número real).

Veamos algunas características del polinomio que hemos obtenido.

- El polinomio $A(x) = x^2 + 5x$, es de grado 2, puesto que este es el mayor de los grados de sus términos, entendiéndose grado al exponente de la variable x.

El grado de un polinomio es el mayor de los grados de sus términos.

- En caso de que la altura de las figuras sea x = 2metros, podemos calcular fácilmente la suma de las áreas. Para ello, basta sustituir este valor de x en la expresión polinómica $A(x) = x^2 + 5x$ y operar.

$A(2m) = (2m)^2 + 5 \cdot (2m) = 4m^2 + 10m^2 = 14m^2$

Así pues, si la altura es 2m, la suma de las áreas es de $14\ m^2$.

El valor numérico del polinomio P(x) para x = a es el número que se obtiene al sustituir la indeterminada x por el número a y efectuar las operaciones indicadas. Se representa por P (a).

Después de sumar las áreas, hemos agrupado y reducido los términos semejantes y hemos ordenado los términos resultantes de mayor a menor. Así pues, decimos que el polinomio $A(x) = x^2 + 5x$ está ordenado y reducido.

- El polinomio $A(x) = x^2 + 5x$ carece de término independiente (de grado 0). Al no tener términos de cada uno de los grados menor o igual que 2, decimos que el polinomio es incompleto.

Actividades

31. **Escribe** el grado y el término independiente de cada uno de los siguientes polinomios:
a. $P(x) = 2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 7$
b. $Q(x) = -x^3 + 5x^2 - 3x + 1$

32. **Calcula** el valor numérico del polinomio P(x) para x = 2 y el de Q(x) para x = -3.

33. **Reduce** y ordena estos polinomios:
a. $P(x) = 6x^4 - 11x^2 - 3x^2 + 3 \cdot 8x^2 + 3x^3$
b. $Q(x) = 3x^3 + 12x^2 - 2x^3 + 6 - 3x + 2x$
c. $R(x) = 2x^4 - 4x + 4x^3 - 8 + 2x^2 - 4x$

-A continuación, **indica** si son completos o incompletos.

36

Solucionario

31 a. $P(x) = 2x4 - 2x3 - 3x2 + 7$. El grado de este polinomio es 4 y su término independiente es 7

b. $Q(x) = -x3 + 5x2 - 3x + 1$

$P(2) = 2.\ 24 - 2.23 - 3.\ 22 + 7$

$= 2.16 - 2.8 - 3.4 + 7 = 32 - 16 - 12 + 7 = 11$

$Q(-3) = -(-3)3 + 5(-3)2 - 3(-3) + 1$

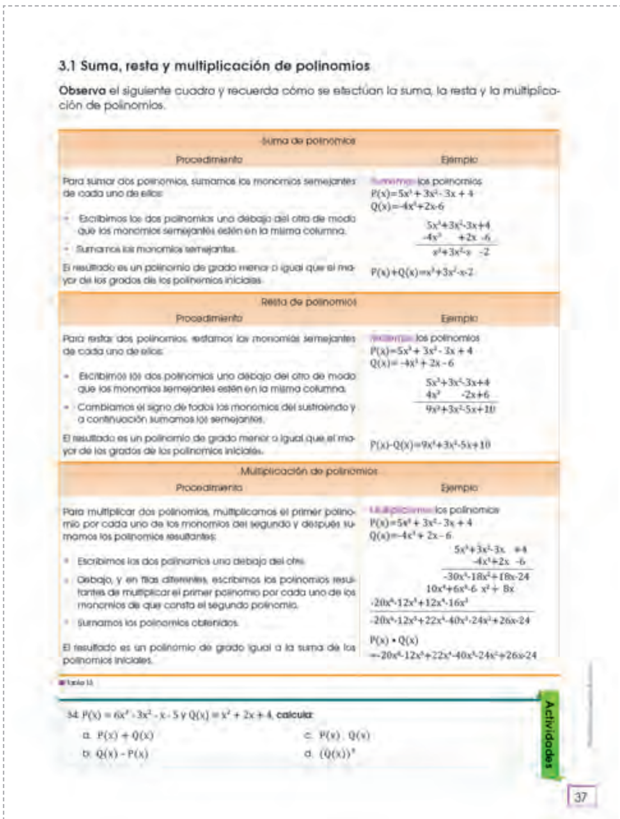
$= -(-27) + 5.9 + 9 + 1 = 82$

32. a $P(x) = 6x4 + 3x3 - 22x2 + 3$, es un polinomio incompleto.

b. $Q(x) = x3 + 12\ x2 - x + 6$, es un polinomio completo.

c. $R(x) = 2x4 + 4\ x3 + 2\ x2 - 8x - 8$, es un polinomio completo.

Página 37



3.1 Suma, resta y multiplicación de polinomios

Observa el siguiente cuadro y recuerda cómo se efectúan la suma, la resta y la multiplicación de polinomios.

Procedimiento	Ejemplo
Suma de polinomios	
Para sumar dos polinomios, sumamos los monomios semejantes de cada uno de ellos: • Escribimos los dos polinomios uno debajo del otro de modo que los monomios semejantes estén en la misma columna. • Sumamos los monomios semejantes. El resultado es un polinomio de grado menor o igual que el mayor de los grados de los polinomios iniciales.	Sumemos los polinomios $P(x) = 5x^3 + 3x^2 - 3x + 4$, $Q(x) = -4x^3 + 2x - 6$; $P(x) + Q(x) = x^3 + 3x^2 - x - 2$
Resta de polinomios	
Para restar dos polinomios, restamos los monomios semejantes de cada uno de ellos: • Escribimos los dos polinomios uno debajo del otro de modo que los monomios semejantes estén en la misma columna. • Cambiamos el signo de todos los monomios del sustraendo y a continuación sumamos los semejantes. El resultado es un polinomio de grado menor o igual que el mayor de los grados de los polinomios iniciales.	Restemos los polinomios $P(x) = 5x^3 + 3x^2 - 3x + 4$, $Q(x) = -4x^3 + 2x - 6$; $P(x) - Q(x) = 9x^3 + 3x^2 - 5x + 10$
Multiplicación de polinomios	
Para multiplicar dos polinomios, multiplicamos el primer polinomio por cada uno de los monomios del segundo y después sumamos los polinomios resultantes: • Escribimos los dos polinomios uno debajo del otro. • Debajo, y en filas diferentes, escribimos los polinomios resultantes de multiplicar el primer polinomio por cada uno de los monomios de que consta el segundo polinomio. • Sumamos los polinomios obtenidos. El resultado es un polinomio de grado igual a la suma de los grados de los polinomios iniciales.	Multipliquemos los polinomios $P(x) = 5x^3 + 3x^2 - 3x + 4$, $Q(x) = -4x^2 + 2x - 6$; $P(x) \cdot Q(x) = -20x^5 - 12x^4 + 22x^3 - 40x^2 - 24x^2 + 26x - 24$

Actividades

34. $P(x) = 6x^3 - 3x^2 - x - 5$ y $Q(x) = x^2 + 2x + 4$, **calcula**:
a. $P(x) + Q(x)$
b. $Q(x) - P(x)$
c. $P(x) \cdot Q(x)$
d. $(Q(x))^3$

37

Solucionario

34 a. $P(x) + Q(x) = 6x^3 - 3x^2 - x - 5 + x^2 + 2x + 4$

$= 6x^3 - 2x^2 + x - 1$

b. $Q(x) - P(x) = 6x^3 - 3x^2 - x - 5 - (x^2 + 2x + 4)$

$= 6x^3 - 3x^2 - x - 5 - x^2 - 2x - 4$

$= 6x^3 - 4x^2 - 3\ x - 9$

c. $P(x).\ Q(x) = (6x^3 - 3x^2 - x - 5).\ (x^2 + 2x + 4)$

$= 6x^5 + 12x^4 + 24x^3 - 3x^4 - 6x^3 - 12x^2$

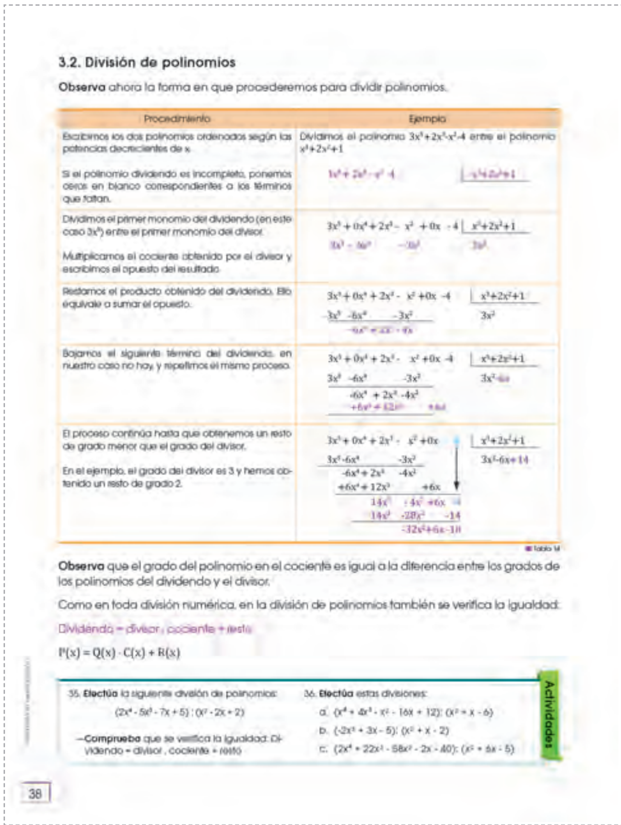
$- x3 - 2x2 - 4x - 5x2 - 10x - 20$

$= 6x5 + 9x4 + 17x3 - 19x2 - 14x - 20$

f. $(Q(x))^3 = (6x^3 - 3x^2 - x - 5)^3$

e. $= x^6 + 6x^5 + 24x^4 + 56x^3 + 96x^2 + 96x + 64$

Página 38


3.2. División de polinomios

Observa ahora la forma en que procederemos para dividir polinomios.

Observa que el grado del polinomio en el cociente es igual a la diferencia entre los grados de los polinomios del dividendo y el divisor.

Como en toda división numérica, en la división de polinomios también se verifica la igualdad:

Dividendo = divisor . cociente + resto

$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$

35. **Efectúa** la siguiente división de polinomios: $(2x^4 - 5x^3 - 7x + 5) : (x^2 - 2x + 2)$

— **Comprueba** que se verifica la igualdad: Dividendo = divisor . cociente + resto

36. **Efectúa** estas divisiones:

a. $(x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x + 12) : (x^2 + x - 6)$

b. $(-2x^3 + 3x - 5) : (x^2 + x - 2)$

c. $(2x^4 + 22x^3 - 58x^2 - 2x - 40) : (x^2 + 6x - 5)$

38

Solucionario

35.

$$
\begin{array}{l|l}
2x^4 - 5x^3 \quad 0x^2 - 7x + 5 & x^2 - 2x + 2 \\
\cline{2-2}
-2x^4 + 4x^3 - 4x^2 & 2x^2 - x - 6 \\
\hline
\quad -x^3 - 4x^2 - 7x + 5 & \\
\quad\ x^3 - 2x^2 + 2x & \\
\hline
\qquad -6x^2 - 5x + 5 & \\
\qquad +6x^2 - 12x + 12 & \\
\hline
\qquad\qquad -17x + 17 &
\end{array}
$$

Comprobación: Dividendo = divisor. Cociente + resto

$(x^2 - 2x + 2).(2x2 - x - 6) + (-17x + 17) =$

$= 2x^4 - x^3 - 6x^2 - 4x^3 + 2x^2 + 12x + 4x^2 - 2x - 12 - 17x + 17$

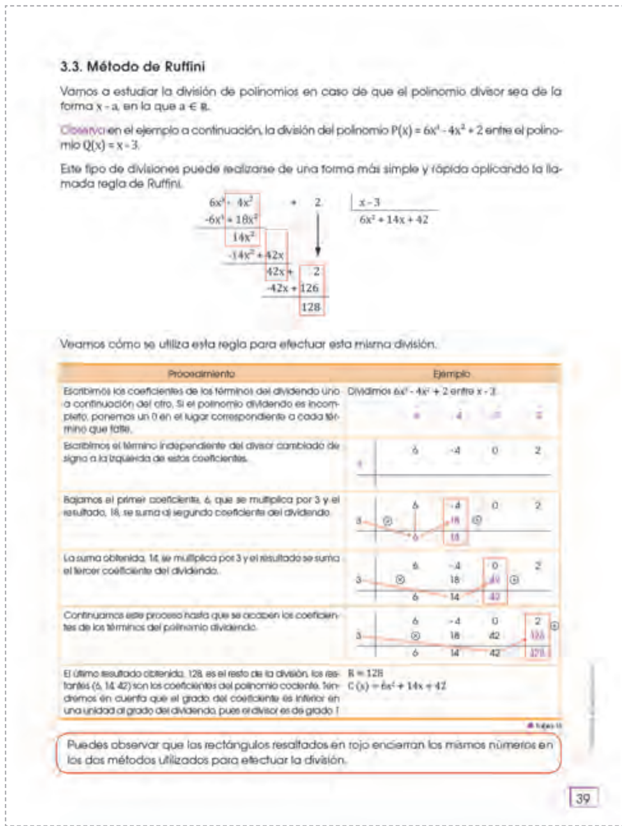
$= 2x^4 - 5x^3 - 7x + 5$

36. a. $x^2 + 3x + 2$

b. $-2x + 2$

c. $2x^2 + 10x - 108$

Página 39


3.3. Método de Ruffini

Vamos a estudiar la división de polinomios en caso de que el polinomio divisor sea de la forma $x - a$, en la que $a \in \mathbb{R}$.

Observa en el ejemplo a continuación, la división del polinomio $P(x) = 6x^3 - 4x^2 + 2$ entre el polinomio $Q(x) = x - 3$.

Este tipo de divisiones puede realizarse de una forma más simple y rápida aplicando la llamada regla de Ruffini.

Veamos cómo se utiliza esta regla para efectuar esta misma división.

El último resultado obtenido, 128, es el resto de la división. Los restantes (6, 14, 42) son los coeficientes del polinomio cociente. Tendremos en cuenta que el grado del coeficiente es inferior en una unidad al grado del dividendo, pues el divisor es de grado 1.

$R = 128$

$C(x) = 6x^2 + 14x + 42$

Puedes observar que los rectángulos resaltados en rojo encierran los mismos números en los dos métodos utilizados para efectuar la división.

39

Orientación didáctica

Se recomienda recordar que:

- El grado del cociente C(x) debe ser inferior en una unidad al grado del dividendo, pues el divisor es de grado 1.
- En la división de enteros, p era divi¬sible por q si existía un número c tal que: p = c · q

Análogamente, en el caso de los po¬linomios, P (x) es divisible por Q (x), R(x) = 0. Por lo tanto: *P(x)* = *C* (*x*) · *Q*(*x*)

Actividades Complementarias

Solicite a los estudiantes que hallen el cociente y el resto de las siguientes divisiones de polinomios:

$(3x^4 + x^3 + 5x - 7) : (x^2 + 3)$

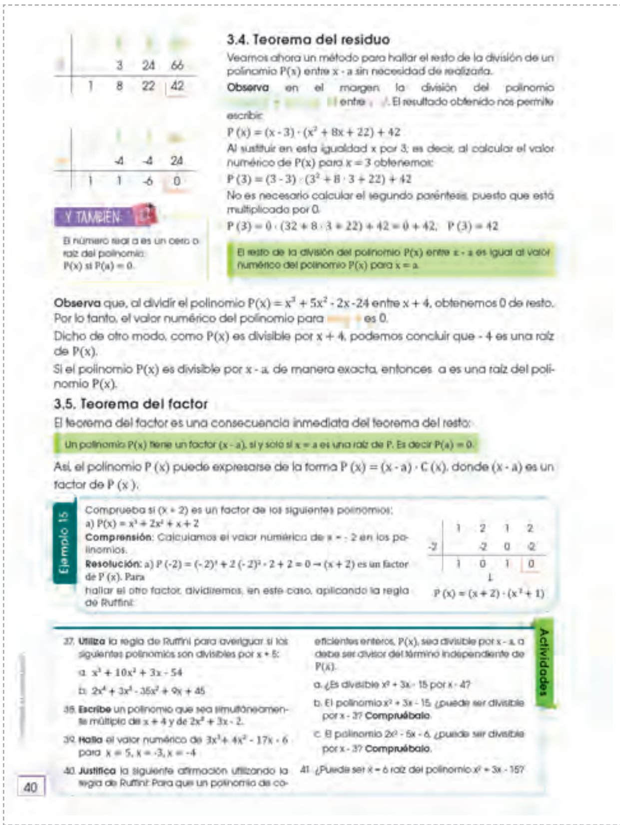
$(3x^3 - 6x^2 + 5x - 4) : (2x^2 + 4)$

Solución:

$C(x) = 3x^2 + x - 9$ y $R(x) = 2x + 20;$

$C(x) = \frac{3}{2}x - 3$ y $R(x) = -x + 8;$

Página 40



3.4. Teorema del residuo

Veamos ahora un método para hallar el resto de la división de un polinomio P(x) entre x - a sin necesidad de realizarla.

Observa en el margen la división del polinomio entre . El resultado obtenido nos permite escribir:

$P(x) = (x-3) \cdot (x^2 + 8x + 22) + 42$

Al sustituir en esta igualdad x por 3; es decir, al calcular el valor numérico de P(x) para x = 3 obtenemos:

$P(3) = (3-3) \cdot (3^2 + 8 \cdot 3 + 22) + 42$

No es necesario calcular el segundo paréntesis, puesto que está multiplicado por 0.

$P(3) = 0 \cdot (32 + 8 \cdot 3 + 22) + 42 = 0 + 42; \quad P(3) = 42$

El resto de la división del polinomio P(x) entre x - a es igual al valor numérico del polinomio P(x) para x = a.

		3	24	66
	1	8	22	42

		-4	-4	24
	1	1	-6	0

Y TAMBIÉN:

El número real a es un cero o raíz del polinomio P(x) si P(a) = 0.

Observa que, al dividir el polinomio $P(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 24$ entre x + 4, obtenemos 0 de resto. Por lo tanto, el valor numérico del polinomio para es 0.

Dicho de otro modo, como P(x) es divisible por x + 4, podemos concluir que - 4 es una raíz de P(x).

Si el polinomio P(x) es divisible por x - a, de manera exacta, entonces a es una raíz del polinomio P(x).

3.5. Teorema del factor

El teorema del factor es una consecuencia inmediata del teorema del resto:

Un polinomio P(x) tiene un factor (x - a), si y solo si x = a es una raíz de P. Es decir P(a) = 0.

Así, el polinomio P (x) puede expresarse de la forma $P(x) = (x-a) \cdot C(x)$, donde (x - a) es un factor de P (x).

Ejemplo 15

Comprueba si (x + 2) es un factor de los siguientes polinomios:

a) $P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$

Comprensión: Calculamos el valor numérico de x = - 2 en los polinomios.

Resolución: a) $P(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 - 2 + 2 = 0 \rightarrow (x+2)$ es un factor de P (x). Para hallar el otro factor, dividiremos, en este caso, aplicando la regla de Ruffini:

	1	2	1	2
-2		-2	0	-2
	1	0	1	0

$P(x) = (x+2) \cdot (x^2 + 1)$

Actividades

37. **Utiliza** la regla de Ruffini para averiguar si los siguientes polinomios son divisibles por x + 5:

a. $x^3 + 10x^2 + 3x - 54$

b. $2x^4 + 3x^3 - 35x^2 + 9x + 45$

38. **Escribe** un polinomio que sea simultáneamente múltiplo de x + 4 y de $2x^2 + 3x - 2$.

39. **Halla** el valor numérico de $3x^3 + 4x^2 - 17x - 6$ para x = 5, x = -3, x = -4

40. **Justifica** la siguiente afirmación utilizando la regla de Ruffini: Para que un polinomio de coeficientes enteros, P(x), sea divisible por x - a, a debe ser divisor del término independiente de P(x).

a. ¿Es divisible $x^2 + 3x - 15$ por x - 4?

b. El polinomio $x^2 + 3x - 15$, ¿puede ser divisible por x - 3? **Compruébalo**.

c. El polinomio $2x^2 - 5x - 6$, ¿puede ser divisible por x - 3? **Compruébalo**.

41. ¿Puede ser x = 6 raíz del polinomio $x^2 + 3x - 15$?

40

Solucionario

37. a. $x^3 + 10x^2 + 3x - 54$, no es divisible para x + 5

b. $2x^4 + 3x^3 - 35x^2 + 9x + 45$, si es divisible para x + 5

c. $+ 2x^3 - 49x^2 + 76x - 20$, si es divisible para x + 5

38. $2x^3 + 11x^2 + 10x - 8$, es múltiplo de x + 4 y de $2x^2 + 3x - 2$.

39. a. El valor numérico de $3x^3 + 4x^2 - 17x - 6$ para x = 5: $3.5^3 + 4.5^2 - 17.5 - 6 = 384$

b. x = -3: $3.(-3)^3 + 4.(-3)^2 - 17.(-3) - 6 = 0$

c. x = - 4: $3.(-4)^3 + 4.(-4)^2 - 17.(-4) - 6 = -66$

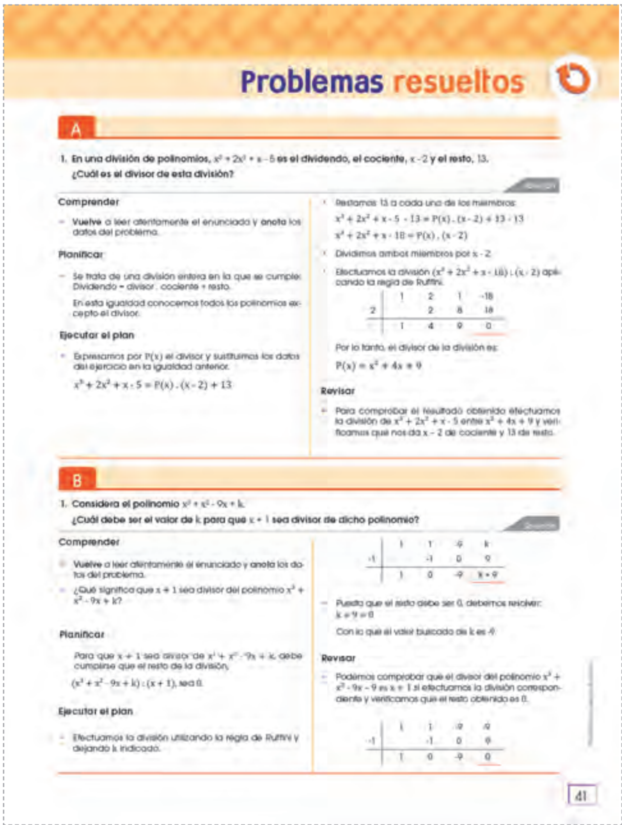
40. $x^2 + 3x - 15$ no es divisible por x - 4

$x^2 + 3x - 15$, tampoco es divisible por x-3.

$2x^2 - 5x - 6$, no es divisible por x - 3

41. x = 6 no es raíz del polinomio $x^2 + 3x - 15$

Página 41



Problemas resueltos

A

1. **En una división de polinomios, $x^3 + 2x^2 + x - 5$ es el dividendo, el cociente, x - 2 y el resto, 13. ¿Cuál es el divisor de esta división?**

Comprender

- **Vuelve** a leer atentamente el enunciado y **anota** los datos del problema.

Planificar

- Se trata de una división entera en la que se cumple: Dividendo = divisor . cociente + resto.

En esta igualdad conocemos todos los polinomios excepto el divisor.

Ejecutar el plan

- Expresamos por P(x) el divisor y sustituimos los datos del ejercicio en la igualdad anterior.

$x^3 + 2x^2 + x - 5 = P(x) \cdot (x-2) + 13$

- Restamos 13 a cada uno de los miembros:

$x^3 + 2x^2 + x - 5 - 13 = P(x) \cdot (x-2) + 13 - 13$

$x^3 + 2x^2 + x - 18 = P(x) \cdot (x-2)$

- Dividimos ambos miembros por x - 2.
- Efectuamos la división $(x^3 + 2x^2 + x - 18) : (x - 2)$ aplicando la regla de Ruffini.

	1	2	1	-18
2		2	8	18
	1	4	9	0

Por lo tanto, el divisor de la división es:

$P(x) = x^2 + 4x + 9$

Revisar

- Para comprobar el resultado obtenido efectuamos la división de $x^3 + 2x^2 + x - 5$ entre $x^2 + 4x + 9$ y verificamos que nos da x - 2 de cociente y 13 de resto.

B

1. **Considera el polinomio $x^3 + x^2 - 9x + k$. ¿Cuál debe ser el valor de k para que x + 1 sea divisor de dicho polinomio?**

Comprender

- **Vuelve** a leer atentamente el enunciado y **anota** los datos del problema.
- ¿Qué significa que x + 1 sea divisor del polinomio $x^3 + x^2 - 9x + k$?

Planificar

Para que x + 1 sea divisor de $x^3 + x^2 - 9x + k$, debe cumplirse que el resto de la división, $(x^3 + x^2 - 9x + k) : (x + 1)$, sea 0.

Ejecutar el plan

- Efectuamos la división utilizando la regla de Ruffini y dejando k indicado.

	1	1	-9	k
-1		-1	0	9
	1	0	-9	k + 9

- Puesto que el resto debe ser 0, debemos resolver: k + 9 = 0

Con lo que el valor buscado de k es -9.

Revisar

- Podemos comprobar que el divisor del polinomio $x^3 + x^2 - 9x - 9$ es x + 1 si efectuamos la división correspondiente y verificamos que el resto obtenido es 0.

	1	1	-9	-9
-1		-1	0	9
	1	0	-9	0

41

Orientación didáctica

La actividad resuelta que se propone en esta página permite al profesor o profesora repasar la división de polinomios por el método de Ruffini y procedimientos algebraicos, y los pasos para resolver un problema, que puede aprovechar también para insistir en la importancia de mantener un orden para resolver ejercicios o problemas en Matemática.

Actividades Complementarias

Pida a los estudiantes que efectúen las siguientes divisiones por Ruffini:

a. (3x5 + 2x + 1) : (x +1)

b. (x6 + x2 - 3) : (x + 3)

c. (x^9 + x5 + 1) : (x - 2)

Solución

a. $C(x) = 3x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 5$; $R(x) = -4$

b. $C(x) = x^5 - 3x^4 + 9x^3 - 27x^2 + 82x - 246$; $R(x) = 735$

c. $C(x) = x^8 + 2x^7 + 4x^6 + 8x^5 + 17x^4 + 34x^3 + 68x^2 + 136x + 272$; $R(x) = 545$

Actividades Complementarias

Pida a los estudiantes que calculen el cociente y el resto de la división de P (x) = $7x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 1$ entre Q (x) = x + 1. A continuación, cal¬cula el valor de P (-1). Pregún-teles qué observan.

Solución:

C (x) = $7x^3 - 9x^2 + 12x - 12$ R (x) = 13

P (-1) = 7(-1)4 - 2(-1)3 + 3(-1)2 + 1 = 13

Se puede observar que P (-1) = R (x); por tanto, se cum-ple el teorema del resto.

Solucionario

42. a. $\dfrac{8x^4-2x^3-9x^2+7x+1}{4x^2+x-2}=2x^2-x-1;\ R(x)=6x-1$

b. $\dfrac{6x^4-7x^3+11x^2-5}{3x+2}=2x^3-\dfrac{11}{3}x2+\dfrac{55}{9}x-\dfrac{110}{27}$

c. $\dfrac{6x^4-x^3+x^2-5x+1}{2x-1}=3x^3+x^2+x-2$

Solucionario

42. a. $|3x-5|=4$

$3x-5=4\rightarrow 3x=9\rightarrow x=3$

$-3x+5=4\rightarrow 3x=1\rightarrow x=1/3$

b. $|5x-3|=2/3$

$5x-3=2/3\rightarrow 5x=2/3+3\rightarrow x=11/15$

$-5x+3=2/3\rightarrow 5x=3-2/3\rightarrow x=7/15$

c. $\left|\dfrac{3x-2}{2}+5\right|=10$

$\dfrac{3x-2}{2}=5\rightarrow 3x-2=10\rightarrow 3x=12\rightarrow x=4$

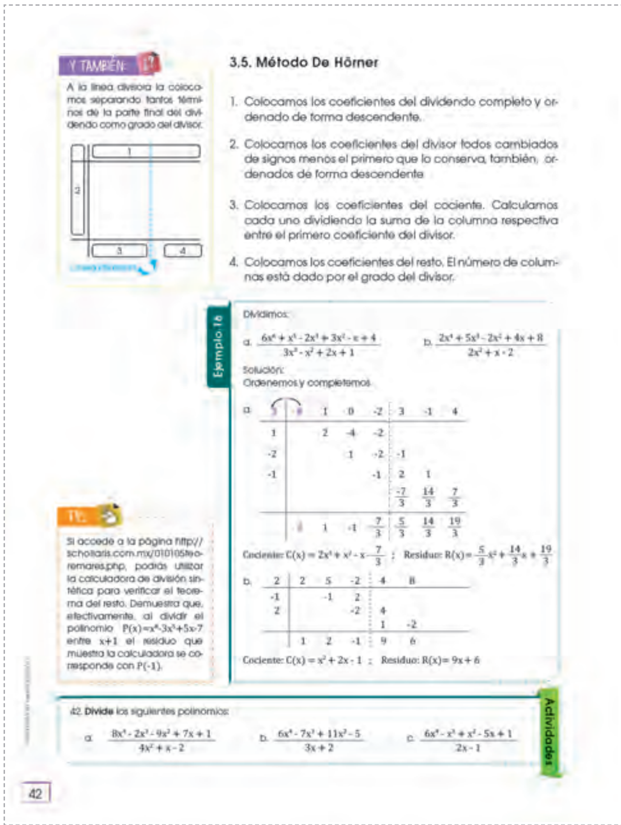
$\dfrac{3x-2}{2}=15\rightarrow -3x+2=30\rightarrow 3x=-28\rightarrow x=-28/3$

d. $\left|\dfrac{x+3}{4}-\dfrac{1}{2}\right|=3$

$\dfrac{x+3}{4}-\dfrac{1}{2}=3\rightarrow \dfrac{x+3-2}{4}=3\rightarrow x+1=12$

$x=11$

Página 42

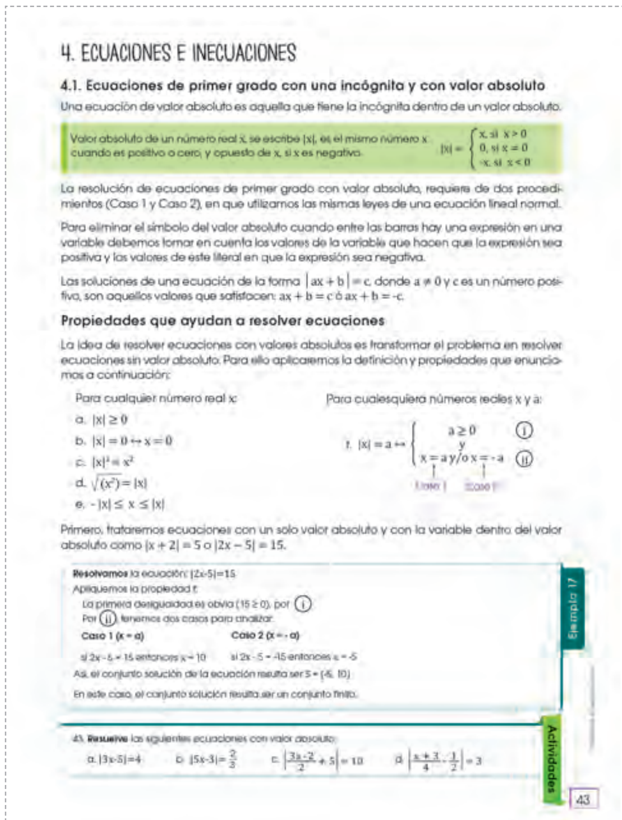


3.5. Método De Hörner

1. Colocamos los coeficientes del dividendo completo y ordenado de forma descendente.
2. Colocamos los coeficientes del divisor todos cambiados de signos menos el primero que lo conserva, también, ordenados de forma descendente.
3. Colocamos los coeficientes del cociente. Calculamos cada uno dividiendo la suma de la columna respectiva entre el primero coeficiente del divisor.
4. Colocamos los coeficientes del resto. El número de columnas está dado por el grado del divisor.

42. Divide los siguientes polinomios:

Página 43



4. ECUACIONES E INECUACIONES

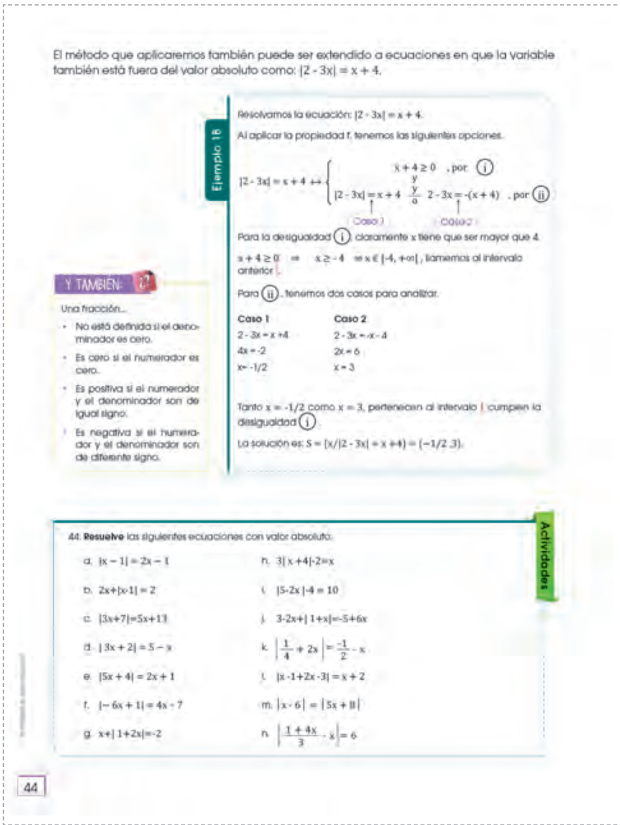
4.1. Ecuaciones de primer grado con una incógnita y con valor absoluto

Una ecuación de valor absoluto es aquella que tiene la incógnita dentro de un valor absoluto.

Propiedades que ayudan a resolver ecuaciones

43. Resuelve las siguientes ecuaciones con valor absoluto.

Página 44


El método que aplicaremos también puede ser extendido a ecuaciones en que la variable también está fuera del valor absoluto como: |2 - 3x| = x + 4.

Ejemplo 18

Resolvamos la ecuación: |2 - 3x| = x + 4.

Al aplicar la propiedad f, tenemos las siguientes opciones.

Para la desigualdad (i) claramente x tiene que ser mayor que 4.

Para (ii), tenemos dos casos para analizar.

Tanto x = -1/2 como x = 3, pertenecen al intervalo I, cumplen la desigualdad (i).

La solución es: S = {x/|2 - 3x| = x + 4} = {−1/2, 3}.

Y TAMBIÉN:

Una fracción...

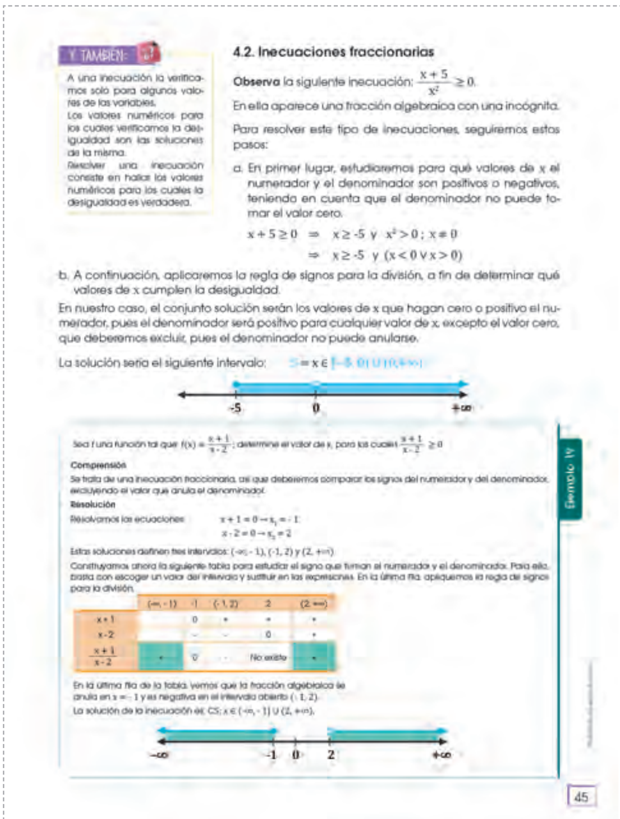
- No está definida si el denominador es cero.
- Es cero si el numerador es cero.
- Es positiva si el numerador y el denominador son de igual signo.
- Es negativa si el numerador y el denominador son de diferente signo.

Actividades

44. **Resuelve** las siguientes ecuaciones con valor absoluto.

44

Página 45


4.2. Inecuaciones fraccionarias

Observa la siguiente inecuación: $\frac{x+5}{x^2} \geq 0$.

En ella aparece una fracción algebraica con una incógnita.

Para resolver este tipo de inecuaciones, seguiremos estos pasos:

a. En primer lugar, estudiaremos para qué valores de x el numerador y el denominador son positivos o negativos, teniendo en cuenta que el denominador no puede tomar el valor cero.

b. A continuación, aplicaremos la regla de signos para la división, a fin de determinar qué valores de x cumplen la desigualdad.

En nuestro caso, el conjunto solución serán los valores de x que hagan cero o positivo el numerador, pues el denominador será positivo para cualquier valor de x, excepto el valor cero, que deberemos excluir, pues el denominador no puede anularse.

La solución sería el siguiente intervalo:

Y TAMBIÉN:

A una inecuación la verifican solo para algunos valores de las variables. Los valores numéricos para los cuales verificamos la desigualdad son las soluciones de la misma. Resolver una inecuación consiste en hallar los valores numéricos para los cuales la desigualdad es verdadera.

Ejemplo 19

45

Solucionario

42. a. $|x-1| = 2x-1 \rightarrow x-1 = 2x-1 \rightarrow x = 0$
$-x+1 = 2x-1 \rightarrow 3x = 2 \rightarrow x = 2/3$

b. $2x + |x-1| = 2 \rightarrow 2x-2 = x-1 \rightarrow x = 1$
$2x-2 = -x+1 \rightarrow 3x = 3 \rightarrow x = 1$

c. $|3x+7| = 5x+13$
$3x+7 = 5x+13 \rightarrow 2-6 \rightarrow x = -3$
$-3x-7 = 5x+13 \rightarrow 8x = -20 \rightarrow x = -5/2$

d. $|3x+2| = 5-x$
$3x+2 = 5-x \rightarrow 4x = 3 \rightarrow x = 3/4$
$-3x-2 = 5-x \rightarrow 2x = -7 \rightarrow x = -7/2$

e. $|5x+4| = 2x+1 \qquad \{-5/7, -1\}$

f. $|-6x+1| = 4x-7 \qquad \{-9/2, 19/2\}$

g. $x + |1+2x| = -2 \qquad \{1, -1\}$

h. $3|x+4| - = x \qquad \{-5, -7/2\}$

i. $|5-2x| - 4 = 10 \qquad -\{9/2, 19/2\}$

j. $3-2x+|1+x| =' -5+6x \qquad \{9/7, 7/9\}$

k. $|1/4+2x| = -1/2 - x \qquad \{1, 1\}$

l. $|x-1+2x-3| = x+2 \qquad \{3, 1/2\}$

m. $|x-6| = |5x+8| \qquad x = -1/2$

n. $\left|\frac{1+4x}{3} - x\right| - x = 6 \qquad \{-19, 17\}$

Actividades Complementarias

Solicite a los estudiantes que resuelvan las siguientes inecuaciones racionales:

a. $\frac{2x(x-3)+x2}{x-1} = \leq 3(x-1)$

b. $\frac{(x2+1)(x2-9x+8)}{x2+2} \leq 0$

Soluciones:

$[1, +\infty); [1, 8]$

Actividades Complementarias

Indique a los estudiantes que deben hallar los valores de x para los que se cumplen estas desigualdades, y represéntalos gráficamente.

a. $|x|<5$ c. $|x+1|\leq 3$

b. $|x|>1$ d. $|x+5|\geq 4$

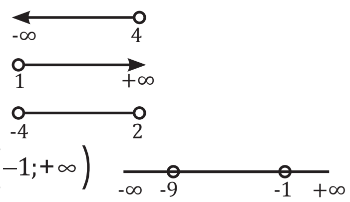
Soluciones:

$S=(-\infty;4)$

$S=(1,+\infty)$

$S0[-4;2]$

$S=[-\infty;-9)\cup[-1;+\infty)$



Solucionario

45. $(X-1)=2(X+6)$ es 3

46. a. $\sqrt{4x}-5x=-4x$

$\sqrt{4x}=5x-4x$

$\sqrt{4x}=x\rightarrow 4x=x^2$

$x^2-4x=0\rightarrow x(x-4)=0$

$x=0,x=4$

b. $2\sqrt{x}-5=10-x$

$2\sqrt{x}=10-x+5\rightarrow 2\sqrt{x}=15-x$

$x=(15-x)^2\rightarrow 4x=225-30x+x^2$

$x^2-30x-4x+225=0\rightarrow x^2-34x+225=0$

$(x-25)(x-9)=0\rightarrow \quad x=9$

c. $\sqrt{x+15}=x-1$

$x+5=(x-1)^2\rightarrow x+5=x^2-2x+1$

$x^2-2x+1-x-5=0\rightarrow x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0, \quad \rightarrow \quad x=4$

d. $2x-2=\sqrt{8x}-x$

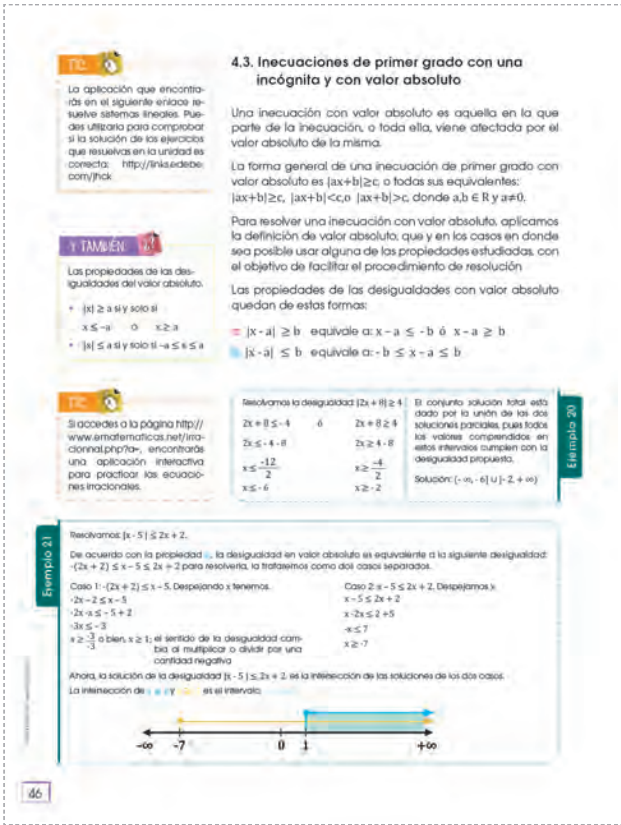
$2x+x-2=\sqrt{8x}\rightarrow(3x-2)^2=8x$

$9x^2-12x+4-8x=0$

$9x^2-20x+4=0\rightarrow(9x-2)(x-2)=0$

$x=2$

Página 46



TIC

La aplicación que encontrarás en el siguiente enlace resuelve sistemas lineales. Puedes utilizarla para comprobar si la solución de los ejercicios que resuelvas en la unidad es correcta: http://links.edebe.com/jhck

Y TAMBIÉN

Las propiedades de las desigualdades del valor absoluto.

- $|x|\geq a$ si y solo si $x\leq -a$ ó $x\geq a$
- $|x|\leq a$ si y solo si $-a\leq x\leq a$

TIC

Si accedes a la página http://www.ematematicas.net/irracionnal.php?a=, encontrarás una aplicación interactiva para practicar las ecuaciones irracionales.

4.3. Inecuaciones de primer grado con una incógnita y con valor absoluto

Una inecuación con valor absoluto es aquella en la que parte de la inecuación, o toda ella, viene afectada por el valor absoluto de la misma.

La forma general de una inecuación de primer grado con valor absoluto es $|ax+b|\geq c$, o todas sus equivalentes: $|ax+b|\geq c$, $|ax+b|<c$, o $|ax+b|>c$, donde $a,b\in\mathbb{R}$ y $a\neq 0$.

Para resolver una inecuación con valor absoluto, aplicamos la definición de valor absoluto; que y en los casos en donde sea posible usar alguna de las propiedades estudiadas, con el objetivo de facilitar el procedimiento de resolución.

Las propiedades de las desigualdades con valor absoluto quedan de estas formas:

- $|x-a|\geq b$ equivale a: $x-a\leq -b$ ó $x-a\geq b$
- $|x-a|\leq b$ equivale a: $-b\leq x-a\leq b$

Ejemplo 20

Resolvamos la desigualdad $|2x+8|\geq 4$

$2x+8\leq -4$ ó $2x+8\geq 4$

$2x\leq -4-8$ $\quad$ $2x\geq 4-8$

$x\leq\frac{-12}{2}$ $\quad$ $x\geq\frac{-4}{2}$

$x\leq -6$ $\quad$ $x\geq -2$

El conjunto solución total está dado por la unión de las dos soluciones parciales, pues todos los valores comprendidos en estos intervalos cumplen con la desigualdad propuesta.

Solución: $(-\infty,-6]\cup[-2,+\infty)$

Ejemplo 21

Resolvamos: $|x-5|\leq 2x+2$.

De acuerdo con la propiedad , la desigualdad en valor absoluto es equivalente a la siguiente desigualdad: $-(2x+2)\leq x-5\leq 2x+2$ para resolverla, la trataremos como dos casos separados.

Caso 1: $-(2x+2)\leq x-5$. Despejando x tenemos.

$-2x-2\leq x-5$

$-2x-x\leq -5+2$

$-3x\leq -3$

$x\geq\frac{-3}{-3}$ o bien, $x\geq 1$; el sentido de la desigualdad cambia al multiplicar o dividir por una cantidad negativa

Caso 2: $x-5\leq 2x+2$. Despejamos x.

$x-5\leq 2x+2$

$x-2x\leq 2+5$

$-x\leq 7$

$x\geq -7$

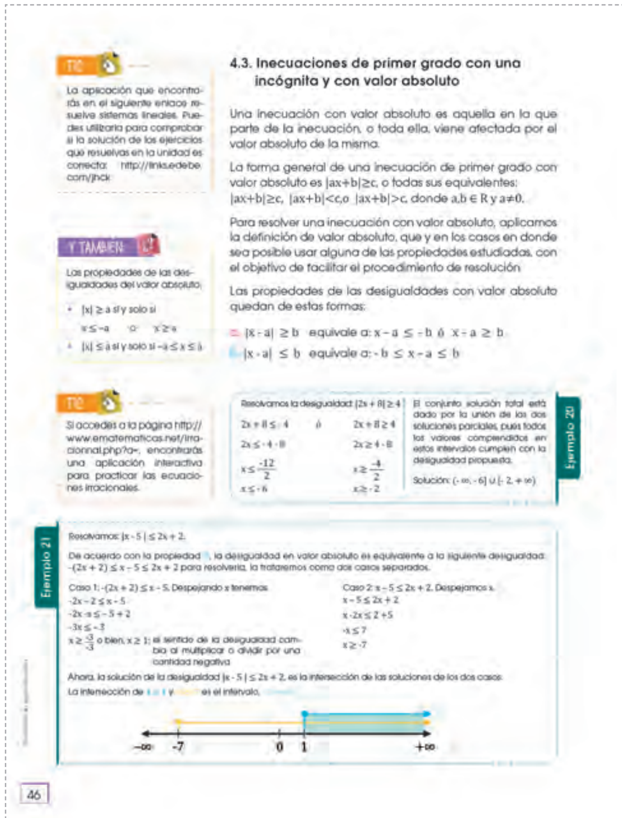
Ahora, la solución de la desigualdad $|x-5|\leq 2x+2$ es la intersección de las soluciones de los dos casos.

La intersección de y es el intervalo

−∞ -7 0 1 +∞

46

Página 47



TIC

La aplicación que encontrarás en el siguiente enlace resuelve sistemas lineales. Puedes utilizarla para comprobar si la solución de los ejercicios que resuelvas en la unidad es correcta: http://links.edebe.com/jhck

Y TAMBIÉN

Las propiedades de las desigualdades del valor absoluto.

- $|x|\geq a$ si y solo si $x\leq -a$ ó $x\geq a$
- $|x|\leq a$ si y solo si $-a\leq x\leq a$

TIC

Si accedes a la página http://www.ematematicas.net/irracionnal.php?a=, encontrarás una aplicación interactiva para practicar las ecuaciones irracionales.

4.3. Inecuaciones de primer grado con una incógnita y con valor absoluto

Una inecuación con valor absoluto es aquella en la que parte de la inecuación, o toda ella, viene afectada por el valor absoluto de la misma.

La forma general de una inecuación de primer grado con valor absoluto es $|ax+b|\geq c$, o todas sus equivalentes: $|ax+b|\geq c$, $|ax+b|<c$, o $|ax+b|>c$, donde $a,b\in\mathbb{R}$ y $a\neq 0$.

Para resolver una inecuación con valor absoluto, aplicamos la definición de valor absoluto; que y en los casos en donde sea posible usar alguna de las propiedades estudiadas, con el objetivo de facilitar el procedimiento de resolución.

Las propiedades de las desigualdades con valor absoluto quedan de estas formas:

- $|x-a|\geq b$ equivale a: $x-a\leq -b$ ó $x-a\geq b$
- $|x-a|\leq b$ equivale a: $-b\leq x-a\leq b$

Ejemplo 20

Resolvamos la desigualdad $|2x+8|\geq 4$

$2x+8\leq -4$ ó $2x+8\geq 4$

$2x\leq -4-8$ $\quad$ $2x\geq 4-8$

$x\leq\frac{-12}{2}$ $\quad$ $x\geq\frac{-4}{2}$

$x\leq -6$ $\quad$ $x\geq -2$

El conjunto solución total está dado por la unión de las dos soluciones parciales, pues todos los valores comprendidos en estos intervalos cumplen con la desigualdad propuesta.

Solución: $(-\infty,-6]\cup[-2,+\infty)$

Ejemplo 21

Resolvamos: $|x-5|\leq 2x+2$.

De acuerdo con la propiedad , la desigualdad en valor absoluto es equivalente a la siguiente desigualdad: $-(2x+2)\leq x-5\leq 2x+2$ para resolverla, la trataremos como dos casos separados.

Caso 1: $-(2x+2)\leq x-5$. Despejando x tenemos.

$-2x-2\leq x-5$

$-2x-x\leq -5+2$

$-3x\leq -3$

$x\geq\frac{-3}{-3}$ o bien, $x\geq 1$; el sentido de la desigualdad cambia al multiplicar o dividir por una cantidad negativa

Caso 2: $x-5\leq 2x+2$. Despejamos x.

$x-5\leq 2x+2$

$x-2x\leq 2+5$

$-x\leq 7$

$x\geq -7$

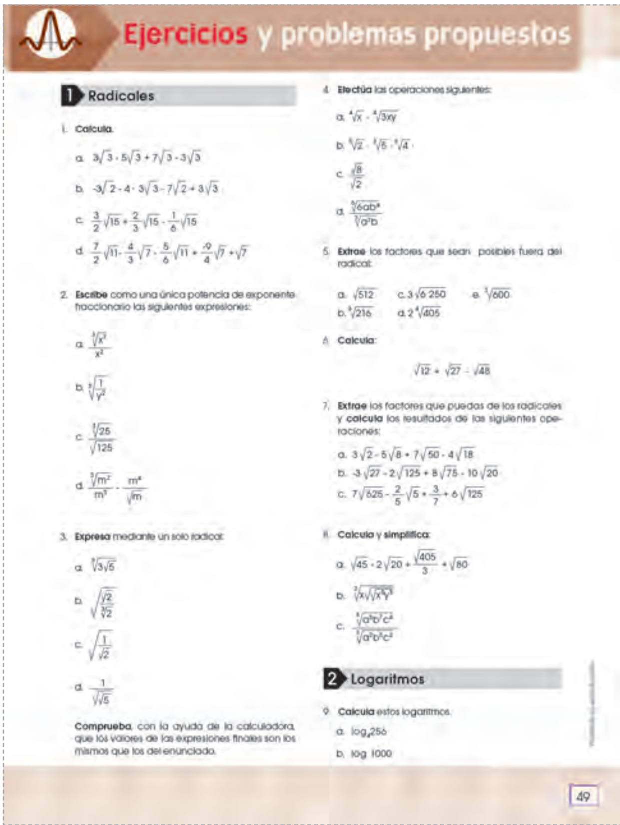
Ahora, la solución de la desigualdad $|x-5|\leq 2x+2$ es la intersección de las soluciones de los dos casos.

La intersección de y es el intervalo

−∞ -7 0 1 +∞

46

Página 49



Ejercicios y problemas propuestos

1 Radicales

1. **Calcula**
   a. $3\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{3}+7\sqrt{3}-3\sqrt{3}$
   b. $-3\sqrt{2}-4\cdot 3\sqrt{3}-7\sqrt{2}+3\sqrt{3}$
   c. $\frac{3}{2}\sqrt{15}+\frac{2}{3}\sqrt{15}-\frac{1}{6}\sqrt{15}$
   d. $\frac{7}{2}\sqrt{11}-\frac{4}{3}\sqrt{7}-\frac{5}{6}\sqrt{11}+\frac{-9}{4}\sqrt{7}+\sqrt{7}$
2. **Escribe** como una única potencia de exponente fraccionario las siguientes expresiones:
   a. $\frac{\sqrt[3]{x^7}}{x^2}$
   b. $\sqrt[5]{\frac{1}{y^2}}$
   c. $\frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt{125}}$
   d. $\frac{\sqrt[3]{m^2}}{m^3}\cdot\frac{m^4}{\sqrt{m}}$
3. **Expresa** mediante un solo radical:
   a. $\sqrt[5]{3\sqrt{5}}$
   b. $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}}$
   c. $\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}$
   d. $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{5}}}$

Comprueba, con la ayuda de la calculadora, que los valores de las expresiones finales son los mismos que los del enunciado.

4. **Efectúa** las operaciones siguientes:
   a. $\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[4]{3xy}$
   b. $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{4}$
   c. $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$
   d. $\frac{\sqrt[5]{6ab^4}}{\sqrt[5]{a^2b}}$
5. **Extrae** los factores que sean posibles fuera del radical:
   a. $\sqrt{512}$ c. $3\sqrt{6\,250}$ e. $\sqrt[3]{600}$
   b. $\sqrt[3]{216}$ d. $2\sqrt[4]{405}$
6. **Calcula**:
   $\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{48}$
7. **Extrae** los factores que puedas de los radicales y **calcula** los resultados de las siguientes operaciones:
   a. $3\sqrt{2}-5\sqrt{8}+7\sqrt{50}-4\sqrt{18}$
   b. $-3\sqrt{27}-2\sqrt{125}+8\sqrt{75}-10\sqrt{20}$
   c. $7\sqrt{625}-\frac{2}{5}\sqrt{5}+\frac{3}{7}+6\sqrt{125}$
8. **Calcula y simplifica**:
   a. $\sqrt{45}-2\sqrt{20}+\frac{\sqrt{405}}{3}+\sqrt{80}$
   b. $\sqrt[3]{x\sqrt{\sqrt{x^5y^3}}}$
   c. $\frac{\sqrt[4]{a^3b^7c^3}}{\sqrt[3]{a^2b^3c^2}}$

2 Logaritmos

9. **Calcula** estos logaritmos.
   a. $\log_4 256$
   b. $\log 1000$

49

Solucionario

1.

a. $2\sqrt{3}$ b. $-10\sqrt{2}-9\sqrt{3}$

c. $2\sqrt{15}$ d. $\frac{8}{3}\sqrt{11}-\frac{31}{12}\sqrt{7}$

2.

a) $\frac{\sqrt[3]{x^7}}{x^2}=\sqrt[3]{\frac{x^7}{x^6}}=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$

b) $\sqrt[5]{\frac{1}{y^2}}=\sqrt[5]{y^{-2}}=y^{\frac{-2}{5}}$

c) $\frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt{125}}=\frac{\sqrt[6]{25^2}}{\sqrt[6]{125^3}}=\sqrt[6]{\frac{25^2}{125^3}}=\sqrt[6]{\frac{5^4}{5^9}}=\sqrt[6]{\frac{1}{5^5}}=$
$=\sqrt[6]{5^{-5}}=5^{\frac{-5}{6}}$

d) $\frac{\sqrt[3]{m^2}}{m^3}\cdot\frac{m^4}{\sqrt{m}}=\frac{m\sqrt[3]{m^2}}{\sqrt{m}}=\frac{\sqrt[6]{m^{10}}}{\sqrt[6]{m^3}}=\sqrt[6]{\frac{m^{10}}{m^3}}=$
$=\sqrt[6]{m^7}=m^{\frac{7}{6}}$

3.

a) $\sqrt[5]{3\sqrt{5}}=\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[10]{5}=\sqrt[10]{3^2}\cdot\sqrt[10]{5}=\sqrt[10]{45}$

b) $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}}=\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[6]{2}}=\frac{\sqrt[12]{2^3}}{\sqrt[12]{2^2}}=\sqrt[12]{\frac{2^3}{2^2}}=\sqrt[12]{2}$

c) $\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt[4]{2}}=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

d) $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{5}}}=\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$

4.

a. $16\sqrt{2}$ b. $31\sqrt{3}-30\sqrt{5}$

c. $\frac{1228}{7}+\frac{148}{5}\sqrt{5}$

5.

a. $\sqrt{512}=\sqrt{2\,.\,256}=16\sqrt{2}$

b. $\sqrt[3]{216}=\sqrt[3]{27\,.\,8}=6$

c. $2\sqrt[4]{405}=2\sqrt[4]{81\,.\,5}=2.\,3\sqrt[4]{5}=6\sqrt[4]{5}$

d. $3\sqrt{6250}=\sqrt{625\,.\,10}=25\sqrt{10}$

6.

$\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{48}=\sqrt{4\,.\,3}+\sqrt{9.3}-\sqrt{16.3}=2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-4\sqrt{3}=\sqrt{3}$

7.

a. $16\sqrt{2}$ b. $31\sqrt{3}-30\sqrt{5}$

c. $\frac{1228}{7}+\frac{148}{5}\sqrt{5}$

a) $\sqrt{45}-2\sqrt{20}+\frac{\sqrt{405}}{3}+\sqrt{80}=\sqrt{5\cdot 3^2}-2\sqrt{2^2\cdot 5}+$
$+\frac{\sqrt{5\cdot 3^4}}{3}+\sqrt{2^4\cdot 5}=3\sqrt{5}-4\sqrt{5}+\frac{9\sqrt{5}}{3}+4\sqrt{5}=$
$=\sqrt{5}\,(3-4+3+4)=6\sqrt{5}$

9.

Aplicamos la definición del logaritmo, log $y=x\leftrightarrow ax=y$.

a) $\log_4 256 = x \rightarrow 4^x = 256 = 4^4 \rightarrow x = 4$

$\rightarrow$ ***$\log_4 256 = 4$***

b. $\log 1\,000 = x \rightarrow 10^x = 1\,000 = 10^3 \rightarrow x = 3 \rightarrow$ ***$\log 1\,000 = 3$***

c. $\log^6 36 = x \rightarrow 6^x = 36 = 6^2 \rightarrow x = 2$

$\rightarrow$ ***$\log_6 36=2$***

d. $\log_2 (1/8) = x \rightarrow 2^x = 1/8 = (1/2)^3 = 2^{-3} \rightarrow x = -3$

$\rightarrow$***$\log_2 (1/8) = -3$***

e) $\log 0{,}001 = x \rightarrow 10^x = 0{,}001 = 10^{-3} \rightarrow x = -3$

$\rightarrow$***$\log 0{,}001 = -3$***

f) $\log_5 0{,}04 = x \rightarrow 5^x = 0{,}04 = 4/100 = 1/5^2 = 5^{-2} \rightarrow x = -2$

$\rightarrow$***$\log_5 0{,}04 = -2$***

Solucionario

10.
Aplicamos la definición del logaritmo, $\log_a y = x \leftrightarrow a^x = y$.

a. $\log_3 27 + \log_2 \frac{1}{8} - \log_4 16 - \log_2 \sqrt{2}$

- $\log_3 27 = x \to 3^x = 27 = 3^3 \to x = 3$
- $\log_2 \frac{1}{8} = x \to 2^x = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 2^{-3} \to x = -3$
- $\log_4 16 = x \to 4^x = 16 = 4^2 \to x = 2$
- $\log_2 \sqrt{2} = x \to 2^x = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \to x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \log_3 27 + \log_2 \frac{1}{8} - \log_4 16 - \log_2 \sqrt{2} =$

$= 3 - 3 - 2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$

b. $\log_3 \frac{1}{243} - \log_6 1 + \log_2 32 = -5 - 0 + 5 = 0$

c. $\ln 1 + \ln e + \ln e^3 + \ln \sqrt[3]{e} + \ln \frac{1}{e}$

$= 0 + 1 + 3 + \frac{1}{3} - 1 = \frac{10}{3}$

11.
a. $\log_\pi \pi = 1$
b. −1/2
c. 2
d. –4
e. 5
f. ½

12.

Utilizamos la fórmula de cambio de base:
$\log_a x \frac{\log_b x}{\log_b a}$

a) $\log_5 244 = \frac{\log 244}{\log 5} = \frac{2{,}3873...}{0{,}6989...} = 3{,}4156$

b) $\log_5 6 = \frac{\log 6}{\log 5} = \frac{0{,}7781...}{0{,}6989...} = 1{,}1133$

c) $\log_{0,8} 24 = \frac{\log 24}{\log 0{,}8} = \frac{1{,}3802...}{-0{,}0969...} = -14{,}2422$

d) $\log e = \frac{\log e}{\log 10} = \frac{0{,}43429...}{1} = 0{,}4343$

e) $\log_\pi 3 = \frac{\log 3}{\log \pi} = \frac{0{,}4771...}{0{,}4971...} = 0{,}9597$

f) $\log_7 2000 = \frac{\log 2000}{\log 7} = \frac{3{,}3010...}{0{,}8450...} = 3{,}9061$

13.
a) $\log_x \frac{ab}{c} = \log_x ab - \log_x c = \log_x a + \log_x b - \log_x c$ Donde en la primera igualdad hemos utilizado la propiedad del logaritmo de un cociente y, en la segunda igualdad, la propiedad del logaritmo de un producto.

b) $\log_x \frac{a}{b^2} = \log_x a - \log_x b^2 = \log_x a - 2\log_x b$

Donde en la primera igualdad hemos utilizado la propiedad del logaritmo de un cociente y, en la segunda igualdad, la propiedad del logaritmo de una potencia.

c) $\log_x \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2\log_x \frac{a}{b} = 2(\log_x a - \log_x b) =$

$= 2\log_x a - 2\log_x b$

Donde en la primera igualdad hemos utilizado la propiedad del logaritmo de una potencia y, en la segunda igualdad, la propiedad del logaritmo de un cociente.

d) $\log_x \frac{a^3 b}{\sqrt{c}} = \log_x a^3 b - \log_x \sqrt{c} =$

$= \log_x a^3 + \log_x b - \frac{\log_x c}{2} = 3\log_x a + \log_x b - \frac{\log_x c}{2}$

Donde en la primera igualdad hemos utilizado la propiedad del logaritmo de un cociente; en la segunda igualdad, la propiedad del logaritmo de un producto y la de un radical; por último, en la tercera igualdad, la propiedad de una potencia.

14.
a. 4
b. 2
c. 3
d. 0
e. – 1
f. 1

15.
a. 6
b. 1/3
c. – 4
d. - 2,666 7
e. 4
f . 1/5

16.
a. 5/2
b. 6/5
c. 4
d. 0
e. - 1/6
f. – 2

17.
a. 5,2
b. -1,8
c. 12,4
d. 1,931

18.
a. $\log_3 x + \log_3 (x + 1)$
b. $\frac{1}{4}(2\log_5 2 + 1)$
c. $\log_4 x + \log_4 (x^2 + 1) - \log_4 (x^2 - 1) /2$

19.
a. 2,334 3
b. 1,874 9
c. - 1,349 5
d. - 0,4013

Página 51

Solucionario

21.

Utilizamos las propiedades de los logaritmos para expresarlos en un único logaritmo:

a) $\log(ab) - 2\log\frac{a}{b} = \log(ab) - \log\left(\frac{a}{b}\right)^2 =$

$= \log\left[(ab) : \left(\frac{a}{b}\right)^2\right] = \log\left(\frac{ab^3}{a^2}\right) = \log\frac{b^3}{a}$

b) $2\ln(x-y) - \ln(x^2-y^2) = \ln(x-y)^2 - \ln(x-y)(x-y) =$

$= \ln\frac{(x-y)^2}{(x-y)(x+y)} = \ln\frac{x-y}{x+y}$

c) $2\log_4 t - \frac{\log_4 y}{3} + (z-2)\log_4 8 = \log_4 t^2 - \log_4 \sqrt[3]{y} +$

$+ \log_4 8^{z-2} = \log_4 \frac{t^2}{\sqrt[3]{y}} + \log_4 8^{z-2} = \log_4 \frac{t^2 \cdot 8^{z-2}}{\sqrt[3]{y}}$

22.

a. $\log \frac{5}{9}$

b. $\ln \frac{x^5 . z^3}{\sqrt{y}}$;

c. $\log_3(x + 1)$

d. $\log(9 - x^2)$

23.

Sea $\log x = k$, y utilizando las propiedades de los logaritmos, resulta que:

a) $\log x^3 = 3 \cdot \log x = 3k$

b) $\log\frac{x}{1000} = \log x - \log 1000 = k - \log 10^3 =$

$= k - 3\log 10 = k - 3 \cdot 1 = k - 3$

c) $\log x\sqrt{10} = \log x + \log\sqrt{10} = k + \frac{\log 10}{2} =$

$= k + \frac{1}{2} = k + 0{,}5$

24.

Transformamos los logaritmos de forma que la base sea igual al número del cual queremos calcular su logaritmo y, así, aplicamos la propiedad $\log_a a = 1$.

a. $2\log_4 16 + \log_2 32 - 3\log_7 49 =$

$= 2\log_4 4^2 + \log_2 2^5 - 3\log_7 7^2 =$

$= 2 \cdot 2 \cdot \log_4 4 + 5 \cdot \log_2 2 - 3 \cdot 2 \cdot \log_7 7 = 4 + 5 - 6 = 3$

b. $\log_5 625 - \log_9 1 = \log_5 5^4 - 0 = 4 \cdot \log_5 5 = 4 \cdot 1 = 4$

25.

Con las propiedades del logaritmo, resulta que:

a. $3\log_5 a + 4\log_5 b = \log_5 a^3 + \log_5 b^4 = \log_5 (a^3 b^4)$

b) $\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} a - 3\log_{\frac{1}{2}} a = \log_{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} - \log_{\frac{1}{2}} a^3 =$

$= \log_{\frac{1}{2}} \frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^3} = \log_{\frac{1}{2}} a^{-\frac{5}{2}}$

c) $2(\log_4 x + 2\log_4 y - 3\log_3 z) = 2(\log_4 x + \log_4 y^2 - \log_3 z^3) =$

$= 2(\log_4 xy^2 - \log_3 z^3) = 2\log\frac{xy^2}{z^3} = \log\left(\frac{xy^2}{z^3}\right)^2$

Solucionario

26.

a) $\log(xy) = \log x + \log y = 3 + 5 = 8$

b) $\log \dfrac{x^2}{y} = \log x^2 - \log y = 2\log x - \log y = 2 \cdot 3 - 5 = 1$

c) $\log x^{\log y} = (\log y) \cdot (\log x) = 5 \cdot 3 = 15$

d) $\log \sqrt[3]{xy^2} = \dfrac{\log xy^2}{3} = \dfrac{\log x + \log y^2}{3} = \dfrac{\log x + 2\log y}{3} = \dfrac{3 + 2 \cdot 5}{3} = \dfrac{13}{3}$

e) $\log \dfrac{y}{\sqrt[4]{x}} = \log y - \log \sqrt[4]{x} = \log y - \dfrac{\log x}{4} = 5 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{17}{4}$

f) $\log y^{\log(xy)} = \log(xy) \cdot \log y = (\log x + \log y) \cdot \log y = (3 + 5) \cdot 5 = 40$

27.
a. $\log_5 36^2 = 4{,}4531$
b. $\log_6 100 = 2{,}5702$
c. $\log_2 \sqrt{31} = 2{,}4771$
d. $\log_4 31^5 = 12{,}3855$

28.
a. 8
b. 2
c. 4,982 9
d. - 0,773 7
e. 0,1
f. 2,3023

29.
a. 3,631
b. - 3,088
c. - 0,191
d. 0,75
e. 5,723

30.
24 y 0

31.
a. x-1
b. (x + 3) (x - 2)
c. (x - 3) (x + 1)

32.
a. $x^2 - 4x + 18$; -2
b. $x^4 + x^3 + x^2 - x - 1$; -4
c. $x^5 - 3x^4 + 9x^3 - 27x^2 + 81x - 242$; 726
d. $x^2 + 5x + 11$; 25; e) $4x^2 + 8x + 11$; 22;
f. $x^6 - 2x^5 + 4x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 32x + 63$; -126

33.
a. $P(-5) = (-5)^3 - 3(-5)^2 + 2(-5) + 3 = -207 \neq 0$
Por tanto, es incorrecto.

b. $P(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 + 1 = -2 \neq 0$
Por tanto, es incorrecto.

c. $P(-5) = (-5)^3 + 4 \cdot 5^2 - 7 \cdot 5 - 10 = -70 \neq 0$
Por tanto, es incorrecto.

d. $P(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + 4(-1) + 2 = 0$
Por tanto, es correcto.

34.
Las posibles raíces son x = 2, x = -1

35.
Las raíces son x = -2, x = -3, x = 1

36.
Son múltiplos de $2x - 4$, $2x^3 - 6x^2 + 8$

37.
El divisor de $3x^3 + 18x^2 + 33x + 18$ es solo b. x + 1

38.
a. {-4 ,20/3}
b. {∅}
c. {2}
d. {-1/2 , 2/5}
e. {5/4}

39.
a. $x>2$
b. $x \leq -5/4$
c. $x>4$
d. $x \geq 10$

40.
a. S = (-∞; 2/13]
b. S = [4,+∞)
c. S = (−∞, 0]
d. S = R; e) S = Ø

41.
a. 3-8< 5x→ S = (-1,+∞),

Página 53

Solucionario

b. $2x - 4 + 3x < 5x + 6 \rightarrow 0x < 10$, Para cualquier *x* que consideremos, el primer miembro valdrá siempre 0, por lo que se cumplirá la desigualdad $0 < 10$. Luego $S = \mathbb{R}$.

c. $2x - 3 - 20x + 12 < 6x \rightarrow 24x > 9 \rightarrow x > 1/12$, $S = \{1/12; +\infty\}$

d. $5x - 15 > -40 + 110x \rightarrow x < 5/21$

e. $15x - 9x - 6x - 30 - 1 + 9 < 0 \rightarrow 0x - 22 < 0 \rightarrow 0x < 22$

Para cualquier *x* que consideremos, el primer miembro valdrá siempre 0, por lo que se cumplirá la desigualdad $0 < 22$. Luego $S = \mathbb{R}$.

f. $6x - 20x - x + 14 + 30 + 1 + 2 \geq 0 \rightarrow -15x + 47 \geq 0 \rightarrow x \leq 47/15$.

Así pues, $S = (-\infty, 47/15]$

g. $3(x - 1) - 2x > x - 3 \rightarrow 3x - 2x - x - 3 + 3 > 0 \rightarrow 0x > 0$

Para cualquier *x* que consideremos, el primer miembro valdrá siempre 0, por lo que no se cumplirá la desigualdad $0 > 0$. Luego $S = \emptyset$.

h. $4x - 4x - 1 - 9 \leq 0 \rightarrow 0x - 10 \leq 0 \rightarrow 0x \leq 0$.

Para cualquier *x* que consideremos, el primer miembro valdrá siempre 0, por lo que se cumplirá la desigualdad $0 \leq 10$. Luego $S = \mathbb{R}$.

42.

Se necesitan al menos 24 m.

43.

El área de un círculo de radio *r* es $A = \pi r^2$, luego debemos resolver la inecuación

$A > 17 \Leftrightarrow \pi r^2 > 17$

$$\pi r^2 > 17 \Leftrightarrow r^2 - \frac{17}{\pi} > 0$$

$$r^2 - \frac{17}{\pi} = \left(r - \sqrt{\frac{17}{\pi}}\right) \cdot \left(r + \sqrt{\frac{17}{\pi}}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r - \sqrt{\frac{17}{\pi}} = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{17}{\pi}} \\ r + \sqrt{\frac{17}{\pi}} = 0 \Leftrightarrow r = -\sqrt{\frac{17}{\pi}} \end{cases}$$

Determinamos los siguientes intervalos:

$$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{17}{\pi}}\right), \left(-\sqrt{\frac{17}{\pi}}, \sqrt{\frac{17}{\pi}}\right) \text{ y } \left(\sqrt{\frac{17}{\pi}}, +\infty\right)$$

El radio de un círculo es positivo, sólo tendrán sentido las soluciones de la inecuación que sean positivas.

Consideramos, pues, los intervalos con valores positivos. $S_2 = (0, +\infty)$, $S = S_1 \cap S_2 = (0, +\infty)$

$$0 \in \left(-\sqrt{\frac{17}{\pi}}, \sqrt{\frac{17}{\pi}}\right) \rightarrow 0^2 - \frac{17}{\pi} = -\frac{17}{\pi} \not> 0$$

luego $\left(-\sqrt{\frac{17}{\pi}}, \sqrt{\frac{17}{\pi}}\right)$ no es solución.

$$10 \in \left(\sqrt{\frac{17}{\pi}}, +\infty\right) \rightarrow 10^2 - \frac{17}{\pi} = 94{,}58\ldots > 0$$

luego $\left(\sqrt{\frac{17}{\pi}}, +\infty\right)$ es solución.

$r = \sqrt{\frac{17}{\pi}}$ no es solución, pues la desigualdad es estricta.

Por tanto, la solución del problema es:

$$S = \left(\sqrt{\frac{17}{\pi}}, +\infty\right) = \left\{r \in \mathbb{R} : r > \sqrt{\frac{17}{\pi}}\right\}$$

Solucionario

1. a. $\frac{125}{18a^2}\sqrt{\frac{1}{2}}$ b. $-\frac{8}{5}b\sqrt{10a}$

a. C = 2x + 1, R = 6

b. $C = 2x^3 - 4x^2 + 8x - 19$, R = 42

c. $C = 7x^3 - 12x^2 + 1$, R = -1

2.
Representar:

4.
Reemplazando (2, -1) en cada inecuación, se obtiene:
a. 2 .2 – 3. (-1) > 5 → 4+3> 5, 7>5. Sí pertenece
b. 4. 2 + 3. (-1) < 0 → 8-3< 0, 5< 0. No pertenece

5.
a. Los puntos (3,-1) y (4,-2) son solución de $3x - 2y \geq 7$
b. Los puntos (1,-6) y (5,-1) son solución de $5x - y > 1$

Escribámosla de la manera usual:

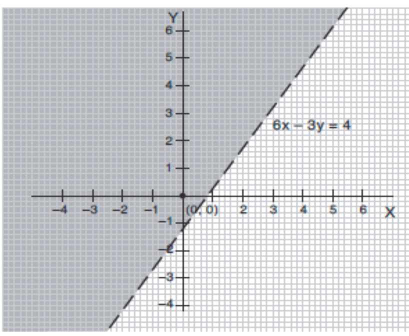
$$\frac{2x-y}{4} < \frac{3-2x+y}{5} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10x - 5y < 12 - 8x + 4y \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10x + 8x - 4y - 5y < 12 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 18x - 9y < 12 \Leftrightarrow 6x - 3y < 4$$

La recta que nos define el semiplano solución, aunque no forma parte de él, ya que la desigualdad es estricta, es:

$$6x - 3y = 4$$

Probamos con (0, 0):

$6 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0 < 4$, luego (0, 0) es solución y por tanto el semiplano solución es el que contiene al (0, 0).



b) $\frac{x-6y}{3} < 2y - 5 \Leftrightarrow$

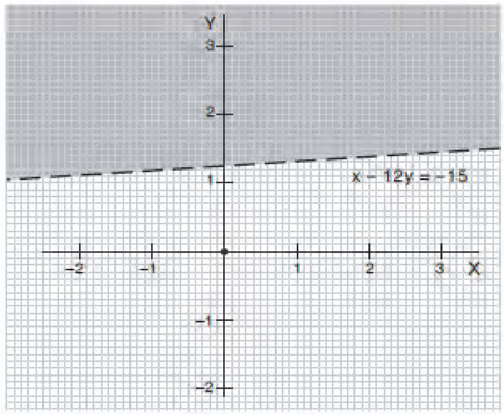
$\Leftrightarrow x - 6y < 6y - 15 \Leftrightarrow x - 12y < -15$

La recta que nos define el semiplano solución, aunque no forma parte de él, ya que la desigualdad es estricta, es:

$$x - 12y = -15$$

Probamos con (0, 0):

$0 - 12 \cdot 0 = 0 \not< -15$, luego el semiplano solución es el que no contiene al (0, 0).



c) $\frac{x-3y}{2} - \frac{5y-1}{3} < 0 \Leftrightarrow$

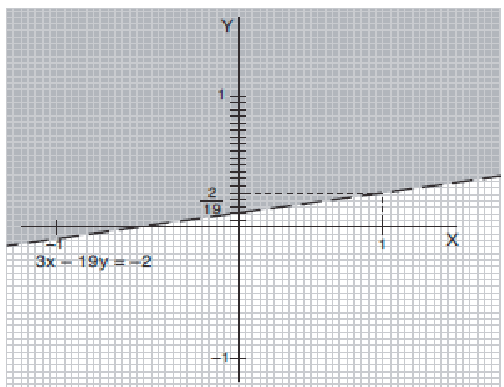
$\Leftrightarrow 3x - 9y - 10y + 2 < 0 \Leftrightarrow 3x - 19y < -2$

La recta que define el semiplano solución, aunque no forma parte de él, ya que la desigualdad es estricta, es:

$$3x - 19y = -2$$

Probamos con (0, 0):

$3 \cdot 0 - 19 \cdot 0 = 0 \not< -2$ no es solución, luego el semiplano solución es el que no contiene al (0, 0)



Página 54

Solucionario

10.

a. $\log_2 p + \log_2 q = 5 + (-2) = 3$

b. $\log_2 p^2 = 2.\log_2 p = 2.\,5 = 10$

c. $\log_2 \left(\frac{p^5}{q}\right) = \log_2 p^5 - \log_2 q = 5\log_2 p - \log_2 q$

$- \log_2 q = 5.\,5 - (-2) = 25 + 2 = 27$

d) $\frac{2}{3}x - 5(y-2) < 3(3y-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x - 15(y-2) < 9(3y-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x - 15y + 30 - 27y + 9 < 0 \Leftrightarrow$

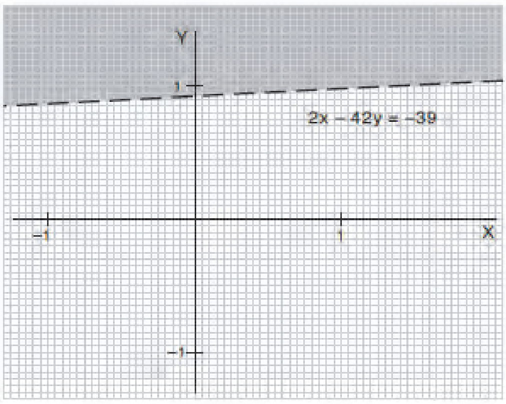
$\Leftrightarrow 2x - 42y < -39$

La recta que define el semiplano solución, aunque no forma parte de él, ya que la desigualdad es estricta, es:

$$2x - 42y = -39$$

Probamos con $(0, 0)$:

$2 \cdot 0 - 39 \cdot 42 \cdot 0 \not< -39$, luego el semiplano solución es el que no contiene al $(0, 0)$.



11.

a. $\log\left(\frac{p \cdot q}{r}\right)$

b. $\log \frac{p}{q^2}$

12.

a. 2,3010
b. 0,3980
c. −0,4515

Página 46

ZONA

UD. 1
NÚMEROS REALES

Euler y los matemáticos de su tiempo

«Lean a Euler, lean a Euler; él es el maestro de todos nosotros».
(Pierre S. Laplace)

Esta frase la pronunció Pierre Simon Laplace (1749 - 1827), un colega de una generación posterior a Leonhard Euler, que admiraba su prolífica obra (entre 60 y 80 volúmenes).

- **Busca** en la Red dos definiciones algebraicas del número e enunciadas por Euler y anótalas en tu cuaderno.
- **Busca** también el valor del número e, tal como lo describió Euler (con veintitrés cifras decimales). ¿Cuántas cifras decimales se han podido obtener con la tecnología actual?

Dublín y los logaritmos

James Joyce (1882 - 1941) es quizás el escritor francés más famoso, conocido sobre todo por su obra maestra (1922). En ella se describe de manera exhaustiva y detallada la ciudad de Dublín, sobre la que se plantea el siguiente enigma: ¿se puede cruzar la capital irlandesa sin pasar por delante de ningún pub? Matemáticamente es muy difícil responder dicha pregunta, pero recientemente el informático Rory McCann aseguró tener una respuesta basada en los logaritmos.

- **Entra** en la Red y accede a: http://links.edebe.com/cp, en la que encontrarás más información. ¿En qué elementos se basa dicho cálculo?
- **Busca** también información sobre otros ámbitos (técnicos, sociales, culturales, artísticos...) en los que investigan los logaritmos y prepara una breve presentación de diapositivas (5 minutos) para exponer en clase tus resultados.

Ingeniero químico

Me pudiera desempeñar en diferentes campos, y por tanto, podría trabajar en diversas industrias como son la petroquímica, la industria de los plásticos y los productos transformados, la industria de las fibras y los tejidos, la farmacéutica, la veterinaria, la industria del papel, la adobería, la industria de las pinturas y barnices, metalúrgica, etc. También en diferentes empresas de ingeniería, servicios y consultoría; en centros de investigación, desarrollo tecnológico e innovación, en el tratamiento y elaboración de métodos de recuperación y comercialización de residuos o bien a la consultoría medioambiental, de seguridad o higiene.

Y como la formación específica se centra en la ingeniería química, donde se abordan los estudios de procesos industriales en los que las sustancias experimentan una modificación en su composición, estado físico o contenido energético, necesito conocer y aplicar correctamente los logaritmos para calcular el pH de las sustancias, es decir, medir la acidez o la alcalinidad de una sustancia.

El cálculo del IPC

El (índice de precios al consumo) indica la variación de los precios de diversos artículos y servicios entre dos periodos de tiempo. En España se calcula mediante la de la que forma parte un determinado polinomio con coeficientes porcentuales.

1. **Formen** grupos de tres componentes y **distribuyan** los roles y las tareas con el fin de investigar qué es el IPC.
2. **Busquen** información en distintas fuentes para averiguar qué tipo de artículos y servicios se utilizan para calcular el IPC en España y de dónde se obtienen estos datos.
3. ¿Crees que es ajustada la distribución porcentual de dichos artículos y servicios teniendo en cuenta el uso real que se hace de cada uno de ellos?
4. **Efectúen** un cálculo simplificado del IPC en su barrio o población. Para ello, **definan** una cesta de la compra básica y en el supermercado más próximo **determinen** la evolución semanal del precio de vuestra cesta a lo largo de un par de meses. **Comparen** el resultado obtenido con la variación real del IPC en el mismo periodo.
5. **Expongan** en clase el método que **han** seguido y su conclusiones.

55

- **Euler y los matemáticos de su tiempo**

Respuesta sugerida:
La constante matemática *e* es el único número real tal que el valor de su derivada (la pendiente de su línea tangente) en la función *f(x)* = *ex* en el punto *x* = 0 es exactamente 1.

La definición más común de *e* es como el valor límite de la serie

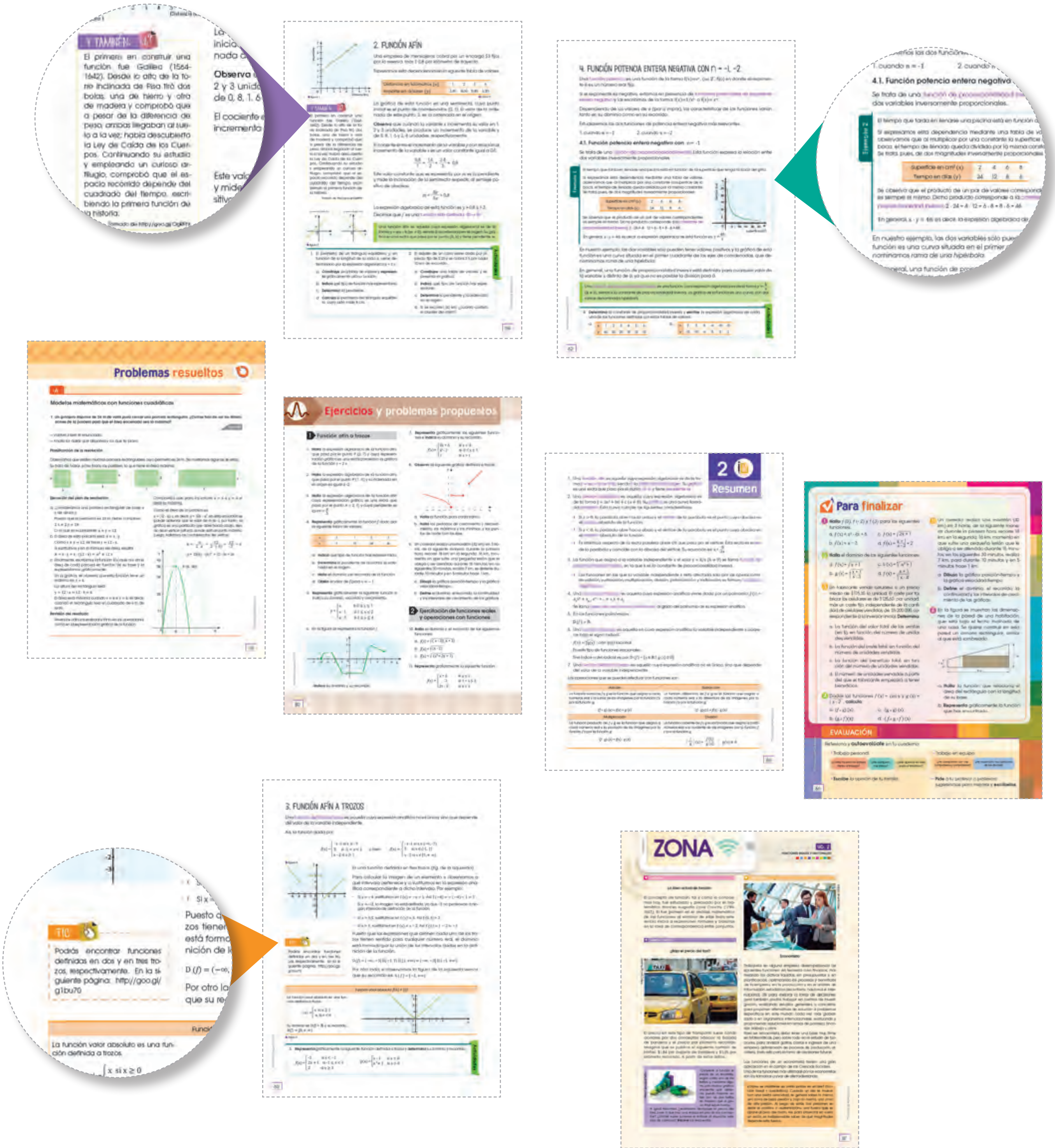
$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

• El valor del número *e* es 2,718 281 828 459 045 235 360 28. Hasta la actualidad se han encontrado 1 000 000 000 000 cifras.

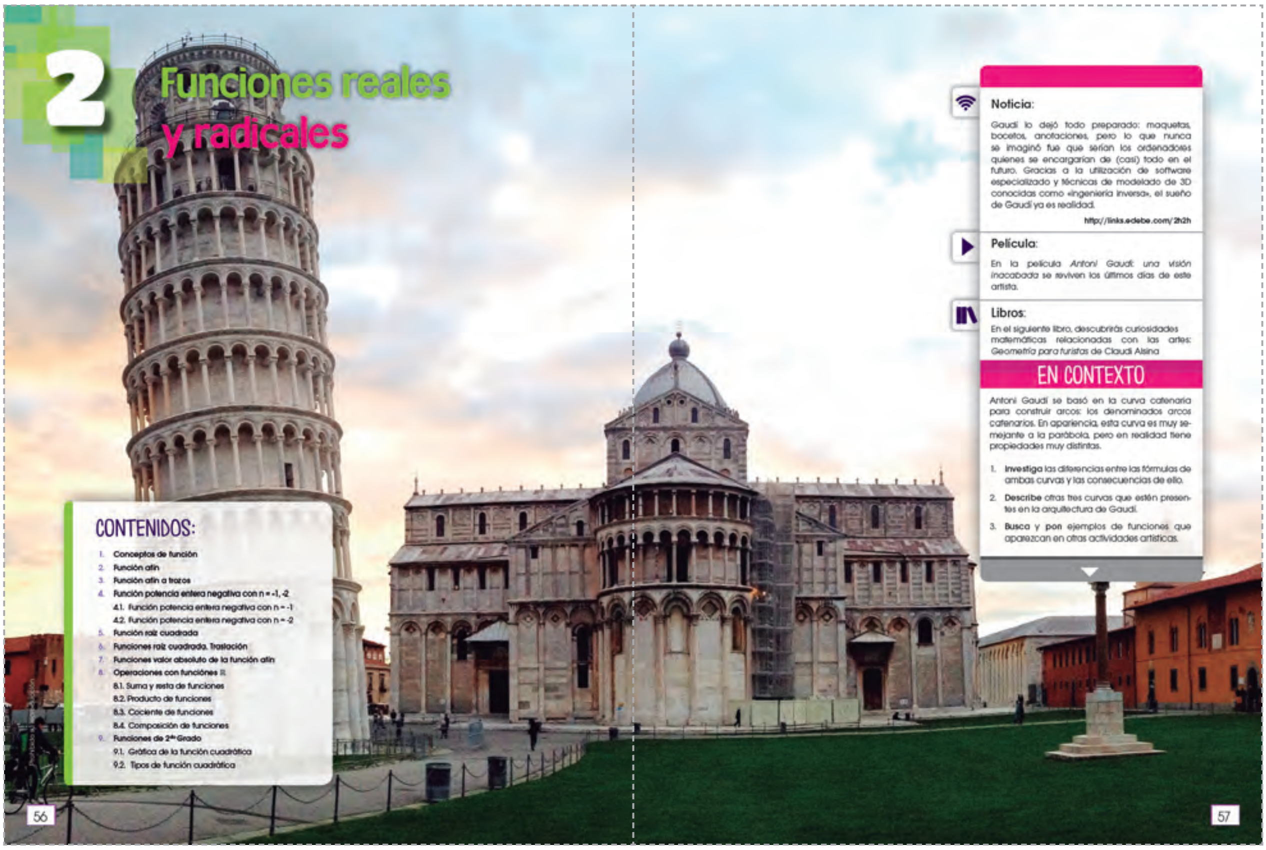
- **Dublín y los logaritmos**

• McCann señaló 15 puntos a lo largo de los dos canales que delimitaban Dublín en la época de Joyce y trató de unirlos usando un algoritmo que encontrara un camino de norte a sur y de este a oeste que pasara a no menos de 35 metros de cada uno de esos puntos.
• Respuesta sugerida:
Los logaritmos están presentes en química cuando se mide el *pH*, en la interpretación de la intensidad de un terremoto, en el crecimiento de poblaciones, en psicología…

Funciones reales y radicales



UNIDAD 2



2 Funciones reales y radicales

CONTENIDOS:

1. Conceptos de función
2. Función afín
3. Función afín a trozos
4. Función potencia entera negativa con n = -1, -2
   4.1. Función potencia entera negativa con n = -1
   4.2. Función potencia entera negativa con n = -2
5. Función raíz cuadrada
6. Funciones raíz cuadrada. Traslación
7. Funciones valor absoluto de la función afín
8. Operaciones con funciónes ℝ
   8.1. Suma y resta de funciones
   8.2. Producto de funciones
   8.3. Cociente de funciones
   8.4. Composición de funciones
9. Funciones de 2do Grado
   9.1. Gráfica de la función cuadrática
   9.2. Tipos de función cuadrática

56

Noticia:

Gaudí lo dejó todo preparado: maquetas, bocetos, anotaciones, pero lo que nunca se imaginó fue que serían los ordenadores quienes se encargarían de (casi) todo en el futuro. Gracias a la utilización de software especializado y técnicas de modelado de 3D conocidas como «ingeniería inversa», el sueño de Gaudí ya es realidad.

http://links.edebe.com/2h2h

Película:

En la película *Antoni Gaudí: una visión inacabada* se reviven los últimos días de este artista.

Libros:

En el siguiente libro, descubrirás curiosidades matemáticas relacionadas con las artes: *Geometría para turistas* de Claudi Alsina

EN CONTEXTO

Antoni Gaudí se basó en la curva catenaria para construir arcos: los denominados arcos catenarios. En apariencia, esta curva es muy semejante a la parábola, pero en realidad tiene propiedades muy distintas.

1. **Investiga** las diferencias entre las fórmulas de ambas curvas y las consecuencias de ello.
2. **Describe** otras tres curvas que estén presentes en la arquitectura de Gaudí.
3. **Busca y pon** ejemplos de funciones que aparezcan en otras actividades artísticas.

57

	V V VVVVV
Funciones reales y radicales	1. Concepto de función (58) 2. Función afín (59) 3. Función afín a trozos. (60) 4. Función potencia entera negativa con n= -1, -2. (62-64) 5. Función raíz cuadrada. (65) 6. Función raíz cuadrada. Traslaciones (66) 7. Función valor absoluto de la función afín (67) 8. Operaciones con funciones reales (68) 9 Repaso de función cuadrática (72-78)

Criterios de evaluación

- Opera y emplea funciones reales, lineales, cuadráticas, polinomiales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas para plantear situaciones hipotéticas y cotidianas que puedan resolverse mediante modelos matemáticos; comenta la validez y limitaciones de los procedimientos empleados y verifica sus resultados mediante el uso de las TIC.

Elementos del perfil de salida a los que se contribuye

- Procedemos con respeto y responsabilidad con nosotros y con las demás personas, con la naturaleza y con el mundo de las ideas. Cumplimos nuestras obligaciones y exigimos la observación de nuestros derechos.

I.2. Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, re-flexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos e información posibles.

I.3. Sabemos comunicarnos de manera clara en nuestra lengua y en otras, utilizamos varios lenguajes como el numérico, el digital, el artístico y el corporal; asumimos con responsabilidad nuestros discursos.

Actuamos de manera organizada, con autonomía e independencia; aplicamos el razonamiento lógico, crítico y complejo; y practicamos la humildad intelectual en un aprendizaje a lo largo de la vida.

Destrezas con criterios de desempeño

Álgebra y funciones

- Graficar y analizar el dominio, el recorrido, la monotonía, ceros, extremos y paridad de las diferentes funciones reales (función afín a trozos, función potencia entera negativa con n = -1, -2, función raíz cuadrada, función valor absoluto de la función afín) utilizando TIC.
- Realizar la composición de funciones reales analizando las características de la función resultante (dominio, recorrido, monotonía, máximos, mínimos, paridad).
- Resolver (con o sin el uso de la tecnología) problemas o situaciones, reales o hipotéticas, con el empleo de la modelización con funciones reales (función afín a trozos, función potencia entera negativa con n = -1, -2, función raíz cuadrada, función valor absoluto de la función afín), identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas; juzgar la pertinencia y validez de los resultados obtenidos.
- Realizar las operaciones de adición y producto entre funciones reales, y el producto de números reales por funciones reales, aplicando propiedades de los números reales.
- Realizar operaciones de suma, multiplicación y división entre funciones polinomiales, y multiplicación de números reales por polinomios, en ejercicios algebraicos de simplificación.
- Determinar el dominio, rango, ceros, paridad, monotonía, extremos y asíntotas de funciones racionales con cocientes de polinomios de grado ≤3 con apoyo de las TIC.
- Realizar operaciones de suma y multiplicación entre funciones racionales y de multiplicación de números reales por funciones racionales en ejercicios algebraicos, para simplificar las funciones.

Objetivo del área por subnivel

- O.M.5.2. Producir, comunicar y generalizar información, de manera escrita, verbal, simbólica, gráfica y/o tecnológica, mediante la aplicación de conocimientos matemáticos y el manejo organizado, responsable y honesto de las fuentes de datos, para así comprender otras disciplinas, entender las necesidades y potencialidades de nuestro país, y tomar decisiones con responsabilidad social.

Indicadores para la evaluación del criterio

- Grafica funciones reales y analiza su dominio, recorrido, monotonía, ceros, extremos, paridad; identifica las funciones afines, potencia, raíz cuadrada, valor absoluto; reconoce si una función es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva; realiza operaciones con funciones aplicando las propiedades de los números reales en problemas reales e hipotéticos. (I.4.)
- Reconoce funciones polinomiales de grado n, opera con funciones po-linomiales de grado ≤4 y racionales de grado ≤3; plantea modelos matemáticos para resolver problemas aplicados a la informática; emplea el teorema de Hor-ner y el teorema del residuo para factorizar polinomios; con la ayuda de las TIC, escribe las ecuaciones de las asíntotas, y discute la validez de sus resultados.

Objetivo integrados del área por subnivel

- OI.5.2. Aplicar conocimientos de diferentes disciplinas para la toma de decisiones asertivas Y socialmente responsables, a partir de un proceso de análisis que justifique la validez de sus hallazgos, poniendo especial cuidado en el uso técnico y ético de diversas fuentes y demostrando honestidad académica.
- OI.5.11. Reflexionar y tomar decisiones respecto a una sexualidad responsable y a su participación sistemática en prácticas corporales y estéticas, considerando su repercusión en una vida saludable y la influencia de las modas en la construcción de los hábitos y de las etiquetas sociales en la concepción de la imagen corporal.

Básicos imprescindibles | Básicos deseables

Eje temático	Destrezas con criterio de desempeño
Funciones reales y radicales	Graficar y analizar el dominio, el recorrido, la monotonía, ceros, extremos y paridad de las diferentes funciones reales (función afín a trozos, función potencia entera negativa con n=-1, -2, función raíz cuadrada, función valor absoluto de la función afín) utilizando TIC.
	Resolver (con o sin el uso de la tecnología) problemas o situaciones, reales o hipotéticas, con el empleo de la modelación con funciones reales (función afín a trozos, función potencia entera negativa con n= -1, -2, función raíz cuadrada, función valor absoluto de la función afín), identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas; juzgar la pertinencia y validez de los resultados obtenidos.
	Realizar las operaciones de adición y producto entre funciones reales, y el producto de números reales por funciones reales, aplicando propiedades de los números reales.
	Resolver (con o sin el uso de la tecnología) problemas o situaciones, reales o hipotéticas, que pueden ser modelados con funciones cuadráticas, identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas; juzgar la pertinencia y validez de los resultados obtenidos.
	Determinar el dominio, rango, ceros, paridad, monotonía, extremos y asíntotas de funciones racionales con cocientes de polinomios de grado ≤3 con apoyo de las TIC.
	Realizar operaciones de suma y multiplicación entre funciones racionales y de multiplicación de números reales por funciones racionales en ejercicios algebraicos, para simplificar las funciones.
	Realizar la composición de funciones reales analizando las características de la función resultante (dominio, recorrido, monotonía, máximos, mínimos, paridad).
	Resolver y plantear aplicaciones de la composición de funciones reales en problemas reales o hipotéticos.
	Reconocer funciones polinomiales de grado n (entero positivo) con coeficientes reales en diversos ejemplos.
	Realizar operaciones de suma, multiplicación y división entre funciones polinomiales, y multiplicación de números reales por polinomios, en ejercicios algebraicos de simplificación.
	Resolver problemas o situaciones que pueden ser modelados con funciones polinomiales, identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas, y juzgar la validez y pertinencia de los resultados obtenidos.
	Graficar funciones racionales con cocientes de polinomios de grado ≤3 en diversos ejemplos, y determinar las ecuaciones de las asíntotas, si las tuvieran, con ayuda de la TIC.

<table>
<tr><td>LOGO INSTITUCIONAL</td><td colspan="4">NOMBRE DE LA INSTITUCIÓN</td><td colspan="3">AÑO LECTIVO</td></tr>
<tr><td colspan="8">PLAN DE UNIDAD TEMÁTICA</td></tr>
<tr><td colspan="8">1. DATOS INFORMATIVOS:</td></tr>
<tr><td>Docente:</td><td>Nombre del docente que ingresa la información</td><td>Área/asignatura:</td><td>MATEMÁTICA</td><td>Grado/Curso:</td><td>1° BACHILLERATO</td><td>Paralelo:</td><td></td></tr>
<tr><td>N.º de unidad de planificación:</td><td>1</td><td>Título de unidad de planificación:</td><td>FUNCIONES REALES Y RADICALES</td><td colspan="2">Objetivos específicos de la unidad de planificación:</td><td colspan="2">Valorar sobre la base de un pensamiento crítico, creativo, reflexivo y lógico la vinculación de los conocimientos matemáticos
Con los de otras disciplinas
Científicas y los saberes
Ancestrales para plantear
Soluciones a problemas de la realidad y contribuir al desarrollo del entorno social, natural y cultural.

Desarrollar la curiosidad y la creatividad en el uso de herramientas matemáticas
al momento de enfrentar y solucionar problemas de la realidad nacional demostrando actitudes de orden, perseverancia y
capacidades de investigación.</td></tr>
<tr><td>PERÍODOS</td><td colspan="2">30</td><td colspan="2"></td><td>SEMANA DE INICIO:</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="8">2. PLANIFICACIÓN</td></tr>
<tr><td colspan="6">DESTREZAS CON CRITERIOS DE DESEMPEÑO A SER DESARROLLADAS:</td><td colspan="2">CRITERIOS DE EVALUACIÓN</td></tr>
<tr><td colspan="6">• Graficar y analizar el dominio, el recorrido, la monotonía, ceros, extremos y paridad de las diferentes funciones reales (función afín a trozos, función potencia entera negativa con n= -1, -2, función raíz cuadrada, función valor absoluto de la función afín) utilizando TIC.
• Realizar la composición de funciones reales analizando las características de la función resultante (dominio, recorrido, monotonía, máximos, mínimos, paridad).
• Resolver (con o sin el uso de la tecnología) problemas o situaciones reales o hipotéticas con el empleo de la modelización con funciones reales (función afín a trozos, función potencia entera negativa con n= -1, -2, función raíz cuadrada, función valor absoluto de la función afín), identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas; juzgar la pertinencia y validez de los resultados obtenidos.
• Realizar las operaciones de adición y producto entre funciones reales, y el producto de números reales por funciones reales aplicando propiedades de los números reales.
• Resolver (con o sin el uso de la tecnología) problemas o situaciones reales o hipotéticas que pueden ser modelizados con funciones cuadráticas identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas; juzgar la pertinencia y validez de los resultados obtenidos.</td><td colspan="2">CE.M.5.3. Opera y emplea funciones reales, lineales, cuadráticas, polinomiales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas para plantear situaciones hipotéticas y cotidianas que puedan resolverse mediante modelos matemáticos; comenta la validez y limitaciones de los procedimientos empleados y verifica sus resultados mediante el uso de las TIC.</td></tr>
</table>

• Realizar operaciones de suma, multiplicación y división entre funciones polinomiales y multiplicación de números reales por polinomios en ejercicios algebraicos de simplificación. • Aplicar las operaciones entre polinomios de grados =4, esquema de Hörner, teorema del residuo y sus respectivas propiedades para factorizar polinomios de grados =4 y reescribir los polinomios. • Resolver problemas o situaciones que pueden ser modelizados con funciones polinomiales identificando las variables significativas • Presentes y las relaciones entre ellas y juzgar la validez y pertinencia de los resultados obtenidos. • Graficar funciones racionales con cocientes de polinomios de grado =3 en diversos ejemplos y determinar las ecuaciones de las asíntotas si las tuviera con ayuda de la TIC. • Determinar el dominio, rango, ceros, paridad, monotonía, extremos y asíntotas de funciones racionales con cocientes de polinomios de grado =3 con apoyo de las TIC. • Realizar operaciones de suma y multiplicación entre funciones racionales y de multiplicación de números reales por funciones racionales en ejercicios algebraicos para simplificar las funciones. • Resolver aplicaciones, problemas o situaciones que pueden ser modelizados con funciones racionales identificando las variables • Significativas presentes y las relaciones entre ellas y juzgar la validez y pertinencia de los resultados obtenidos con apoyo de las TIC. • Reconocer y graficar funciones exponenciales analizando sus características: monotonía, concavidad y comportamiento al infinito. • Aplicar las propiedades de los exponentes y los logaritmos para resolver ecuaciones e inecuaciones con funciones exponenciales • y logarítmicas con ayuda de las TIC. • Reconocer y resolver aplicaciones, problemas o situaciones reales o hipotéticas que pueden ser modelizados con funciones exponenciales o logarítmicas identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas y juzgar la validez y pertinencia de los resultados obtenidos.	

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	RECURSOS	INDICADORES DE LOGRO	TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN
Experiencia Representación concreta, mediante gráficos de las funciones racinales y poligonales. Resolución dfe problemas de aplicación de funciones. Conceptualización Uso de diagramas que resuman los principales conceptos, propiedades y procedimientos con logaritmos.		M.5.3.1. Grafica funciones reales y analiza su dominio, recorrido, monotonía, ceros, extremos, paridad; identifica las funciones afines, potencia, raíz cuadrada, valor absoluto; reconoce si una función es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva; realiza operaciones con funciones aplicando las propiedadesde los números reales en problemas reales e hipotéticos.(I.4.)	

Uso de sofwares que refuercen la resolución de ecuaciones e inecuaciones Aplicación ¿Por qué es importante el uso y aplicación de los números reales? Planteamineto y resolución de problemas que involucren funciones reales y racionales. Reflexión ¿Qué diferencia el conjunto de los números reales del resto de conjuntos estudiados? Identificación, en ejercicios o problemas de las caracteristicas de las funciones, dadas mediante su expresión algebraica o su gráfico. Reflexión y análisis sobre la aplicación de las funciones en el entorno.	- Texto - Cuaderno - Videos (sitios web) - Pizarra - Calculadora	M.5.3.2. Representa gráficamente funciones cuadráticas; halla las intersecciones con los ejes, el dominio, rango, vértice y monotonía; emplea sistemas de ecuaciones para calcular la intersección entre una recta y una parábola o dos parábolas; emplea modelos cuadráticos para resolver problemas, de manera intuitiva halla un límite y la derivada; optimiza procesos empleando las TIC. (13, 14) M.5.3.3. Reconoce funciones polinomiales de grado n, opera con funciones polinomiales de grado =4 y racionales de grado =3; plantea modelos matemáticos para resolver problemas aplicados a la informática; emplea el teorema de Horner y el teorema del residuo para factorizar polinomios; con la ayuda de las TIC, escribe las ecuaciones de las asíntotas, y discute la validez de sus resultados. (I.3., I.4.) M.5.3.4. Halla gráfica y analíticamente el dominio, recorrido, monotonía, periodicidad, desplazamientos, máximos y mínimos de funciones trigonométricas para modelar movimientos circulares y comportamientos de fenómenos naturales, y discute su pertinencia; emplea la tecnología para corroborar sus resultados. (J.3., I.2.) M.5.3.5. Obtiene la gráfica de una función exponencial a partir de a^x, mediante traslaciones, homotecias y reflexiones; concibe la función logarítmica como inversa de la función exponencial; aplica propiedades de los logaritmos y halla su dominio, recorrido, asíntotas, intersecciones con los ejes; las aplica en situaciones reales e hipotéticas, con y sin apoyo de la tecnología. (I.3.)	Reconocer, interpretar, graficar, analizar las características y operar con funciones de variable real (lineal, cuadrática, exponencial, logarítmica, trigonométrica, polinomiales y racionales). Que el estudiante analice el dominio, el recorrido, la monotonía, los ceros, máximos y mínimos, paridad y composición de las diferentes funciones. También se incluyen las propiedades de inyectividad, sobreyectividad y biyectividad. Apoyándose con las TIC, debe poder graficar, interpretar y encontrar las intersecciones con los ejes, y la intersección de las gráficas de funciones; además de hallar la solución de ecuaciones de manera gráfica; interpretar geométricamente la derivada de una función cuadrática y sus aplicaciones; y comprender la noción de límite y su aplicación, así como la modelización de situaciones reales a través de las funciones.

ELEMENTOS DEL PERFIL DE SALIDA
J.3. Procedemos con respeto y responsabilidad con nosotros y con las demás personas, con la naturaleza y con el mundo de las ideas. Cumplimos nuestras obligaciones y exigimos la observación de nuestros derechos. I.2. Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para Resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos e información posibles. I.3. Sabemos comunicarnos de manera clara en nuestra lengua y en otras, utilizamos varios lenguajes como el numérico, el digital, el artístico y el corporal; asumimos con Responsabilidad nuestros discursos. I.4. Actuamos de manera organizada, con autonomía e independencia; aplicamos el razonamiento lógico, crítico y complejo; y practicamos la humildad intelectual en un aprendizaje a lo largo de la vida.

ELABORADO	REVISADO	APROBADO
Docente:	Director del área :	Vicerrector:
Firma:	Firma:	Firma:
Fecha:	Fecha:	Fecha:

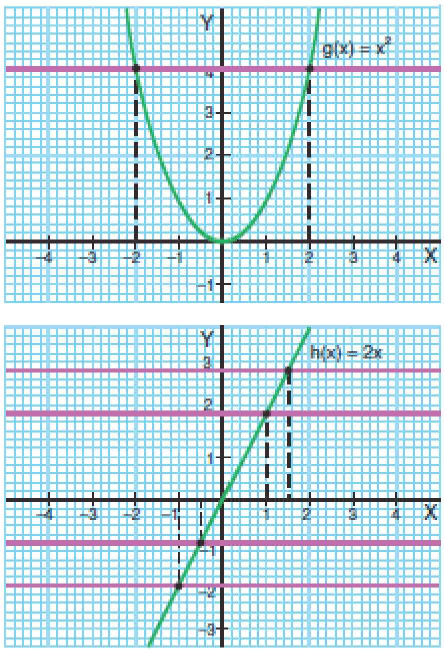


Fig. 2.

Ampliación de contenidos.
En la gráfica de una función podemos observar ciertas características de las funciones que nos aportan información sobre su comportamiento.

Funciones invectivas, exhaustivas y biyectivas
Observa en la figura 2 las gráficas de $g(x) = x^2$ y $h(x) = 2x$:

- Podemos trazar al menos una recta horizontal sobre la gráfica de la función g que la intercepte en más de un punto. Así, si consideramos la recta horizontal $y = 4$, vemos que existen dos elementos diferentes del dominio de g, $x = -2$ y $x = 2$, que tienen la misma imagen, $g(x) = 4$.
- Cualquier recta horizontal que tracemos sobre la gráfica de la función h la intercepta como máximo en un punto. Así, para toda recta horizontal que consideremos, vemos que no existen elementos diferentes del dominio de h que tengan la misma imagen.

Una función f es inyectiva si dos elementos distintos cualesquiera de su dominio tienen imágenes distintas por f, es decir, si se cumple: $\boldsymbol{x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)}$
Luego h es inyectiva, mientras que g no lo es.
Considera de nuevo las funciones representadas en la figura 2:

- El recorrido de g es el conjunto de los números reales mayores o iguales que cero, es decir, $R(g) = [0, +\infty)$.
- El recorrido de h es el conjunto de todos los números reales, es decir, $R(h) =$ |R.

Una función f es exhaustiva si su recorrido coincide con el conjunto de los números reales: $\boldsymbol{R(f)} = \mathrm{R}$
Así, h es exhaustiva, mientras que g no lo es.
Una función es **biyectiva** si es a la vez inyectiva y exhaustiva.
Así, la función h es biyectiva, mientras que la función g no lo es.

FIJATE

Si la función es exhaustiva, cualquier recta horizontal que consideremos corta a la gráfica al menos en un punto.

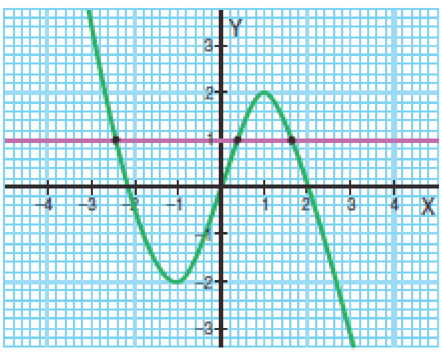


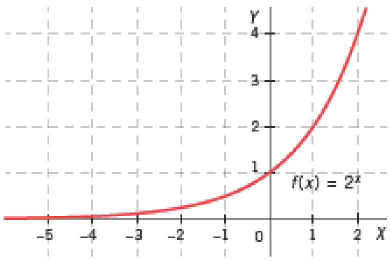
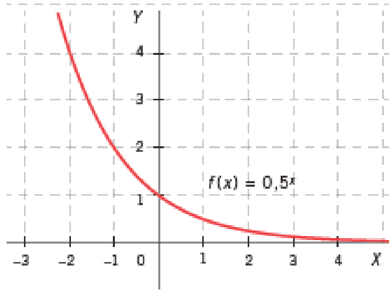
Fig. 3.

La función no es inyectiva, puesto que la recta horizontal dibujada corta a la gráfica en tres puntos. Es decir, hay tres valores diferentes de x que tienen la misma imagen.
En cambio, sí es exhaustiva, ya que cualquier recta horizontal que consideremos corta a su gráfica al menos en un punto, es decir, $R(f) = \mathrm{R}$.
Así, puesto que la función es exhaustiva pero no inyectiva, no será biyectiva.

Otros tipos de funciones

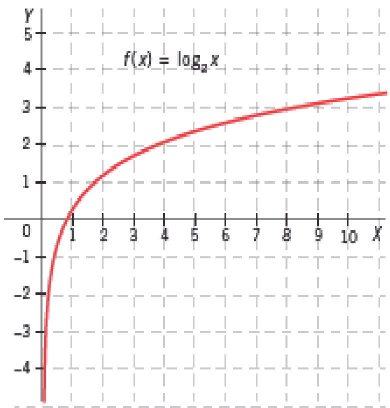
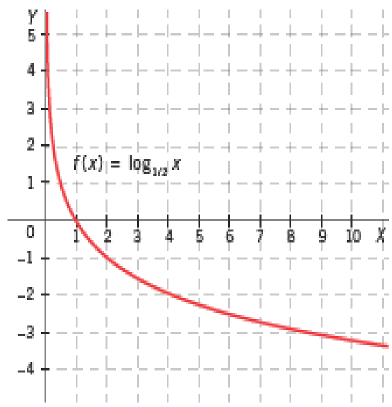
Función exponencial

Las funciones exponenciales son aquellas cuya expresión analítica tiene la forma: $f(x) = ka^x$, donde a es un número real positivo ($a \neq 1$) y k, una constante real.

PROPIEDADES	FUNCIÓN EXPONENCIAL CON $a > 1$	FUNCIÓN EXPONENCIAL CON $0 < a < 1$
$D(f) = \mathbb{R}$; $R(f) = \mathbb{R}^+$ Si $a > 1$, la función es estrictamente creciente. Si $a < 1$, la función es estrictamente decreciente. La función corta al eje de ordenadas en el punto (0, 1). Tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.		

Función logarítmica

La función logarítmica de base a es la función inversa de la función exponencial de base a y su expresión analítica es de la forma: $f(x) = k \log_a x$, donde a es un número real positivo distinto de 1 ($a > 0$, $a \neq 1$) y k, una constante positiva.
Si la base es 10, se denomina logaritmo decimal y se representa: $f(x) = \log x$
El logaritmo de base e se denomina neperiano y se representa: $f(x) = \ln x$

PROPIEDADES	FUNCIÓN LOGARÍTMICA CON $a > 1$	FUNCIÓN LOGARÍTMICA CON $a < 1$
$D(f) = \mathbb{R} - \{x \leq 0\}$ Si $a > 1$, la función es estrictamente creciente. Si $a < 1$, la función es estrictamente decreciente. La función corta al eje de abscisas en el punto (1, 0). Tiene una asíntota vertical en $x = 0$.		

Nombre: ______________________ Fecha: ______________

1. ¿Cuál de las siguientes funciones cumple que D (f) = R y R (f) = R?

a) f (x) = 10   b) f (x) = 5x – 6   c) f (x) = $x^2 + 2$

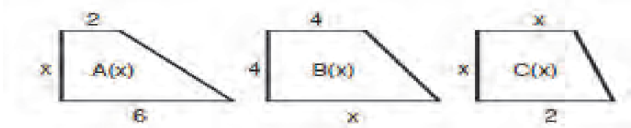
2. El dominio y el recorrido de la siguiente función f(x)= $\sqrt[5]{x+5}$ es:

a) D (f)=[0,+∞) y R(f)=[0,+∞)   b) D(f)=|R y R(f)=[0,+∞)   c) D(f)=|R y R(f)=|R

3. **Enlaza** la columna A con la B, para indicar el dominio , que le corresponde a cada función:

A	B
f(x)=$\sqrt{x+1}$	D(f)=|R-{-1}
f(x)=x^3-5x^2+2	D(f)= □(0, □□);
f(x)= $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$	D(f)=|R-{1}
f(x)=$\dfrac{x-1}{x+1}$	D(f)= [−1, +∞);
f(x)= $\dfrac{1}{x^2-x}$	D(f) = |R

4. **Relaciona** cada trapecio de la siguiente figura con su área correspondiente.



1) $\dfrac{x^2}{2}+x$ 2) 4x   3)2x + 8

5. Sea f(x)= $\dfrac{1}{x}$ y g(x) = x - 2, la función producto f . g y la función cociente $\dfrac{f}{g}$,respectivamente, son:

a. $\dfrac{x-2x}{x}$, $\dfrac{x-2}{x}$

b. $\dfrac{x-2}{x}$; $\dfrac{1}{x^2-2x}$

c. $\dfrac{x-1}{x}$; x(x-2)

6. La expresión de la función compuesta $g_o f$ de las funciones f(x) = $\sqrt{x+6}$ y g(x) = $x^2 - 1$, es:

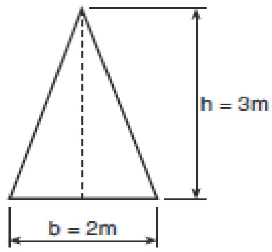
a. $\sqrt{x+5}$
b. $\sqrt{x^2+5}$
c. x + 5

Nombre: ______________________ Fecha: ______________

7. Halla la monotonía, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos absolutos y relativos y el corte con los ejes de las siguientes funciones:

a. $f(x) = x^2 - 5x + 4$ b. $f(x) = \dfrac{-x+1}{2}$

8. La tela de una tienda de campaña tiene la forma triangular de la figura. Se quiere hacer un agujero rectangular que sirva de puerta, de manera que la base del rectángulo y la base del triángulo tengan el mismo punto medio, y dos vértices de la puerta estén situados en los otros dos lados de la tela.
a. **Expresa** el área de la puerta en función de la longitud de su base.
b. **Representa** gráficamente la función que has hallado.



9. Comprueba la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición con las siguientes funciones: $f(x)=3x^2-1$ $g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ $h(x)=\dfrac{x}{5}$

10. Comprueba que la composición de las funciones: $f(x) = x + 3$ y $g(x) = x^2 - 1$ no es conmutativa:

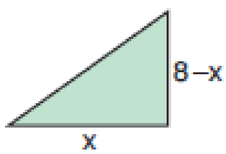
11. Dadas las siguientes funciones: $f(x) = x^2 - 25$, $g(x) = e^x$

a. **Calcula** el dominio y el recorrido de las funciones.
b. **Representa** las funciones.
c. **Calcula** $(f \circ g)$ y $(g \circ f)$.
d. **Representa** las dos nuevas funciones.
e. **Indica** en la representación el dominio, el recorrido, los máximos y los mínimos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

12. Representa gráficamente la siguiente función e indica su dominio y su recorrido.

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq -3 \\ 4 & \text{si } -2 < x \leq 0 \\ x^2-5x+4 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

13. Determina, para el siguiente triángulo rectángulo:
a. La función que relaciona el área con la longitud de la base.
b. El área máxima.



14. Se lanza verticalmente desde tierra un objeto con una velocidad inicial $v_0=100$ m/s. ¿Qué altura máxima alcanzará el objeto? ¿Qué tiempo tardará en caer al suelo?

Recurso para la evaluación

1. La función que cumple que D(f) = R y R(f) = R
Es la b.: f (x) = 5x – 6

2. El dominio y el recorrido de la función f(x) = $\sqrt[5]{x+5}$ es:
a. D (f) = [0,+∞) y R (f) = [0, +∞)
b. D (f) = |R y R (f) = [0,+∞)
c. D (f) = |R y R (f) = |R

3. f(x) = $\sqrt{x+1}$ $\quad (D(f) = [-1, +\infty);$
f(x) = x^3-5x^2+2 $\quad \Rightarrow$ D(f) = |R
f(x) = $\frac{x-1}{\sqrt{x}}$ $\quad \Rightarrow$ D(f)= (0, +∞)
$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ $\quad \Rightarrow$ D (f) = |R-{-1}
$f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$ $\quad \Rightarrow$ D (f) = |R-{1}

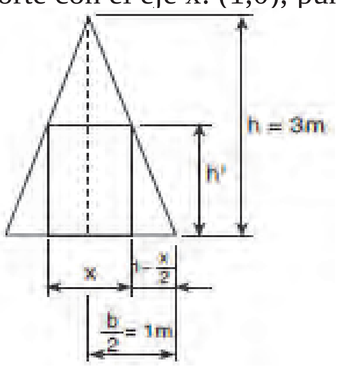
4. 1. C(x) = $\frac{x^2}{2}+x$ $\quad$ 2. A(x) = 4x $\quad$ 3. B(x) = 2x + 8

5. La función producto f . g y la función cociente $\frac{f}{g}$ de f(x) = $\frac{1}{x}$ y g (x) = x
Es la opción b.: $\frac{x-2}{x}$; $\frac{1}{x^2-2x}$

6. La expresión de la función compuesta $g_o f$ de las funciones f(x) = $\sqrt{x+6}$ y g(x) = x^2 – 1, es la opción c) x + 5

7. a) $f(x) = x^2 - 5x + 4$
La función decrece (-∞; 2,5] y crece [2,5; +∞)
Punto mínimo o mínimo absoluto en (2,5; -2,25)
Puntos de corte con el eje x: (1,0) y (4,0)
Puntos de corte con el eje y: (0,4)
15. $\frac{-x+1}{2}$
La función es decreciente en todo su dominio
No tiene máximo, ni mínimo

Puntos de corte con el eje x: (1,0); puntos de corte con el eje y: (0, $\frac{1}{2}$)



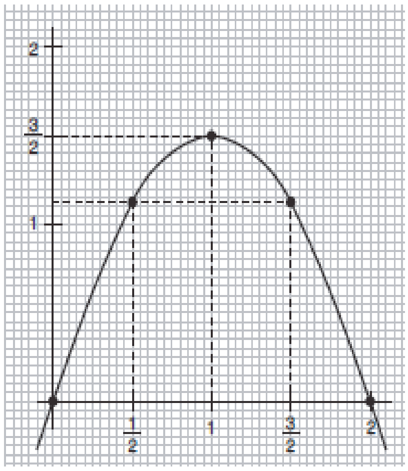
a. Por semejanza de triángulos: $\frac{3}{h'} = \frac{1}{1-\frac{x}{2}} \Rightarrow$ h´= 3(1- $x/2$)

8. Debemos ver que: $[f \cdot (g+h)](x) = (f \cdot g)(x) + (f \cdot h)(x)$
En efecto:

$$[f \cdot (g+h)](x) = f(x)\left((g+h)(x)\right) =$$
$$= f(x)\left(g(x)+h(x)\right) =$$
$$= (3x^2-1)\cdot\left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{x}{5}\right) =$$
$$= (3x^2-1)\cdot\left(\frac{5+x(x^2+1)}{5\cdot(x^2+1)}\right) =$$
$$= \frac{(3x^2-1)\cdot 5 + (3x^2-1)\cdot x\cdot(x^2+1)}{5\cdot(x^2+1)} =$$
$$= \frac{15x^2-5+3x^5+3x^3-x^3-x}{5(x^2+1)} =$$
$$= \frac{3x^5+2x^3+15x^2-x-5}{5(x^2+1)}$$

$$(f\cdot g + f\cdot h)(x) = (f\cdot g)(x) + (f\cdot h)(x) =$$
$$= \left(f(x)\cdot g(x)\right) + \left(f(x)\cdot h(x)\right) =$$
$$= \left((3x^2-1)\frac{1}{x^2+1}\right) + \left((3x^2-1)\frac{x}{5}\right) =$$
$$= \frac{3x^2-1}{x^2+1} + \frac{3x^3-x}{5} =$$
$$= \frac{(3x^2-1)\cdot 5 + (3x^3-x)(x^2+1)}{5(x^2+1)} =$$
$$= \frac{15x^2-5+3x^5+3x^3-x^3-x}{5(x^2+1)} =$$
$$= \frac{3x^5+2x^3-15x^2-x-5}{5(x^2+1)}$$

x	0	1	2
$y = f(x)$	0	$\frac{3}{2}$	0



9. En primer lugar, calculamos la expresión analítica de $f \circ g$:

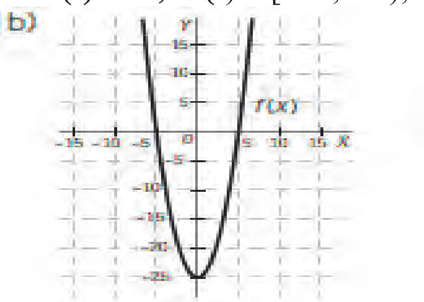
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2-1) = x^2-1+3 = x^2+2$$

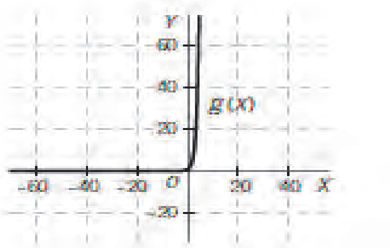
Calculamos ahora la expresión analítica de $g \circ f$:
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+3) = (x+3)^2 - 1 = x^2 + 6x + 8$

Así pues, comprobamos que: $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$

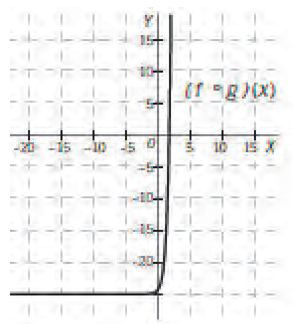
10. a. $D(f) = \mathbb{R}$; $R(f) = [-25, +\infty)$; $D(g) = \mathbb{R}$; $R(f) = (0, +\infty)$

b)





d.



c. $(f \circ g) = e^{2x} - 25$ $(g \circ f) = e^{x^2-25}$

e. La función $f(g(x))$: $D(f \circ g) = \mathbb{R}$ $R(f \circ g) = [-25, +\infty)$

No presenta máximos ni mínimos, y es creciente en todo su dominio.
La función $g(f(x))$: $D(g \circ f) = \mathbb{R}$ $R(g \circ f) = (0,+\infty)$
Decrece en $(-\infty, 0)$, presenta un mínimo en $(0, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$.

11. La primera expresión de la función corresponde a una función afín. Su gráfica pasa por los puntos $(3, -2)$ y $(-4, -3)$.

La segunda expresión corresponde a una función constante. Su gráfica pasa por los puntos $(-1,4)$ y $(0,4)$.

La tercera expresión corresponde a una función cuadrática. Su gráfica es una parábola abierta hacia arriba.

Hallamos su vértice:

$$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right) = \left(-\frac{(-5)}{2\cdot 1}, -\frac{(-5)^2-4\cdot 1\cdot 4}{4\cdot 1}\right) =$$
$$= \left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right)$$

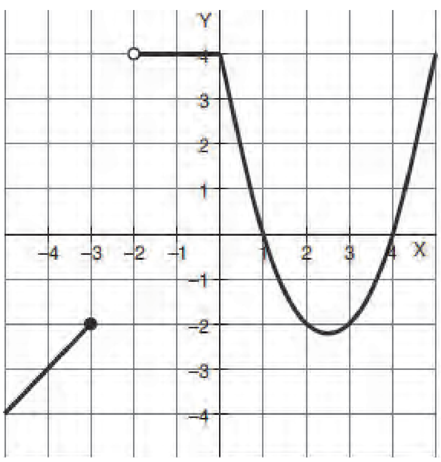
Hallamos los puntos de corte con los ejes:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow$$
$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

La gráfica corta al eje *OX* en los puntos $(1, 0)$ y $(4, 0)$.
$x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 4 \Rightarrow$ la gráfica corta al eje *OY* en el punto $(0, 4)$.

12. a. $A(x) = 4x - \frac{x^2}{2}$ b. El área máxima es de $4\ u^2$

13.



$D(f) = (-\infty, -3] \cup (-2, 0] \cup (0, +\infty) = (-\infty, -3] \cup (-2, +\infty)$ $R(f) = \mathbb{R}$

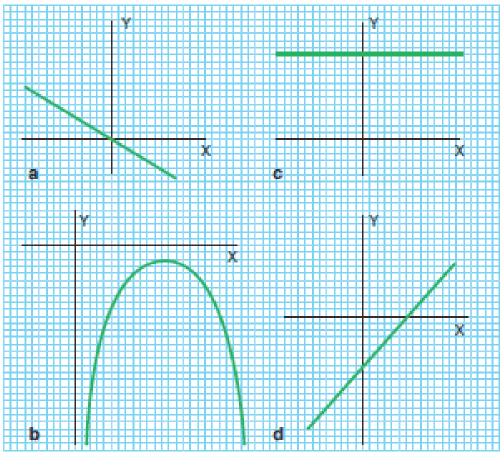
14. La altura máxima que alcanzará el objeto es de 510,2 m (ordenada del vértice de la parábola).

El tiempo que tarda en caer es de 20,4 s

Nombre: ____________________ Fecha: ____________

1. **Indica** si las siguientes relaciones son funciones o no. Respecto a las que sean funciones, **escribe** la ecuación correspondiente y represéntala.
   a. La tarifa de un taxi es \$3 de bajada de bandera, más \$0,80 por kilómetro recorrido.
   b. Los minutos jugados por un baloncestista y los puntos encestados.
   c. La velocidad que toma un objeto en caída libre con el tiempo transcurrido.

2. **Indica** qué tipo de función polinómica corresponde a cada una de las gráficas siguientes:



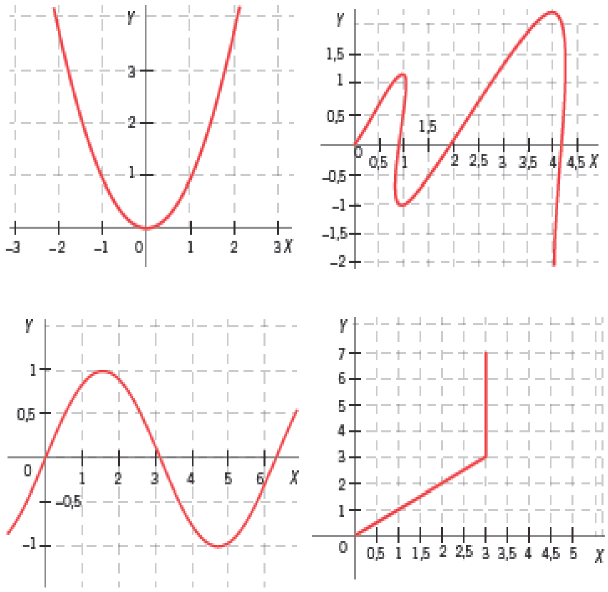
3. **Escribe** las expresiones analíticas de los siguientes enunciados:
   a. La tarifa de un taxi es de \$0,20 por km, más \$2,50 de bajada de bandera.
   b. La población inicial de un tipo de insecto decrece exponencialmente con el tiempo (en años).

4. **Representa** las siguientes funciones polinómicas:
   a. $f(x) = 2x$ b. $f(x) = -3x + 6$
   c. $f(x) = 5x^2 - 6x + 7$ d. $f(x) = 0,5x^2 + 2$

5. El área de un círculo es $A = \pi r^2$. **Representa** gráficamente esta función.

6. **Indica** cuál de las siguientes gráficas corresponde a una función. **Justifica** tu respuesta. De las gráficas que sean función, **indica** el dominio y el recorrido.

Trabajo inclusivo

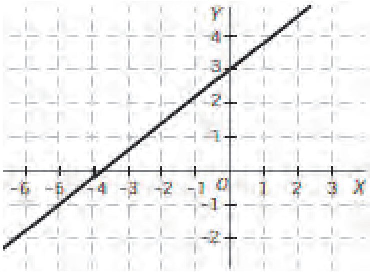


7. **Representa** gráficamente las siguientes funciones y estudia los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de cada una de ellas:
   b) f(x)=-2x+5 b) f(x)=-x^2+4
   c) f(x)= x^2-2x-3

8. Dadas las funciones $f(x) = x + 3$, $g(x) = \frac{2x+3}{x^2}$ y h(x) = cos x, **calcula**:

a. f + g;
b. g + f;
c. g + f + h.
d. (g_o f)(x)

1. a. f (x) = 3 + 0,8x



c. No es una función.

d. V (t) = -9,8 · t

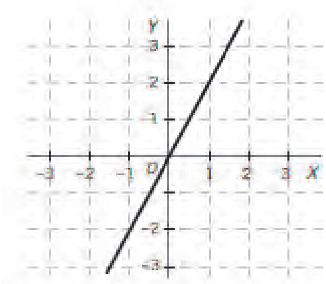
2. Son funciones lineales la ay d, la b es cuadrática y la c es una función constante.

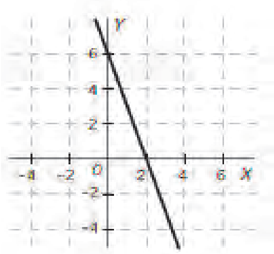
3.

a. $f(x) = 2{,}5 + 0{,}2x$

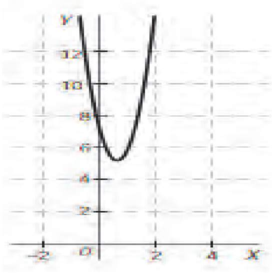
b. $f(t) = N_0 \cdot e^{-t}$

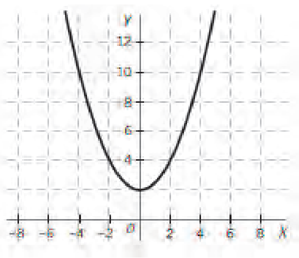
4. a. f(x) = 2x b. f(x) = -3x + 6



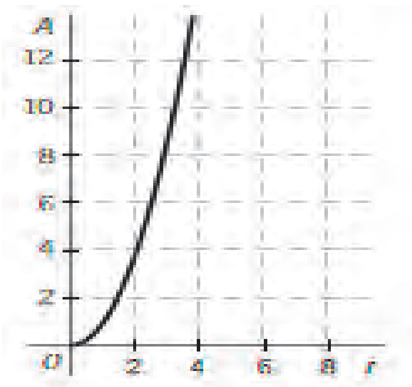


c. f(x) = $5x^2$ - 6x + 7 d. f(x) = $0{,}5x^2$ + 2



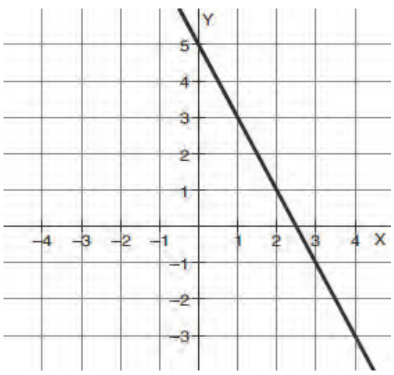


5. $A = \pi . r^2$



6. Las gráficas de la derecha no corresponden a funciones, ya que para algunos valores de *x* tienen asignados más de un valor de *f* (*x*); podemos comprobarlo con *x* = 4 en la gráfica superior derecha y con *x* = 3 en la gráfica inferior derecha. En la gráfica superior izquierda: *D* (*f*) = R y *R* (*f*) = [0,+∞). En la gráfica inferior izquierda: *D* (*f*) = R y *R* (*f*) = [−1,1].

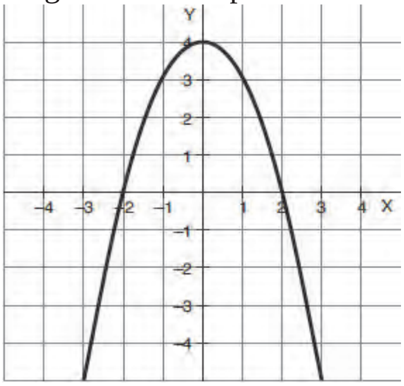
7. a. $f(x) = -2x + 5$



La función *f* es estrictamente decreciente en todo su dominio.

b. $f(x) = -x^2 + 4$

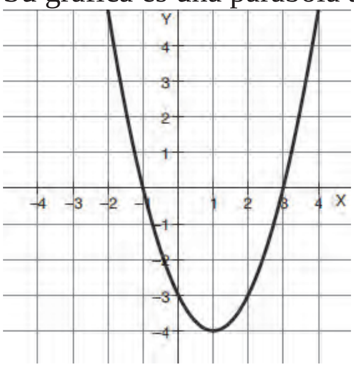
Su gráfica es una parábola abierta hacia abajo.



La función f es estrictamente creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y es estrictamente decreciente en el intervalo $(0, +\infty)$.

c. $f(x) = x^2 - 2x - 3$

Su gráfica es una parábola abierta hacia arriba.



La función f es estrictamente decreciente en el intervalo $(-\infty, 1)$ y es estrictamente creciente en el intervalo $(1, +\infty)$.

8. a) $f + g = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 2x + 3}{x^2}$

9. $g + f = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 2x + 3}{x^2}$

10. $g + f + h = \dfrac{2x+3}{x^2} + x + 3, + \cos x = \dfrac{2x + 3 + x^3 + 3x^2 + x^2 \cos x}{x^2}$

11. $g_{\circ} f = g(f(x)) = \dfrac{2.\,(x+3)+3}{(x+3)^2} = \dfrac{2x+9}{(x+3)^2}$

CICLO DEL APRENDIZAJE

¿Cómo dinamizo el aula?

Experiencia

Representación concreta, mediante gráficos de las funciones racinales y poligonales.

Resolución dfe problemas de aplicación de funciones

Conceptualización

Uso de diagramas que resuman los principales conceptos, propiedades y procedimientos con logaritmos.

Uso de sofwares que refuercen la resolución de ecuaciones e inecuaciones

Reflexión

¿Qué diferencia el conjunto de los números reales del resto de conjuntos estudiados?

Identificación, en ejercicios o problemas de las caracteristicas de las funciones, dadas mediante su expresión algebraica o su gráfico.

Reflexión y análisis sobre la aplicación de las funciones en el entorno.

Aplicación

¿Por qué es importante el uso y aplicación de los números reales?

Planteamineto y resolución de problemas que involucren funciones reales y racionales

1. **Utiliza** la calculadora en modo radianes y encuentra $f(\pi/2)$, $f(3\pi/2)$, $f(-\pi)$ de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \cos(2x)$
b. $f(x) = \text{sen}^2 x$
c. $f(x) = \text{tg}^2 x$
d. $f(x) = \text{cosec } x$

Solución:
a. -1,-1 ,1
b. 1, 1,0
c. N.E, N.E:,0
d.1,-1, N.E.

2. **Calcula** el dominio de las siguientes funciones:

a. $f(x) = 4x^2 - 2x + 18$ b. $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

c. $f(x) = \dfrac{2x+5}{x^3-5x^2+4x}$

Solución:
a. D (f) = R
b. D (f) = $\{x \mid -3 \leq x \leq 3\}$;
c. D (f) = R - {0, 1, 4}

3. **Considera** un hexágono regular de lado *(l)* y área *(A)*.
   a. **Expresa** el lado del hexágono en función del área.
   b. **Calcula** el lado del hexágono para A = $150\sqrt{3}$.

Solución:

La expresión del lado del hexágono en función del área es $l = \sqrt{\dfrac{2A}{3\sqrt{3}}}$

4. En un establecimiento han alquilado 30 bicicletas por \$6 cada una de ellas y han observado que por cada aumento de \$1 en el precio del alquiler, alquilan 3 bicicletas menos.

5.
a. **Expresa** el número de bicicletas alquiladas en función del precio de alquiler.
b. **Expresa** los ingresos del establecimiento en función del precio de alquiler.
c. **Calcula** los ingresos del establecimiento si el precio de alquiler es de \$10.
d. **Calcula** el precio a que han alquilado una bicicleta si han obtenido unos ingresos de \$192

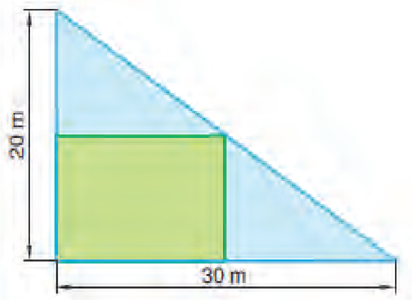
Solución:

a. El número de bicicletas alquiladas en función del precio viene dado por $b = -3p + 48$.

b. Los ingresos del establecimiento en función del precio de alquiler vienen dados por $I = -3p^2 + 48p$.

2. Los ingresos son de $180.
3. El precio al que han alquilado una bicicleta es $8.

6. En una esquina de una parcela cuya forma es la de un triángulo rectángulo se quiere construir una casa rectangular cuya superficie sea la mayor posible. **Calcula** cuáles deben ser sus dimensiones.



7. Un trabajador tiene un sueldo anual de $20 000. La empresa firma un aumento anual del 3 % durante los próximos 8 años.

a. **Determina** la tabla salarial anual para los 8 años.

b. **Representa** la gráfica de la función.

c. Si el sueldo al final de los 8 años es de $25 000, calcula el incremento real anual que le ha aplicado la empresa.

d. Si la empresa le hubiese ofrecido un aumento anual de $650, representa esta segunda función.

e. ¿En qué años habrá cobrado más con esta segunda oferta?

f. Al final de los 8 años, ¿qué opción le habría interesado más al trabajador? ¿Y a la empresa?

Solución:

a. $20 600, $21 218, $21 854,54, $22 510,17, $23 185,48, $23 881,04, $24 597,48, $25 335,40

c. 2,83 %

La incorporación de herramientas tecnológicas como recurso didáctico para el aprendizaje de las matemáticas, especialmente en el caso de que se apliquen estos recursos dentro y fuera del aula.

Así, las principales herramientas TIC disponibles y algunos ejemplos de sus utilidades concretas son:

- Utilización de herramientas simples de algún programa de diseño gráfico.

Como Mathlab, Desmos, Derive, especialmente en esta unidad, para graficar funciones.

- Uso y aplicación de calculadoras gráficas.
- Uso de procesadores de texto para redactar, revisar la ortografía, hacer resúmenes, añadir títulos, imágenes, hipervínculos, gráficos y esquemas sencillos, etc.
- Usos sencillos de las hojas de cálculo para organizar la información (datos) y presentarla, en ocasiones, de forma gráfica.
- Usos simples de bases de datos.
- Utilización de programas de correo electrónico.
- Usos y opciones básicas de los programas navegadores.
- Acceso, entre otras muchas utilidades, a las noticias de prensa digital para establecer comparaciones, recabar información actualizada, etc., o para investigaciones bibliográficas.
- Uso de buscadores.
- Extracción de información (enlaces) a partir de los propios directorios de cada buscador principal.
- Uso de los recursos de búsqueda por términos clave en búsquedas simples y avanzadas.
- Usos sencillos de programas de presentación (Powerpoint o similares): trabajos multimedia, presentaciones creativas de contenidos, esquemas, o realización de diapositivas.
- Uso de los recursos de búsqueda por términos clave en búsquedas simples y avanzadas.
- Creación y organización de listas de favoritos, así como seguimiento y actualización de la información de las distintas URL consultadas.
- Uso de enciclopedias virtuales (cd y www).
- Uso de periféricos: escáner, impresoras, etc.
- Puesta en práctica de videoconferencias, chats...
- Usos sencillos de programas de presentación (Powerpoint o similares): trabajos multimedia, presentaciones creativas de textos.

Página 56 - 57

2 Funciones reales y radicales

CONTENIDOS:

Noticia:

Gaudí lo dejó todo preparado: maquetas, bocetos, anotaciones, pero lo que nunca se imaginó fue que serían los ordenadores quienes se encargarían de (casi) todo en el futuro. Gracias a la utilización de software especializado y técnicas de modelado de 3D conocidas como «ingeniería inversa», el sueño de Gaudí ya es realidad.

http://links.edebe.com/2h2h

Película:

En la película *Antoni Gaudí: una visión inacabada* se reviven los últimos días de este artista.

Libros:

En el siguiente libro, descubrirás curiosidades matemáticas relacionadas con las artes: *Geometría para turistas* de Claudi Alsina

EN CONTEXTO

Antoni Gaudí se basó en la curva catenaria para construir arcos: los denominados arcos catenarios. En apariencia, esta curva es muy semejante a la parábola, pero en realidad tiene propiedades muy distintas.

1. **Investiga** las diferencias entre las fórmulas de ambas curvas y las consecuencias de ello.
2. **Describe** otras tres curvas que estén presentes en la arquitectura de Gaudí.
3. **Busca** y pon ejemplos de funciones que aparezcan en otras actividades artísticas.

56 57

Orientación didáctica

- Para anticipar posibles dificultades en los contenidos de la unidad, se propone, en los primeros temas, un repaso del concepto de función y las distintas formas en las que se puede expresar una función.
- Una recomendación es aplique la técnica de la «lluvia de ideas», para que los estudiantes recuerden lo que saben sobre este tema o la técnica de «preguntas creativas» y aproveche para solucionar todas las dudas que tengan al respecto.

Solucionario de la sección: en contexto

a. La catenaria es la forma que tiene un cable sujeto de dos puntos, como por ejemplo los cables eléctricos; la ecuación que la describe es la siguiente:

$$y = \frac{1}{2\gamma}\left[\cos h\ \left(\gamma\left(2x\text{-}a\right)\right)\text{-}\cos h(\gamma a)\right]$$

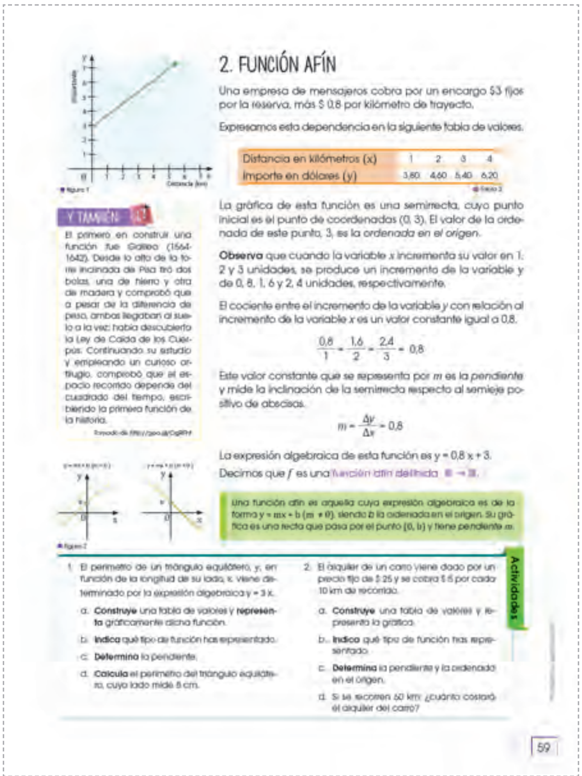
En cambio, la fórmula de la parábola es:

$y = x\ 2$

b. Gaudí también diseñaba con formas helicoidales, elipses, círculos, etcétera.

c. Respuesta abierta a modo de reflexión personal.

Página 59



2. FUNCIÓN AFÍN

Una empresa de mensajeros cobra por un encargo \$3 fijos por la reserva, más \$ 0,8 por kilómetro de trayecto.

Expresamos esta dependencia en la siguiente tabla de valores.

Distancia en kilómetros (x)	1	2	3	4
Importe en dólares (y)	3,80	4,60	5,40	6,20

La gráfica de esta función es una semirrecta, cuyo punto inicial es el punto de coordenadas (0, 3). El valor de la ordenada de este punto, 3, es la *ordenada en el origen*.

Observa que cuando la variable *x* incrementa su valor en 1, 2 y 3 unidades, se produce un incremento de la variable y de 0, 8, 1, 6 y 2, 4 unidades, respectivamente.

El cociente entre el incremento de la variable *y* con relación al incremento de la variable *x* es un valor constante igual a 0,8.

$$\frac{0,8}{1} = \frac{1,6}{2} = \frac{2,4}{3} = 0,8$$

Este valor constante que se representa por *m* es la *pendiente* y mide la inclinación de la semirrecta respecto al semieje positivo de abscisas.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,8$$

La expresión algebraica de esta función es y = 0,8 x + 3.

Decimos que *f* es una función afín definida $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Una función afín es aquella cuya expresión algebraica es de la forma y = mx + b (m ≠ 0), siendo *b* la ordenada en el origen. Su gráfica es una recta que pasa por el punto (0, b) y tiene pendiente *m*.

Y TAMBIÉN

El primero en construir una función fue Galileo (1564-1642). Desde lo alto de la torre inclinada de Pisa tiró dos bolas, una de hierro y otra de madera y comprobó que a pesar de la diferencia de peso, ambas llegaban al suelo a la vez: había descubierto la Ley de Caída de los Cuerpos. Continuando su estudio y empleando un curioso artilugio, comprobó que el espacio recorrido depende del cuadrado del tiempo, escribiendo la primera función de la historia.

Actividades

1. El perímetro de un triángulo equilátero, y, en función de la longitud de su lado, x, viene determinado por la expresión algebraica y = 3 x.
   a. **Construye** una tabla de valores y **represénta** gráficamente dicha función.
   b. **Indica** qué tipo de función has representado.
   c. **Determina** la pendiente.
   d. **Calcula** el perímetro del triángulo equilátero, cuyo lado mide 8 cm.
2. El alquiler de un carro viene dado por un precio fijo de \$ 25 y se cobra \$ 5 por cada 10 km de recorrido.
   a. **Construye** una tabla de valores y representa la gráfica.
   b. **Indica** qué tipo de función has representado.
   c. **Determina** la pendiente y la ordenada en el origen.
   d. Si se recorren 60 km ¿cuánto costará el alquiler del carro?

59

Solucionario

1. b. La función representada es una función afín

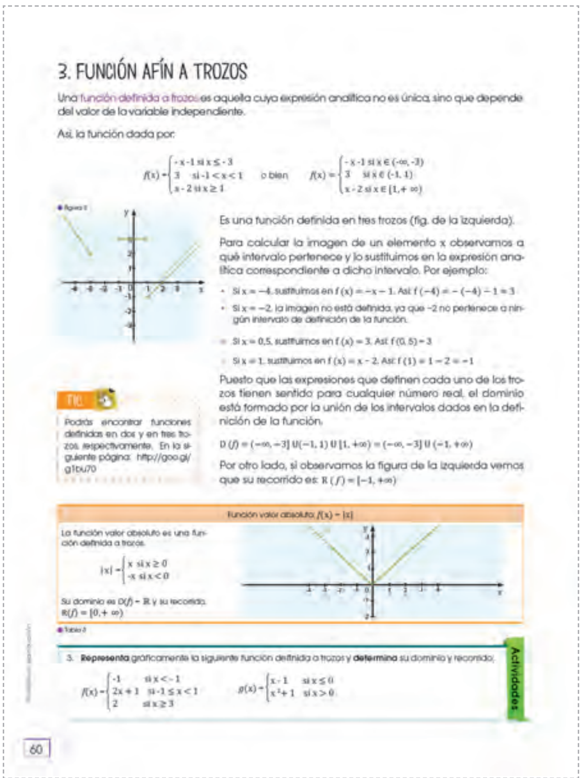
   c. La pendiente es 3

   d. Como la función que representa el perímetro es y = 3x, cuando el lado mide 8cm el perímetro es y = 3. 8 = 24 cm.

2. b. función afín c. m = 0,5, b = 25

   d. Si se recorren 60 km, el alquiler costará \$ 55.

Página 60



3. FUNCIÓN AFÍN A TROZOS

Una función definida a trozos es aquella cuya expresión analítica no es única, sino que depende del valor de la variable independiente.

Así, la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{si } x \le -3 \\ 3 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x-2 & \text{si } x \ge 1 \end{cases} \quad \text{o bien} \quad f(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{si } x \in (-\infty,-3) \\ 3 & \text{si } x \in (-1,1) \\ x-2 & \text{si } x \in [1,+\infty) \end{cases}$$

Es una función definida en tres trozos (fig. de la izquierda).

Para calcular la imagen de un elemento x observamos a qué intervalo pertenece y lo sustituimos en la expresión analítica correspondiente a dicho intervalo. Por ejemplo:

- Si x = −4, sustituimos en f (x) = −x − 1. Así: f (−4) = − (−4) − 1 = 3
- Si x = −2, la imagen no está definida, ya que −2 no pertenece a ningún intervalo de definición de la función.
- Si x = 0,5, sustituimos en f (x) = 3. Así: f (0, 5) = 3
- Si x = 1, sustituimos en f (x) = x − 2. Así: f (1) = 1 − 2 = −1

Puesto que las expresiones que definen cada uno de los trozos tienen sentido para cualquier número real, el dominio está formado por la unión de los intervalos dados en la definición de la función.

$D(f) = (-\infty,-3] \cup (-1,1) \cup [1,+\infty) = (-\infty,-3] \cup (-1,+\infty)$

Por otro lado, si observamos la figura de la izquierda vemos que su recorrido es: $R(f) = [-1,+\infty)$

TIC

Podrás encontrar funciones definidas en dos y en tres trozos, respectivamente. En la siguiente página: http://goo.gl/g1bu70

Función valor absoluto: $f(x) = |x|$

La función valor absoluto es una función definida a trozos.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \ge 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Su dominio es $D(f) = \mathbb{R}$ y su recorrido, $R(f) = [0,+\infty)$

Tabla 3

Actividades

3. **Representa** gráficamente la siguiente función definida a trozos y **determina** su dominio y recorrido.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ 2x+1 & \text{si } -1 \le x < 1 \\ 2 & \text{si } x \ge 3 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \le 0 \\ x^2+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

60

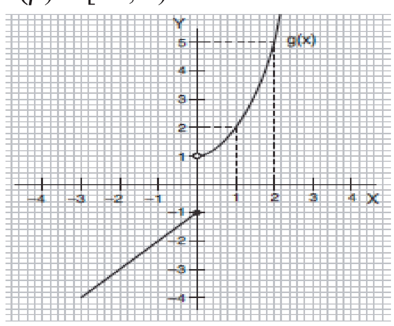
Solucionario

La función ∫ es polinómica en cada uno de los intervalos en que está definida. Por tanto, su dominio es la unión de los intervalos dados en la definición de la función:

$D(f) = (-\infty, -1)$ **U** $[-1, 2)$ **U**$[3, +\infty) = (-\infty, 2)$ **U** $[3, +\infty)$

Por otro lado, de la observación de la gráfica, tenemos que:

$R(f) = [-1, 5)$



g(x)

$D(g) = (-\infty, 0]$ **U** $(0, +\infty) = |R$

$R(g) = (-\infty, -1]\ \_\ (1, +\infty)$

Solucionario

4.

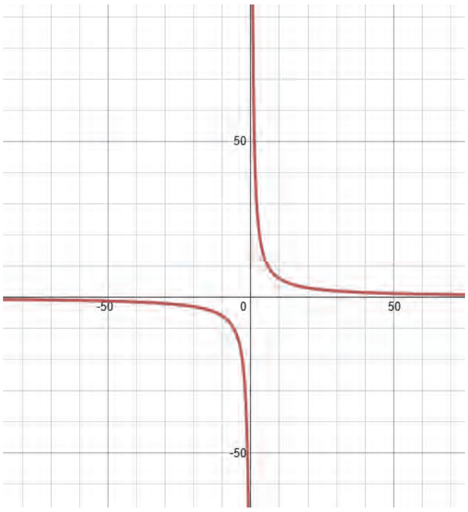
a. k = 60, y = 60/x

b. k = -30, y = -30/x

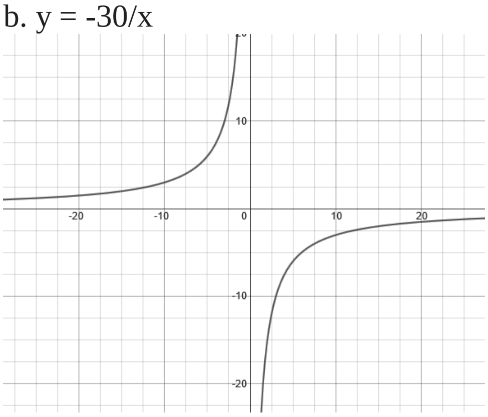
Solucionario

5.

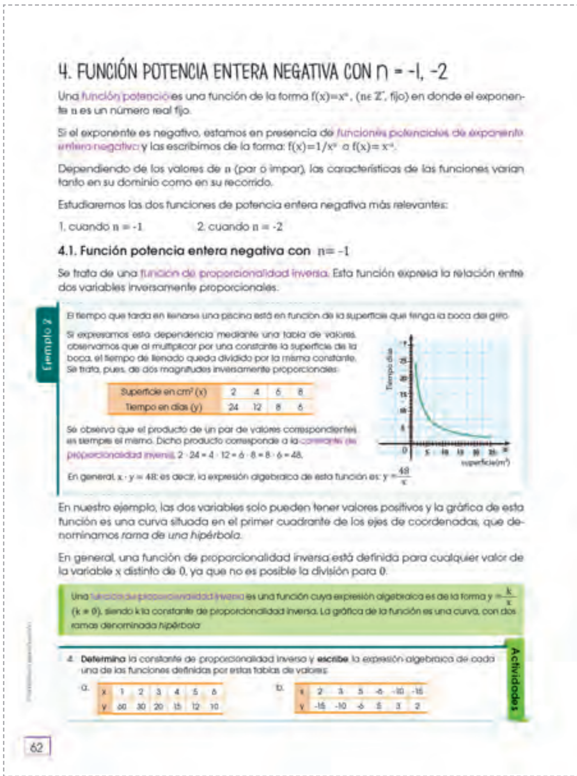
a. y = 60/x



b. y = -30/x



Página 62



4. FUNCIÓN POTENCIA ENTERA NEGATIVA CON n = -1, -2

Una función potencia es una función de la forma $f(x)=x^n$, ($n \in \mathbb{Z}^-$, fijo) en donde el exponente n es un número real fijo.

Si el exponente es negativo, estamos en presencia de funciones potenciales de exponente entero negativo y las escribimos de la forma: $f(x)=1/x^n$ o $f(x)=x^{-n}$.

Dependiendo de los valores de n (par o impar), las características de las funciones varían tanto en su dominio como en su recorrido.

Estudiaremos las dos funciones de potencia entera negativa más relevantes:

1. cuando n = -1 2. cuando n = -2

4.1. Función potencia entera negativa con n = -1

Se trata de una función de proporcionalidad inversa. Esta función expresa la relación entre dos variables inversamente proporcionales.

Ejemplo 2

El tiempo que tarda en llenarse una piscina está en función de la superficie que tenga la boca del grifo.

Si expresamos esta dependencia mediante una tabla de valores, observamos que al multiplicar por una constante la superficie de la boca, el tiempo de llenado queda dividido por la misma constante. Se trata, pues, de dos magnitudes inversamente proporcionales.

Superficie en cm^2 (x)	2	4	6	8
Tiempo en días (y)	24	12	8	6

Se observa que el producto de un par de valores correspondientes es siempre el mismo. Dicho producto corresponde a la constante de proporcionalidad inversa. $2 \cdot 24 = 4 \cdot 12 = 6 \cdot 8 = 8 \cdot 6 = 48$.

En general, $x \cdot y = 48$; es decir, la expresión algebraica de esta función es: $y = \frac{48}{x}$

En nuestro ejemplo, las dos variables solo pueden tener valores positivos y la gráfica de esta función es una curva situada en el primer cuadrante de los ejes de coordenadas, que denominamos *rama de una hipérbola*.

En general, una función de proporcionalidad inversa está definida para cualquier valor de la variable x distinto de 0, ya que no es posible la división para 0.

Una función de proporcionalidad inversa es una función cuya expresión algebraica es de la forma $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$), siendo k la constante de proporcionalidad inversa. La gráfica de la función es una curva, con dos ramas denominada *hipérbola*.

Actividades

4. **Determina** la constante de proporcionalidad inversa y **escribe** la expresión algebraica de cada una de las funciones definidas por estas tablas de valores:

a.

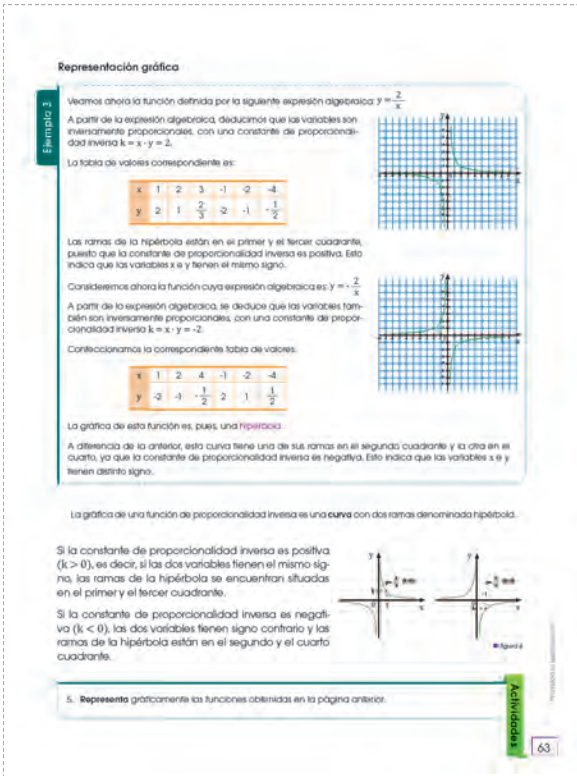
x	1	2	3	4	5	6
y	60	30	20	15	12	10

b.

x	2	3	5	-6	-10	-15
y	-15	-10	-6	5	3	2

62

Página 63



Representación gráfica

Ejemplo 3

Veamos ahora la función definida por la siguiente expresión algebraica: $y = \frac{2}{x}$

A partir de la expresión algebraica, deducimos que las variables son inversamente proporcionales, con una constante de proporcionalidad inversa $k = x \cdot y = 2$.

La tabla de valores correspondiente es:

x	1	2	3	-1	-2	-4
y	2	1	$\frac{2}{3}$	-2	-1	$-\frac{1}{2}$

Las ramas de la hipérbola están en el primer y el tercer cuadrante, puesto que la constante de proporcionalidad inversa es positiva. Esto indica que las variables x e y tienen el mismo signo.

Consideremos ahora la función cuya expresión algebraica es: $y = -\frac{2}{x}$

A partir de la expresión algebraica, se deduce que las variables también son inversamente proporcionales, con una constante de proporcionalidad inversa $k = x \cdot y = -2$.

Confeccionamos la correspondiente tabla de valores.

x	1	2	4	-1	-2	-4
y	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	2	1	$\frac{1}{2}$

La gráfica de esta función es, pues, una hipérbola.

A diferencia de la anterior, esta curva tiene una de sus ramas en el segundo cuadrante y la otra en el cuarto, ya que la constante de proporcionalidad inversa es negativa. Esto indica que las variables x e y tienen distinto signo.

La gráfica de una función de proporcionalidad inversa es una **curva** con dos ramas denominada hipérbola.

Si la constante de proporcionalidad inversa es positiva ($k > 0$), es decir, si las dos variables tienen el mismo signo, las ramas de la hipérbola se encuentran situadas en el primer y el tercer cuadrante.

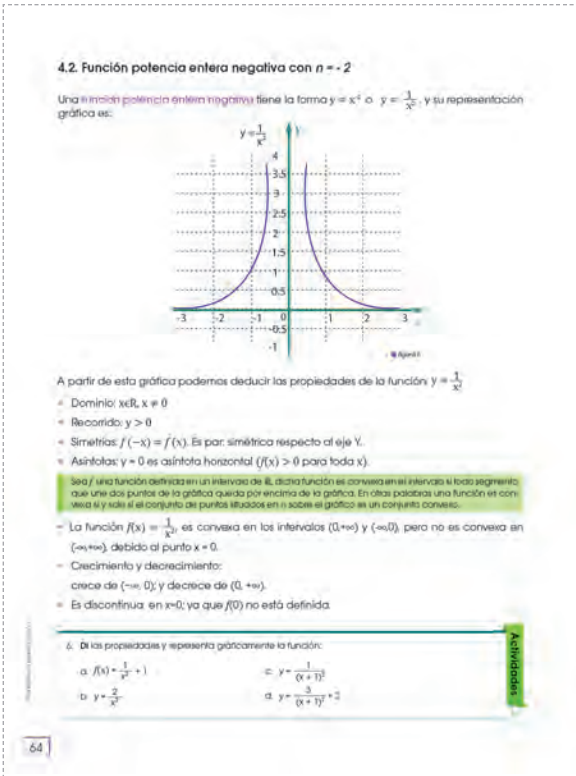
Si la constante de proporcionalidad inversa es negativa ($k < 0$), las dos variables tienen signo contrario y las ramas de la hipérbola están en el segundo y el cuarto cuadrante.

Actividades

5. **Representa** gráficamente las funciones obtenidas en la página anterior.

63

Página 64



4.2. Función potencia entera negativa con $n = -2$

Una función potencia entera negativa tiene la forma $y = x^{-2}$ o $y = \frac{1}{x^2}$, y su representación gráfica es:

A partir de esta gráfica podemos deducir las propiedades de la función: $y = \frac{1}{x^2}$

- Dominio: $x \in R$, $x \neq 0$
- Recorrido: $y > 0$
- Simetrías: $f(-x) = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.
- Asíntotas: $y = 0$ es asíntota horizontal ($f(x) > 0$ para toda x).

Sea f una función definida en un intervalo de $\mathbb{R}$, dicha función es convexa en el intervalo si todo segmento que une dos puntos de la gráfica queda por encima de la gráfica. En otras palabras una función es convexa si y solo si el conjunto de puntos situados en o sobre el gráfico es un conjunto convexo.

- La función $f(x) = \frac{1}{x^2}$, es convexa en los intervalos $(0,+\infty)$ y $(-\infty,0)$, pero no es convexa en $(-\infty,+\infty)$, debido al punto $x = 0$.
- Crecimiento y decrecimiento: crece de $(-\infty, 0)$; y decrece de $(0, +\infty)$.
- Es discontinua en $x=0$; ya que $f(0)$ no está definida.

Actividades

6. **Di** las propiedades y representa gráficamente la función:

a. $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$

b. $y = \frac{2}{x^2}$

c. $y = \frac{1}{(x+1)^2}$

d. $y = \frac{3}{(x+1)^2} + 2$

64

Solucionario

6.

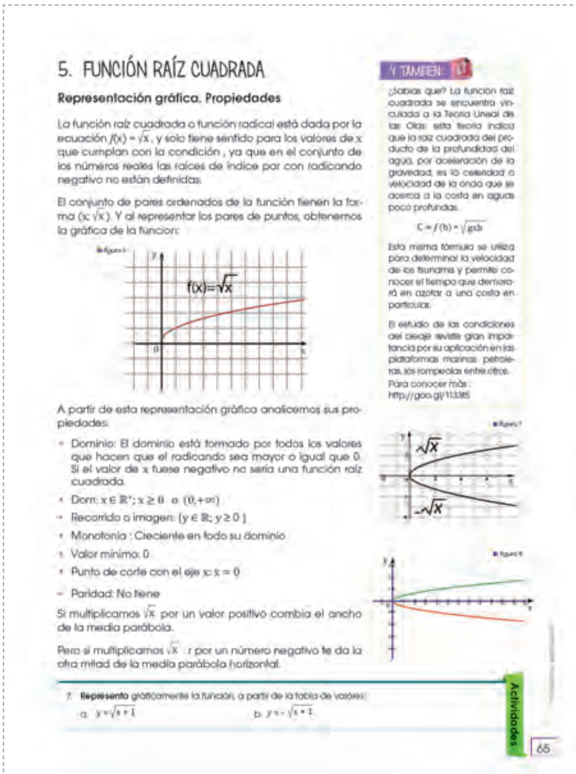
a. D(x):x∊ R, $x \neq 0$ R(x): y∊R, y>1, crece: $(-\infty,0)$, decrece: $(0,+\infty)$,
Asíntotas: A.H: y = 1, A.V x = 0
Discontinua en x = 0

b. D(x):x∊ R, x≠0   R(x): y∊R, y>0, crece: $(-\infty,0)$, decrece: $(0,+\infty)$,
Asíntotas: A.H: y = 0, A.V x = 0
Discontinua en x = 0

c. D(x):x∊ R, x≠-1   R(x): y∊R, y>0, crece: $(-\infty,-1)$, decrece: $(-1,+\infty)$,
Asíntotas: A.H: y = 0, A.V x = -1
Discontinua en x = -1

d. D(x):x∊ R, x≠-1   R(x): y∊R, y>2, crece: $(-\infty,-1)$, decrece: $(-1,+\infty)$, Asíntotas: A.H: y = 2, A.V x = -1
Discontinua en x = -1

Página 65



5. FUNCIÓN RAÍZ CUADRADA

Representación gráfica. Propiedades

La función raíz cuadrada o función radical está dada por la ecuación $f(x) = \sqrt{x}$, y solo tiene sentido para los valores de x que cumplan con la condición , ya que en el conjunto de los números reales las raíces de índice par con radicando negativo no están definidas.

El conjunto de pares ordenados de la función tienen la forma $(x; \sqrt{x})$. Y al representar los pares de puntos, obtenemos la gráfica de la funcion:

A partir de esta representación gráfica analicemos sus propiedades:

- Dominio: El dominio está formado por todos los valores que hacen que el radicando sea mayor o igual que 0. Si el valor de x fuese negativo no sería una función raíz cuadrada.
- Dom: $x \in \mathbb{R}^+; x \geq 0$ o $(0,+\infty)$
- Recorrido o imagen: $\{y \in \mathbb{R}; y \geq 0\}$
- Monotonía : Creciente en todo su dominio
- Valor mínimo: 0
- Punto de corte con el eje x: x = 0
- Paridad: No tiene

Si multiplicamos $\sqrt{x}$ por un valor positivo cambia el ancho de la media parábola.

Pero si multiplicamos $\sqrt{x}$ r por un número negativo te da la otra mitad de la media parábola horizontal.

Y TAMBIÉN:

¿Sabías que? La función raíz cuadrada se encuentra vinculada a la Teoría Lineal de las Olas: esta teoría indica que la raíz cuadrada del producto de la profundidad del agua, por aceleración de la gravedad, es la celeridad o velocidad de la onda que se acerca a la costa en aguas poco profundas.

$$C = f(h) = \sqrt{gxh}$$

Esta misma fórmula se utiliza para determinar la velocidad de los tsunamis y permite conocer el tiempo que demorará en azotar a una costa en particular.

El estudio de las condiciones del oleaje reviste gran importancia por su aplicación en las plataformas marinas petroleras, los rompeolas entre otros.

Para conocer más : http://goo.gl/11338S

Actividades

7. **Representa** gráficamente la función, a partir de la tabla de valores:

a. $y = \sqrt{x+1}$

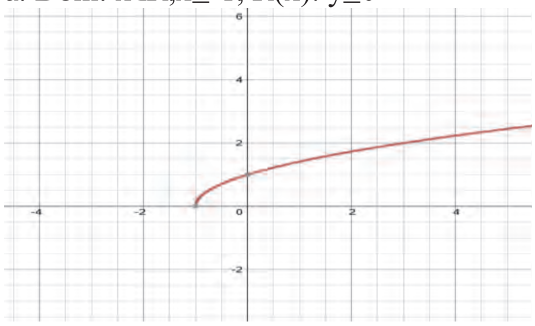
b. $y = -\sqrt{x+1}$

65

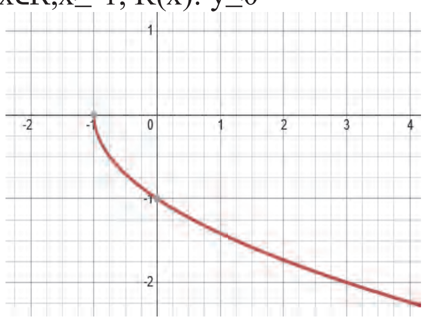
Solucionario

7.

a. Dom: x∊R,x≥-1, R(x): y≥0



b. x∊R,x≥-1, R(x): y≤0



Solucionario

8.

a. D(x):x∈ R, x≥5,   R(x): y∈R, y≥0, crece en todo su dominio, punto de corte con x: x = 5

b. D(x):x∈ R, x≥-3,   R(x): y∈R, y≥2, crece en todo su dominio, punto de corte con x: no tiene

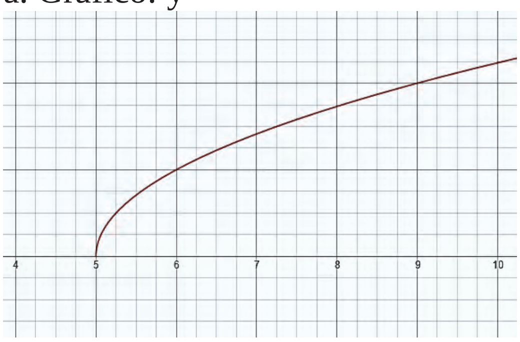
c. D(x):x∈ R, x≥1,   R(x): y∈R, y≤1, decrece en todo su dominio, punto de corte con x: x = 2

d. D(x):x∈ R, x≥1,   R(x): y∈R, y≥1, crece en todo su dominio, punto de corte con x: no tiene

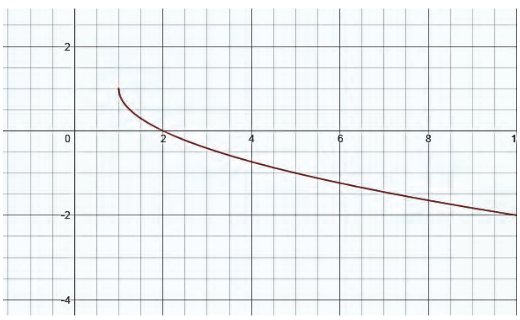
e. D(x):x∈ R, x≥5,   R(x): y∈R, y≤0, decrece en todo su dominio, punto de corte con x: x = 5

f. D(x):x∈ R, x≥2,   R(x): y∈R, y≥0, crece en todo su dominio, punto de corte con x: x = 2

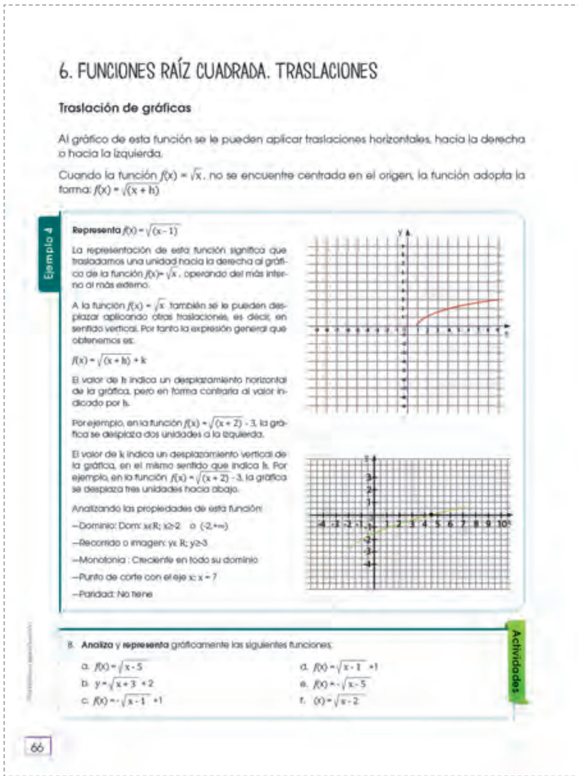
a. Gráfico: y = $\sqrt{x-5}$



b. Gráfico: y = $\sqrt{x+3}+2$



Página 66



6. FUNCIONES RAÍZ CUADRADA. TRASLACIONES

Traslación de gráficas

Al gráfico de esta función se le pueden aplicar traslaciones horizontales, hacia la derecha o hacia la izquierda.

Cuando la función $f(x) = \sqrt{x}$, no se encuentre centrada en el origen, la función adopta la forma: $f(x) = \sqrt{(x+h)}$

Ejemplo 4

Representa $f(x) = \sqrt{(x-1)}$

La representación de esta función significa que trasladamos una unidad hacia la derecha al gráfico de la función $f(x)= \sqrt{x}$, operando del más interno al más externo.

A la función $f(x) = \sqrt{x}$ también se le pueden desplazar aplicando otras traslaciones, es decir, en sentido vertical. Por tanto la expresión general que obtenemos es:

$f(x) = \sqrt{(x+h)} + k$

El valor de h indica un desplazamiento horizontal de la gráfica, pero en forma contraria al valor indicado por h.

Por ejemplo, en la función $f(x) = \sqrt{(x+2)} - 3$, la gráfica se desplaza dos unidades a la izquierda.

El valor de k indica un desplazamiento vertical de la gráfica, en el mismo sentido que indica h. Por ejemplo, en la función $f(x) = \sqrt{(x+2)} - 3$, la gráfica se desplaza tres unidades hacia abajo.

Analizando las propiedades de esta función:

—Dominio: Dom: x∈R; x≥-2   o (-2,+∞)

—Recorrido o imagen: y∈ R; y≥-3

—Monotonía : Creciente en todo su dominio

—Punto de corte con el eje x: x = 7

—Paridad: No tiene

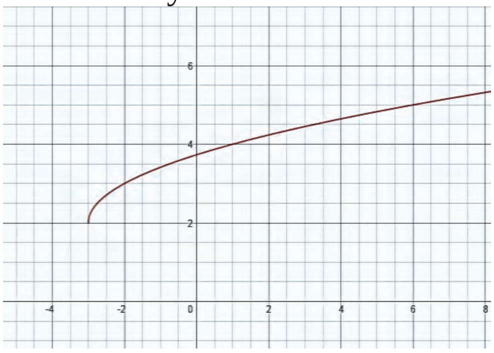
Actividades

8. **Analiza** y **representa** gráficamente las siguientes funciones:

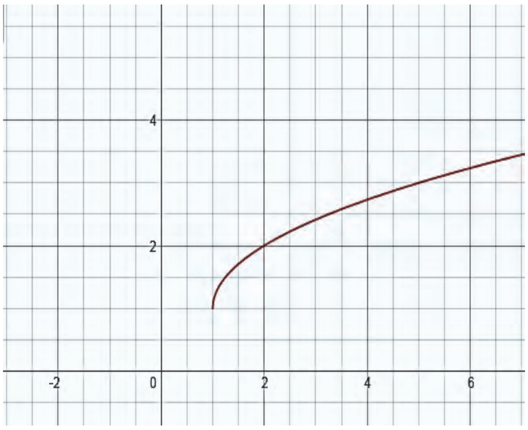
a. $f(x) = \sqrt{x-5}$
b. $y = \sqrt{x+3} + 2$
c. $f(x) = -\sqrt{x-1} + 1$
d. $f(x) = \sqrt{x-1} + 1$
e. $f(x) = -\sqrt{x-5}$
f. $(x) = \sqrt{x-2}$

66

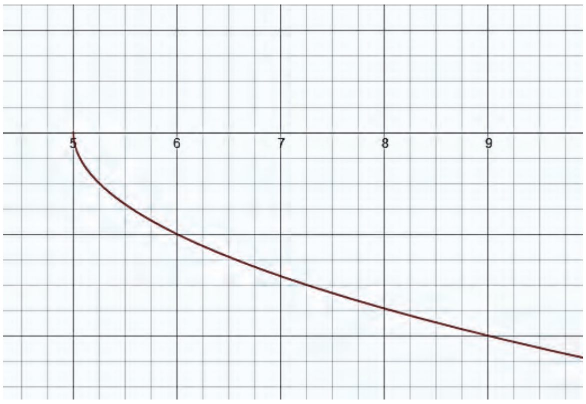
c. Gráfico: y = $-\sqrt{x-1}+1$



d. Gráfico: y = $\sqrt{x-1}+1$



e. Gráfico: y = $\sqrt{x+3}+2$



Solucionario

9.

a. $D(f) = \mathbb{R}$, $R(f) = R_+$; [0, +∞), Decrece (-∞;-3] y Crece [-3;+∞)

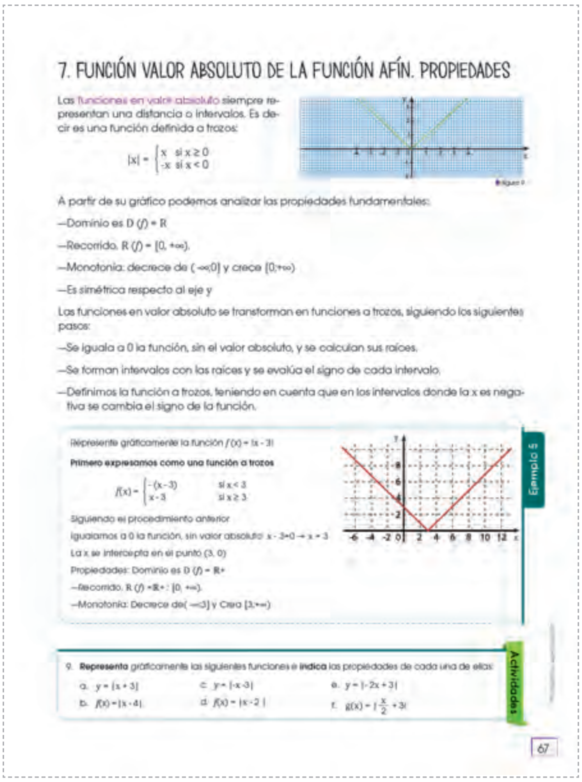
b. $D(f) = \mathbb{R}$, $R(f) = R_+$; [0, +∞), Decrece (-∞; 4] y Crece [4;+∞)

c. $D(f) = \mathbb{R}$, $R(f) = R_+$; [0, +∞), Decrece (-∞;-3] y Crece [-3;+∞)

d. $D(f) = \mathbb{R}$, $R(f) = R_+$; [0, +∞), Decrece (-∞; 2] y Crece [2;+∞)

e. $D(f) = \mathbb{R}$, $R(f) = R_+$; [0, +∞), Decrece (-∞; 3/2] y Crece [3/2;+∞)

f. $D(f) = \mathbb{R}$, $R(f) = R_+$; [0, +∞), Decrece (-∞; -6] y Crece [-6;+∞)



7. FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO DE LA FUNCIÓN AFÍN. PROPIEDADES

Las funciones en valor absoluto siempre representan una distancia o intervalos. Es decir es una función definida a trozos:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Figura 9

A partir de su gráfico podemos analizar las propiedades fundamentales:

—Dominio es D (f) = R

—Recorrido. R (f) = [0, +∞).

—Monotonía: decrece de (-∞;0] y crece [0;+∞)

—Es simétrica respecto al eje y

Las funciones en valor absoluto se transforman en funciones a trozos, siguiendo los siguientes pasos:

—Se iguala a 0 la función, sin el valor absoluto, y se calculan sus raíces.

—Se forman intervalos con las raíces y se evalúa el signo de cada intervalo.

—Definimos la función a trozos, teniendo en cuenta que en los intervalos donde la x es negativa se cambia el signo de la función.

Ejemplo 5

Represente gráficamente la función $f(x) = |x - 3|$

Primero expresamos como una función a trozos

$$f(x) = \begin{cases} -(x-3) & \text{si } x < 3 \\ x-3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Siguiendo el procedimiento anterior

Igualamos a 0 la función, sin valor absoluto $x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$

La x se intercepta en el punto (3, 0)

Propiedades: Dominio es D (f) = ℝ+

—Recorrido. R (f) = ℝ+ : [0, +∞).

—Monotonía: Decrece de(-∞;3] y Crea [3;+∞)

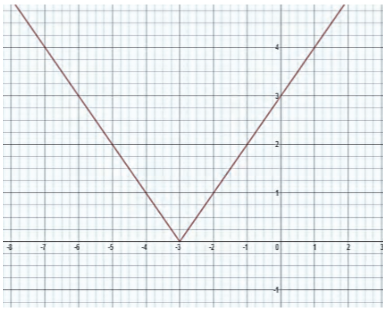
Actividades

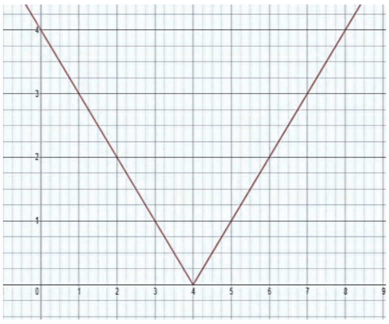
9. **Representa** gráficamente las siguientes funciones e **indica** las propiedades de cada una de ellas:

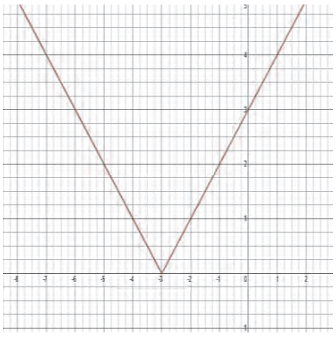
a. $y = |x + 3|$
b. $f(x) = |x - 4|$
c. $y = |-x - 3|$
d. $f(x) = |x - 2|$
e. $y = |-2x + 3|$
f. $g(x) = |\frac{x}{2} + 3|$

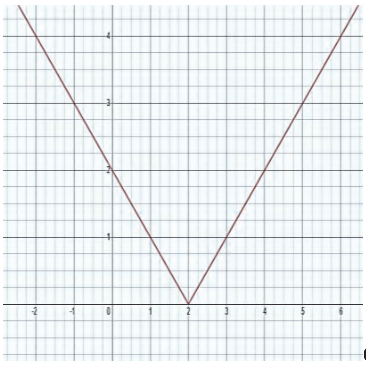
67

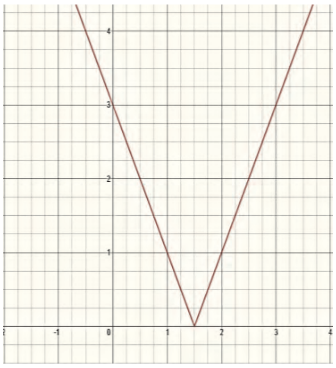
Gráficas

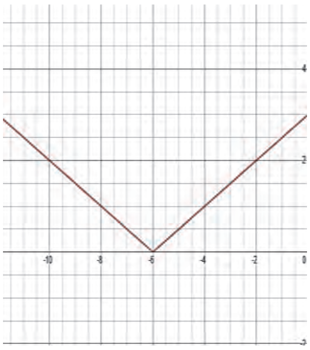

a.


b.


c.


d.


e.


f.

Página 69

8.3. Cociente de funciones

Sean f y g dos funciones cuyos dominios son $D(f)$ y $D(g)$. La función cociente de f y g, $\left(\frac{f}{g}\right)$, es la función que asigna, a cada número real x, el cociente de las imágenes por la función f y la función g, siempre que $g(x) \neq 0$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

El dominio de la función cociente es la intersección de los dominios de f y g menos los puntos que anulan el denominador.

$$D(f/g) = D(f) \cap D(g) - \{x \mid g(x) = 0\}$$

Y TAMBIÉN: ¿?

En la composición de funciones, se nombra en primer lugar la función de la derecha, porque es la primera en actuar sobre x:

$$(g \circ f)(x)$$

Se lee: «f compuesta con g».

Ejemplo 7

Dadas las funciones $f(x) = \frac{3}{2-x}$ y $g(x) = x + 2$, calcula la función cociente $\left(\frac{f}{g}\right)$ y determina su dominio.

Comprensión: Obtenemos la función cociente, operamos las expresiones analíticas y hallamos el dominio determinando la intersección de los dominios y los puntos que anulan a $g(x)$.

Resolución: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{3}{2-x}}{x+2} = \frac{3}{4-x^2}$

Para hallar el dominio, determinamos primero el dominio de las funciones f y g, y los puntos donde se anula $g(x)$:

$$D(f) = \mathbb{R} - \{2\};\ D(g) = \mathbb{R} - \{-2\}, \text{ ya que } g(-2) = 0$$

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = [D(f) \cap D(g)] - \{-2\} = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

Actividades

10. Si $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 2x + 3$ y $h(x) = \frac{2}{(x+1)}$, halla:

a. $f(x) + g(x)$
b. $f(x) + h(x)$
c. $h(x) - g(x)$
d. $g(x) - h(x)$
e. $f(x) \cdot g(x)$
f. $g(x) \cdot h(x)$
g. $\frac{f(x)}{g(x)}$
h. $\frac{f(x)}{h(x)}$

69

Solucionario

a) $f(x) + g(x) = x^2 - 1 + 2x + 3 = x^2 + 2x + 2$

b) $f(x) + h(x) = x^2 - 1 + \frac{2}{x+1} = \frac{x^3 + x^2 - x + 1}{x+1}$

c) $h(x) - g(x) = \frac{2}{x+1} - 2x - 3 = \frac{-2x^2 - 5x - 1}{x+1}$

d) $g(x) - h(x) = 2x + 3 - \frac{2}{x+1} = \frac{2x^2 + 5x + 1}{x+1}$

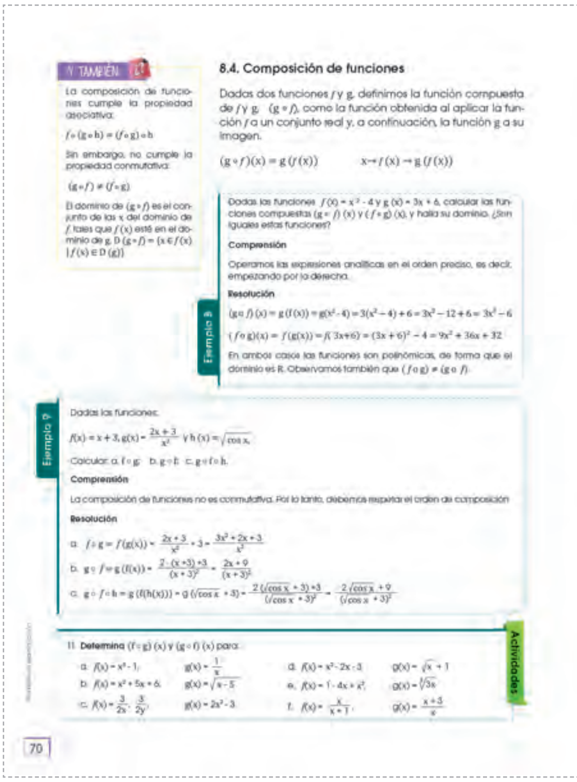
e) $f(x) \cdot g(x) = (x^2 - 1)(2x + 3) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$

f) $g(x) \cdot h(x) = (2x + 3) \cdot \left(\frac{2}{x+1}\right) = \frac{4x+6}{x+1}$

g) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 1}{2x + 3}$

h) $\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{2x + 3}{x^2 - 1}$

Página 70



Y TAMBIÉN

La composición de funciones cumple la propiedad asociativa:

$f\circ(g\circ h) = (f\circ g)\circ h$

Sin embargo, no cumple la propiedad conmutativa:

$(g\circ f) \neq (f\circ g)$

El dominio de $(g\circ f)$ es el conjunto de las x del dominio de f tales que $f(x)$ esté en el dominio de g. $D(g\circ f) = \{x \in f(x) \mid f(x) \in D(g)\}$

8.4. Composición de funciones

Dadas dos funciones f y g, definimos la función compuesta de f y g, $(g\circ f)$, como la función obtenida al aplicar la función f a un conjunto real y, a continuación, la función g a su imagen.

$(g\circ f)(x) = g(f(x)) \qquad x \to f(x) \to g(f(x))$

Ejemplo 8

Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = 3x + 6$, calcular las funciones compuestas $(g\circ f)(x)$ y $(f\circ g)(x)$, y halla su dominio. ¿Son iguales estas funciones?

Comprensión

Operamos las expresiones analíticas en el orden preciso, es decir, empezando por la derecha.

Resolución

$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2-4) = 3(x^2-4)+6 = 3x^2-12+6 = 3x^2-6$

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x+6) = (3x+6)^2-4 = 9x^2+36x+32$

En ambos casos las funciones son polinómicas, de forma que el dominio es R. Observamos también que $(f\circ g) \neq (g\circ f)$.

Ejemplo 9

Dadas las funciones:

$f(x) = x+3$, $g(x) = \frac{2x+3}{x^2}$ y $h(x) = \sqrt{\cos x}$.

Calcular: a. $f\circ g$ b. $g\circ f$ c. $g\circ f\circ h$.

Comprensión

La composición de funciones no es conmutativa. Por lo tanto, debemos respetar el orden de composición

Resolución

a. $f\circ g = f(g(x)) = \frac{2x+3}{x^2}+3 = \frac{3x^2+2x+3}{x^2}$

b. $g\circ f = g(f(x)) = \frac{2\cdot(x+3)+3}{(x+3)^2} = \frac{2x+9}{(x+3)^2}$

c. $g\circ f\circ h = g(f(h(x))) = g(\sqrt{\cos x}+3) = \frac{2(\sqrt{\cos x}+3)+3}{(\sqrt{\cos x}+3)^2} = \frac{2\sqrt{\cos x}+9}{(\sqrt{\cos x}+3)^2}$

Actividades

11. **Determina** $(f\circ g)(x)$ y $(g\circ f)(x)$ para:

a. $f(x) = x^3-1$, $g(x) = \frac{1}{x}$

b. $f(x) = x^2+5x+6$, $g(x) = \sqrt{x-5}$

c. $f(x) = \frac{3}{2x}$, $\frac{3}{2y}$, $g(x) = 2x^2-3$

d. $f(x) = x^2-2x-3$, $g(x) = \sqrt{x}+1$

e. $f(x) = 1-4x+x^2$, $g(x) = \sqrt[3]{3x}$

f. $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $g(x) = \frac{x+3}{x}$

70

Solucionario

a. $(fog)(x) = \frac{1-x^3}{x^3}$, $(gof)(x) = \frac{1}{x^3-1}$

b. $(fog)(x) = x + 5\sqrt{x-5} + 1$, $(gof)(x) = \sqrt{x^2+6x+1}$

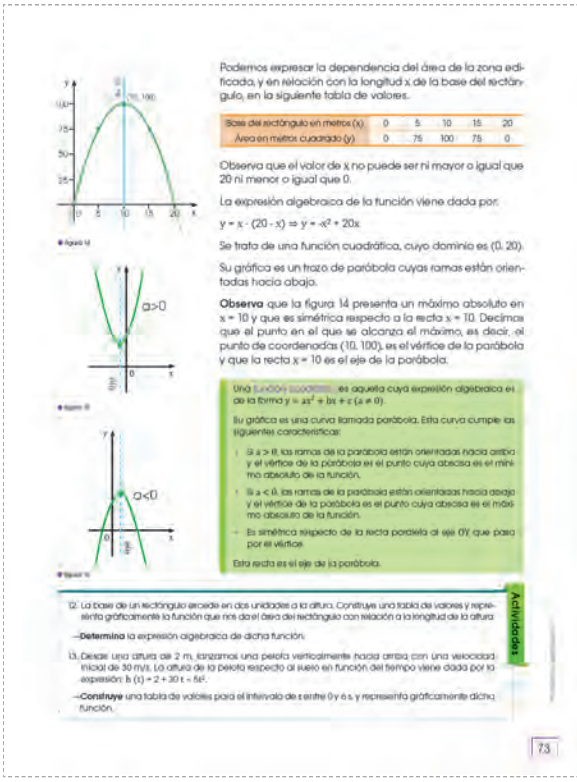
c. $(fog)(x) = \frac{3}{4x^2-6}$, $(gof)(x) = \frac{9-6x^2}{2x^2}$

d. $(fog)(x) = x - 4$, $(gof)(x) = \sqrt{x^2-2x-3}+1$

e. $(fog)(x) = 1-4\sqrt[3]{3x} + \sqrt[3]{3x^2}$, $(gof)(x) = \sqrt[3]{3-12x+3x^2}$

f. $(fog)(x) = \frac{x+3}{2x+3}$, $(gof)(x) = \frac{4x+3}{x}$

Página 73



Podemos expresar la dependencia del área de la zona edificada, y en relación con la longitud x de la base del rectángulo, en la siguiente tabla de valores.

Base del rectángulo en metros (x)	0	5	10	15	20
Área en metros cuadrado (y)	0	75	100	75	0

Observa que el valor de x no puede ser ni mayor o igual que 20 ni menor o igual que 0.

La expresión algebraica de la función viene dada por:

$y = x \cdot (20 - x) \Rightarrow y = -x^2 + 20x$

Se trata de una función cuadrática, cuyo dominio es (0, 20).

Su gráfica es un trozo de parábola cuyas ramas están orientadas hacia abajo.

Observa que la figura 14 presenta un máximo absoluto en x = 10 y que es simétrica respecto a la recta x = 10. Decimos que el punto en el que se alcanza el máximo, es decir, el punto de coordenadas (10, 100), es el vértice de la parábola y que la recta x = 10 es el eje de la parábola.

Una función cuadrática es aquella cuya expresión algebraica es de la forma $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

Su gráfica es una curva llamada parábola. Esta curva cumple las siguientes características:

- Si a > 0, las ramas de la parábola están orientadas hacia arriba y el vértice de la parábola es el punto cuya abcisa es el mínimo absoluto de la función.
- Si a < 0, las ramas de la parábola están orientadas hacia abajo y el vértice de la parábola es el punto cuya abcisa es el máximo absoluto de la función.
- Es simétrica respecto de la recta paralela al eje OY que pasa por el vértice.

Esta recta es el eje de la parábola.

Actividades

12. La base de un rectángulo excede en dos unidades a la altura. Construye una tabla de valores y representa gráficamente la función que nos da el área del rectángulo con relación a la longitud de la altura.

—**Determina** la expresión algebraica de dicha función.

13. Desde una altura de 2 m, lanzamos una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 30 m/s. La altura de la pelota respecto al suelo en función del tiempo viene dada por la expresión: h (t) = 2 + 30 t − 5t².

—**Construye** una tabla de valores para el intervalo de t entre 0 y 6 s, y representa gráficamente dicha función.

73

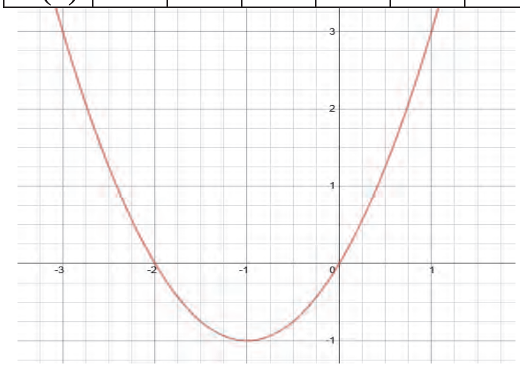
Solucionario

12.

Sea x: la altura, entonces x + 2: la base. Luego el área del rectángulo es:

$A(x) = x(x + 2) = x^2 + 2x$

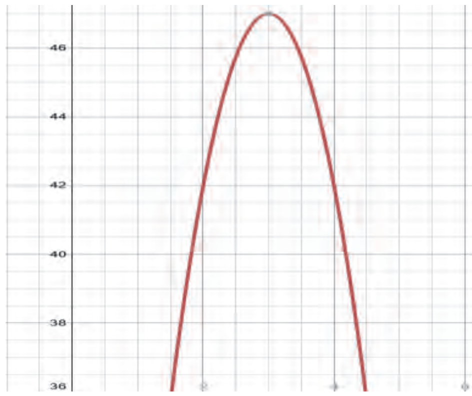
x	-2	-1	0	1	2	3
A(x)	0	-1	0	3	8	15



13.

$h(t) = 2 + 30t - 5t^2$.

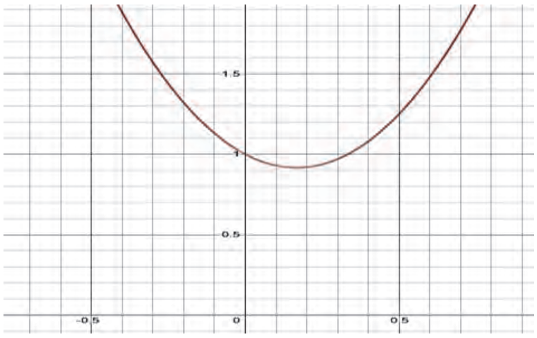
t	0	1	2	3	4	5	6
h(t)	2	27	42	47	42	27	2

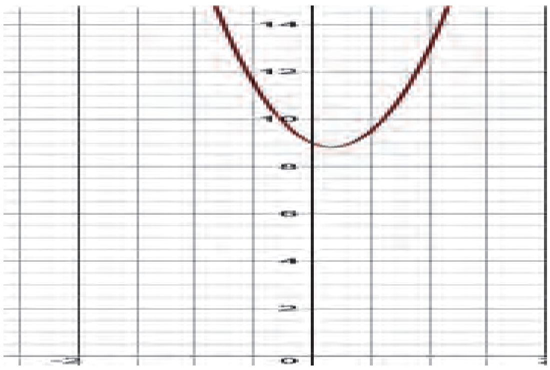


Solucionario

14.

a. V(1/6,11/12)
b. (1/6, 53/6)
c. (-1/4, 61/8)
d. (-1/2, -13)





Solucionario

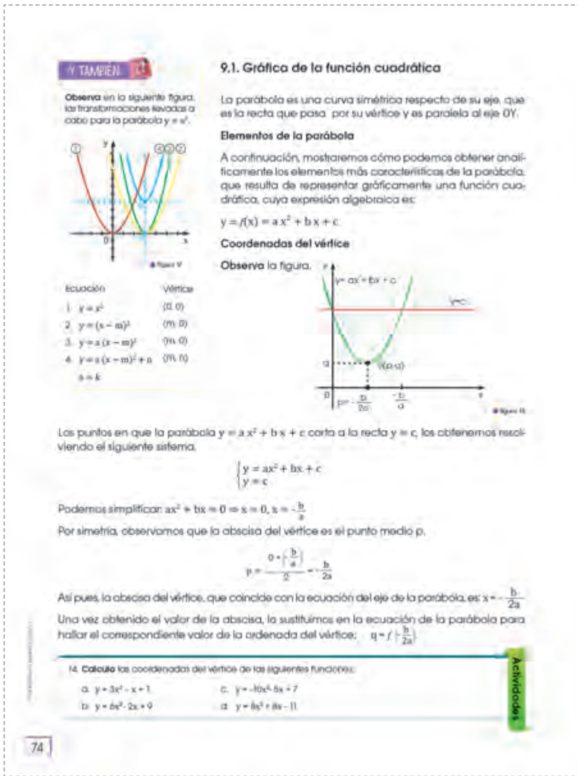
15.
a. V (1/8;-1/8), corte con x: (0,0) y (1/4,4), no corta al eje y

b. V (1,-1), corte con x: (0,0) y (2,0), no corta al eje y

c. V (-1,2), corte con x: (-1-$\sqrt{2}$,0) y (-1+$\sqrt{2}$), corta al eje y en (0,1)

d. V (0,3), no corta al eje x, corta al eje y en (0,3)

Página 74



9.1. Gráfica de la función cuadrática

La parábola es una curva simétrica respecto de su eje, que es la recta que pasa por su vértice y es paralela al eje OY.

Elementos de la parábola

A continuación, mostraremos cómo podemos obtener analíticamente los elementos más característicos de la parábola, que resulta de representar gráficamente una función cuadrática, cuya expresión algebraica es:

$y = f(x) = a x^2 + b x + c$

Coordenadas del vértice

Observa la figura.

Los puntos en que la parábola $y = a x^2 + b x + c$ corta a la recta $y = c$, los obtenemos resolviendo el siguiente sistema.

$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = c \end{cases}$

Podemos simplificar: $ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = -\frac{b}{a}$

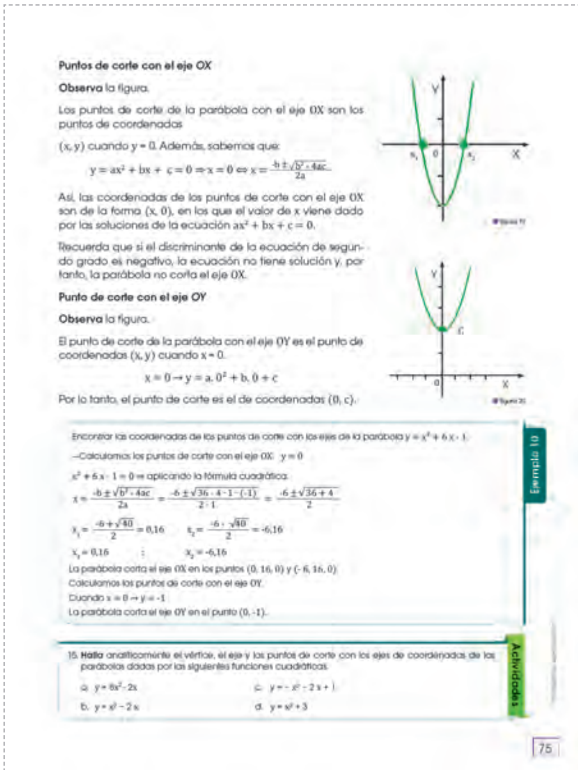
Por simetría, observamos que la abscisa del vértice es el punto medio p.

Así pues, la abscisa del vértice, que coincide con la ecuación del eje de la parábola, es $x = -\frac{b}{2a}$

Una vez obtenido el valor de la abscisa, lo sustituimos en la ecuación de la parábola para hallar el correspondiente valor de la ordenada del vértice.

14. Calcula las coordenadas del vértice de las siguientes funciones:

Página 75



Puntos de corte con el eje OX

Observa la figura.

Los puntos de corte de la parábola con el eje OX son los puntos de coordenadas (x, y) cuando y = 0. Además, sabemos que:

$y = ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Así, las coordenadas de los puntos de corte con el eje OX son de la forma (x, 0), en los que el valor de x viene dado por las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

Recuerda que si el discriminante de la ecuación de segundo grado es negativo, la ecuación no tiene solución y, por tanto, la parábola no corta el eje OX.

Punto de corte con el eje OY

Observa la figura.

El punto de corte de la parábola con el eje OY es el punto de coordenadas (x, y) cuando x = 0.

$x = 0 \rightarrow y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$

Por lo tanto, el punto de corte es el de coordenadas (0, c).

15. Halla analíticamente el vértice, el eje y los puntos de corte con los ejes de coordenadas de las parábolas dadas por las siguientes funciones cuadráticas.

Página 76

Representación de la parábola

Veamos cómo podemos representar una parábola a partir de sus elementos característicos.

Para hacerlo, observaremos si las ramas de la parábola están orientadas hacia arriba o hacia abajo, obtendremos las coordenadas del vértice, la ecuación del eje y, en caso de que corte los ejes, calcularemos las coordenadas de estos puntos de corte.

Ejemplo 11

Representar la gráfica de la función cuadrática cuya expresión algebraica es $y = -x^2 - 2$.

—Escribimos los coeficientes a, b y c: $a = -1$, $b = 0$ y $c = -2$.

—Observamos la orientación de las ramas de la parábola: como $a = -1 < 0$, las ramas de la parábola están orientadas hacia abajo.

—Calculamos la abcisa del vértice, que coincide con la ecuación del eje.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2 \cdot (-1)} = 0$$

—Sustituimos el valor de la abcisa en la ecuación de la parábola para calcular la ordenada del vértice.

$y = -x^2 - 2 = -0^2 - 2 = -2$

Así pues, las coordenadas del vértice son: V (0, -2).

Observa que la recta $x = 0$ es el eje OY. Así, al representar la parábola, hemos de tener presente que es simétrica respecto del eje OY.

—Calculamos los puntos de corte con el eje OX que son los de la forma (x, y), tales que $y = 0$.

$y = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 2 = 0$. El discriminante de esta ecuación es $b^2 - 4ac = -8 < 0$: por lo tanto, la ecuación no tiene solución. Así, la parábola no corta el eje OX.

—Calculamos el punto de corte con el eje OY, que es el de la forma (x, y) tal que $x = 0$: $x = 0 \Rightarrow y = -0^2 - 2 = -2$. Así, este punto es el (0, -2).

Observa que solo hemos obtenido el punto (0, -2). Por ello, para representar la gráfica, calculamos las coordenadas de más puntos. Basta con calcular las coordenadas de puntos de abcisa positiva, ya que la gráfica es simétrica respecto al eje OY.

x	1	2	3
y	-3	-6	-11

Ejemplo 12

Representa la gráfica de la función cuadrática cuya expresión algebraica es $y = x^2 + 2x$.

—Escribimos los coeficientes a, b y c: $a = 1$, $b = 2$ y $c = 0$.

—Observamos que las ramas de la parábola están orientadas hacia arriba, porque $a > 0$.

—Calculamos las coordenadas del vértice: $x = \frac{-b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot 1} = -1$. Luego sustituimos el valor de x en la ecuación original: $y = x^2 + 2x$.

$y = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) = -1$

—Sustituimos el valor de la abscisa en la ecuación de la parábola para calcular la ordenada del vértice.

$y = x^2 + x = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) = -1$

Las coordenadas del vértice son: V (-1, -1).

—Calculamos los puntos de corte con el eje OX que son los de la forma (x, y), tales que $y = 0$: $y = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ó $x = -2$. Así, la parábola corta el eje OX en los puntos (0, 0) y (-2, 0).

—Calculamos el punto de corte con el eje OY, que es el de la forma (x, y) tal que $x = 0$: $x = 0 \Rightarrow y = 0^2 + 2 \cdot 0 = 0$.

Así, este punto es el (0, 0).

Hemos obtenido el eje y tres puntos de la parábola.

A partir de estos datos, representamos la gráfica.

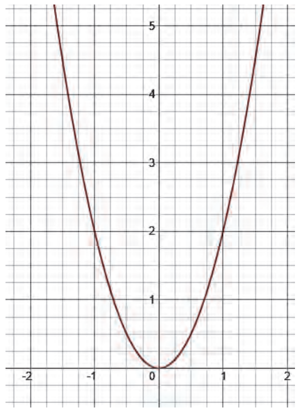
Actividades

16. **Representa** las gráficas de las funciones cuadráticas de la actividad de la página anterior.

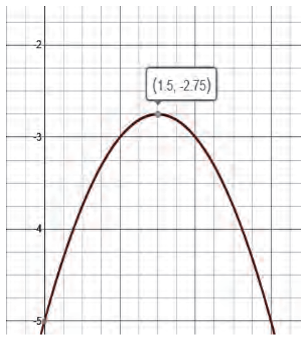
76

Solucionario

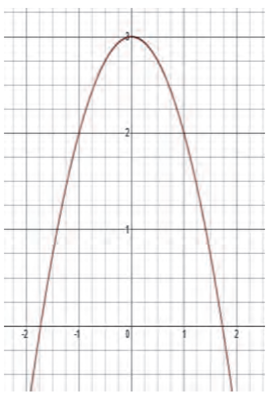
Ejercicio 16



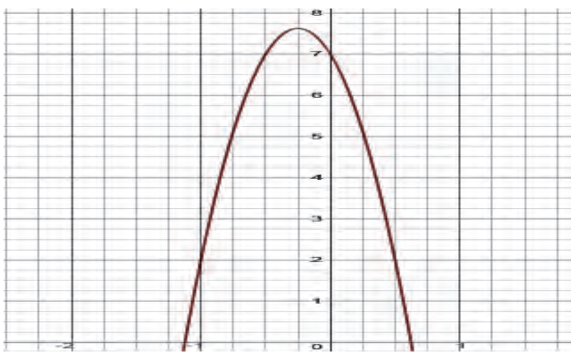
a.

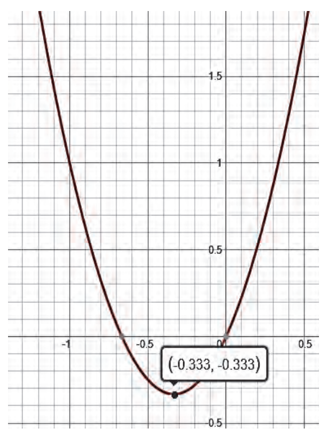


b.



c.





Página 77

Solucionario

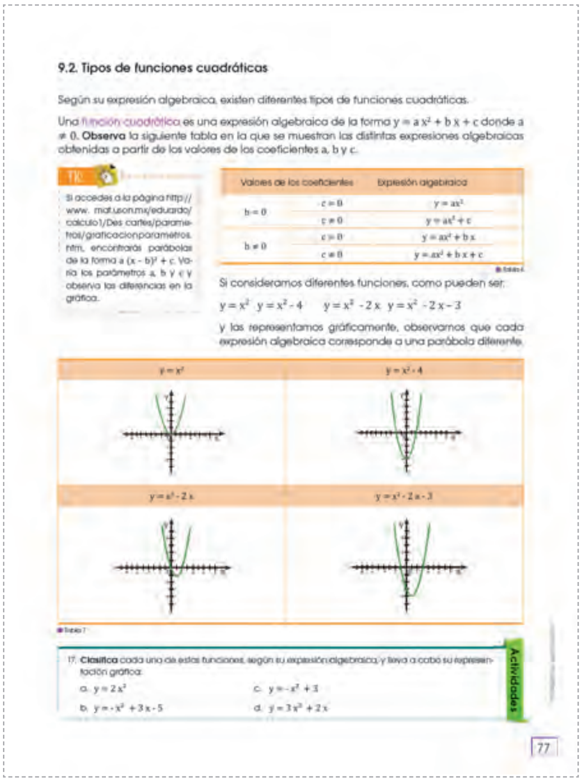
17.

a. $y=ax^2$

b. $y= ax^2+bx+c$

c. $y=ax^2+c$

d. $y=ax^2+bx$


9.2. Tipos de funciones cuadráticas

Según su expresión algebraica, existen diferentes tipos de funciones cuadráticas.

Una función cuadrática es una expresión algebraica de la forma $y = ax^2 + bx + c$ donde $a \neq 0$. **Observa** la siguiente tabla en la que se muestran las distintas expresiones algebraicas obtenidas a partir de los valores de los coeficientes a, b y c.

Si accedes a la página http://www.mat.uson.mx/eduardo/calculo1/Descartes/parametros/graficacionparametros.htm, encontrarás parábolas de la forma $a(x-b)^2 + c$. Varía los parámetros a, b y c y observa las diferencias en la gráfica.

Valores de los coeficientes		Expresión algebraica
$b = 0$	$c = 0$	$y = ax^2$
	$c \neq 0$	$y = ax^2 + c$
$b \neq 0$	$c = 0$	$y = ax^2 + bx$
	$c \neq 0$	$y = ax^2 + bx + c$

Si consideramos diferentes funciones, como pueden ser:

$y = x^2$ $y = x^2 - 4$ $y = x^2 - 2x$ $y = x^2 - 2x - 3$

y las representamos gráficamente, observamos que cada expresión algebraica corresponde a una parábola diferente.

Tabla 7

17. **Clasifica** cada una de estas funciones, según su expresión algebraica, y lleva a cabo su representación gráfica:

a. $y = 2x^2$

b. $y = -x^2 + 3x - 5$

c. $y = -x^2 + 3$

d. $y = 3x^2 + 2x$

Actividades

77

Página 78

Solucionario

18.

a. Puntos de corte con el eje x:(-2,0) y (2,0)
   Punto de corte con el eje y (0,-4)
   V (0,-6)

b. Puntos de corte con el eje x:(-3,0) y (3,0)
   Punto de corte con el eje y (0,9)
   V (0,9)

c. Puntos de corte con el eje x:(-1,0) y (3,0)
   Punto de corte con el eje y (0,-4)
   V (1,-4)

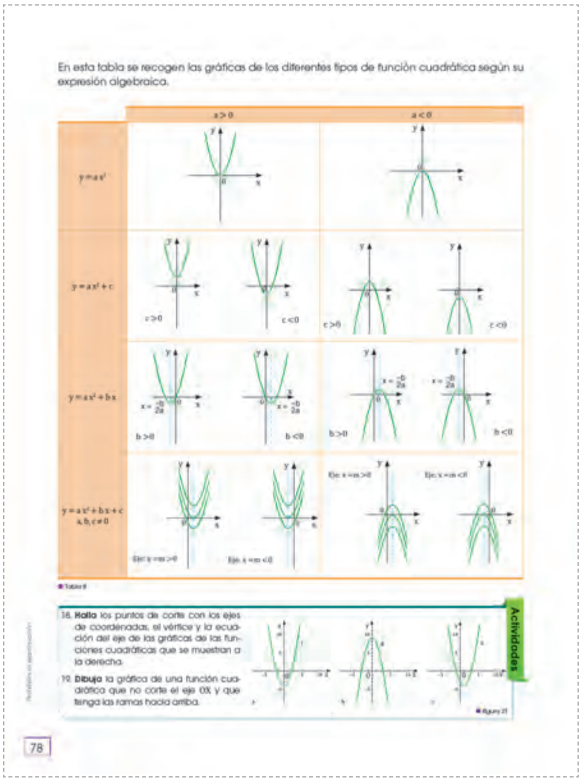

En esta tabla se recogen las gráficas de los diferentes tipos de función cuadrática según su expresión algebraica.

Tabla 8

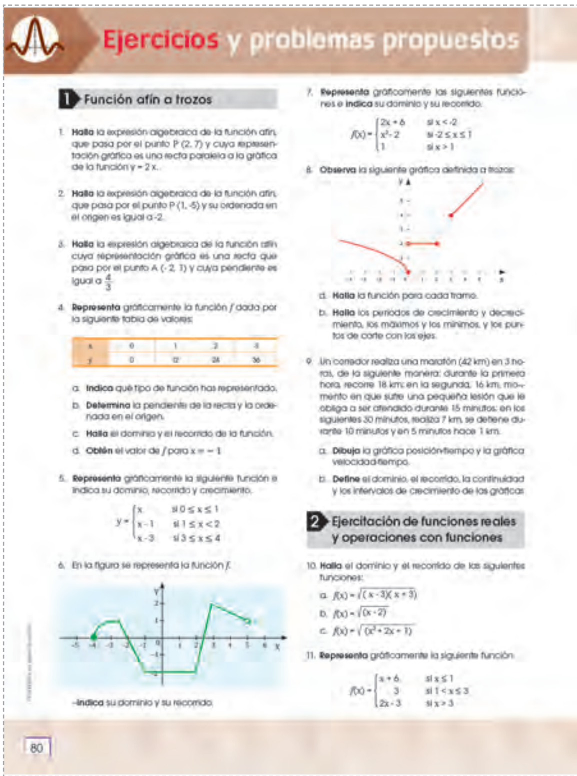
18. **Halla** los puntos de corte con los ejes de coordenadas, el vértice y la ecuación del eje de las gráficas de las funciones cuadráticas que se muestran a la derecha.

19. **Dibuja** la gráfica de una función cuadrática que no corte el eje OX y que tenga las ramas hacia arriba.

Actividades

78

Página 80



Ejercicios y problemas propuestos

1 Función afín a trozos

1. **Halla** la expresión algebraica de la función afín, que pasa por el punto P (2, 7) y cuya representación gráfica es una recta paralela a la gráfica de la función y = 2 x.

2. **Halla** la expresión algebraica de la función afín, que pasa por el punto P (1, -5) y su ordenada en el origen es igual a -2.

3. **Halla** la expresión algebraica de la función afín cuya representación gráfica es una recta que pasa por el punto A (- 2, 1) y cuya pendiente es igual a $\frac{4}{3}$

4. **Representa** gráficamente la función *f* dada por la siguiente tabla de valores:

x	0	1	2	3
y	0	12	24	36

a. **Indica** qué tipo de función has representado.
b. **Determina** la pendiente de la recta y la ordenada en el origen.
c. **Halla** el dominio y el recorrido de la función.
d. **Obtén** el valor de *f* para x = − 1

5. **Representa** gráficamente la siguiente función e indica su dominio, recorrido y crecimiento.

$$y = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ x-1 & \text{si } 1 \le x < 2 \\ x-3 & \text{si } 3 \le x \le 4 \end{cases}$$

6. En la figura se representa la función *f*.

-**Indica** su dominio y su recorrido.

7. **Representa** gráficamente las siguientes funciones e **indica** su dominio y su recorrido.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+6 & \text{si } x < -2 \\ x^2-2 & \text{si } -2 \le x \le 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

8. **Observa** la siguiente gráfica definida a trozos:

a. **Halla** la función para cada tramo.
b. **Halla** los periodos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y los mínimos, y los puntos de corte con los ejes.

9. Un corredor realiza una maratón (42 km) en 3 horas, de la siguiente manera: durante la primera hora, recorre 18 km; en la segunda, 16 km, momento en que sufre una pequeña lesión que le obliga a ser atendido durante 15 minutos; en los siguientes 30 minutos, realiza 7 km, se detiene durante 10 minutos y en 5 minutos hace 1 km.

a. **Dibuja** la gráfica posición-tiempo y la gráfica velocidad-tiempo.
b. **Define** el dominio, el recorrido, la continuidad y los intervalos de crecimiento de las gráficas.

2 Ejercitación de funciones reales y operaciones con funciones

10. **Halla** el dominio y el recorrido de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \sqrt{(x-3)(x+3)}$
b. $f(x) = \sqrt{(x-2)}$
c. $f(x) = \sqrt{(x^2+2x+1)}$

11. **Representa** gráficamente la siguiente función.

$$f(x) = \begin{cases} x+6 & \text{si } x \le 1 \\ 3 & \text{si } 1 < x \le 3 \\ 2x-3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

80

Solucionario

1. Como la función pasa por el punto (2,7), sustituimos este en la forma general de la ecuación y = mx + b, para encontrar b:

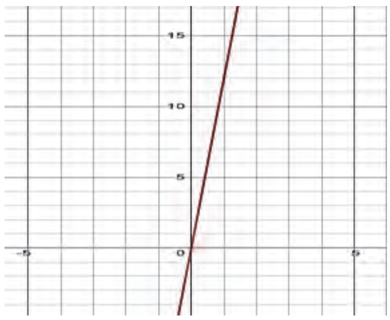
$7 = 2.\,2 + b \rightarrow b = 7 - 4 = 3.$

Por tanto la ecuación es $y = 2x + 3$

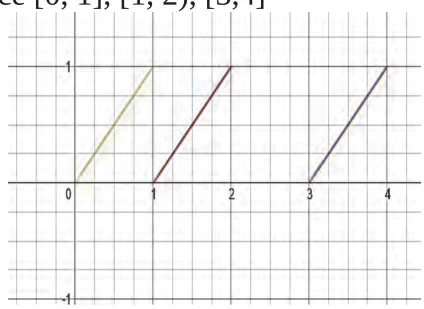
2. $y = -3x-2$

3. $y = \frac{4x}{3} - \frac{1}{3}$

4. a)
b) m = 12 b = 0, D(f): x∈ R, R(f)=y∈R
c) f(-1)= -12



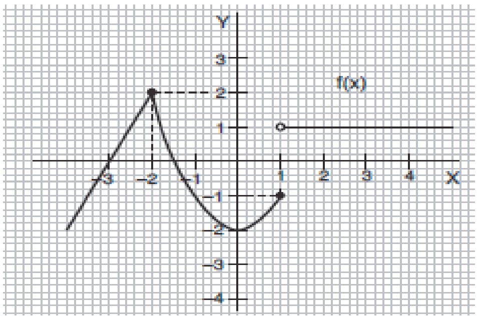
5.
D (f) = [0, 1] U [1, 2) U [3,4], R(f) = [0, 1]
Crece [0, 1], [1, 2), [3,4]



6. a) D (f) = [−4, 5), R (f) = [−2, 2];

Solucionario

7.



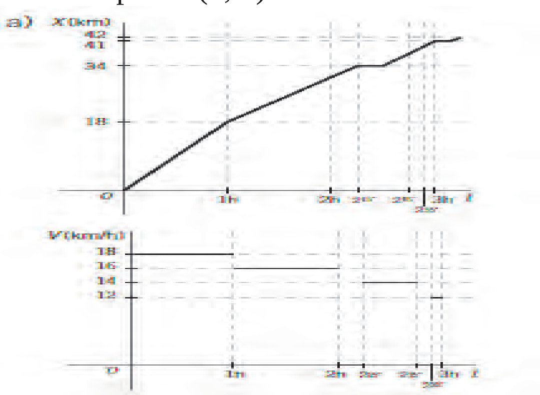
8. La función f es polinómica en cada uno de los intervalos en que está definida. Por tanto, su dominio es la unión de los intervalos dados en la definición de la función.

D(f) = (−∞,−2) **U** [−2, 1] **U**(1, + ∞) = |R

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ 2 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ x+1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

9.

b) Decrece en (−∞, 0] y crece en [3,+∞). La función no tiene máximos ni mínimos y corta los ejes en el punto (0, 0).



10.

D (*f*) = [0, 3] *D* (*g*) = [0, 3]

R (*f*) = [0, 42] *R* (*g*) = [0,18]

La función *f* (*x*) es continua en todo su dominio y crece en los intervalos (0, 2 h), (2 h 15 min, 2 h 45 min) y (2 h 55 min, 3 h).

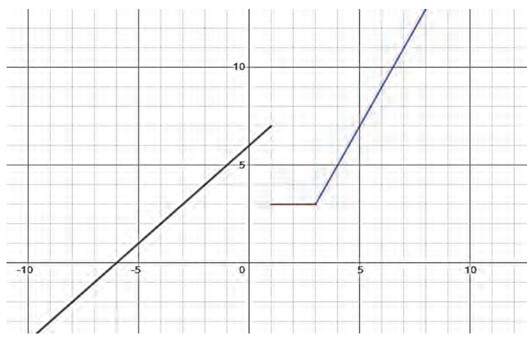
La función *g* (*x*) es discontinua para los siguientes valores de *x:* 1 h, 2 h, 2 h 15 min, 2 h 45 min y 2 h 55 min. No hay intervalos de crecimiento ni decrecimiento, ya que la función es constante en todo su recorrido, salvo en las discontinuidades.

11. a. D(f) = (-∞,-3] ∪ [3,+∞); R(f) = {y|y≥0}

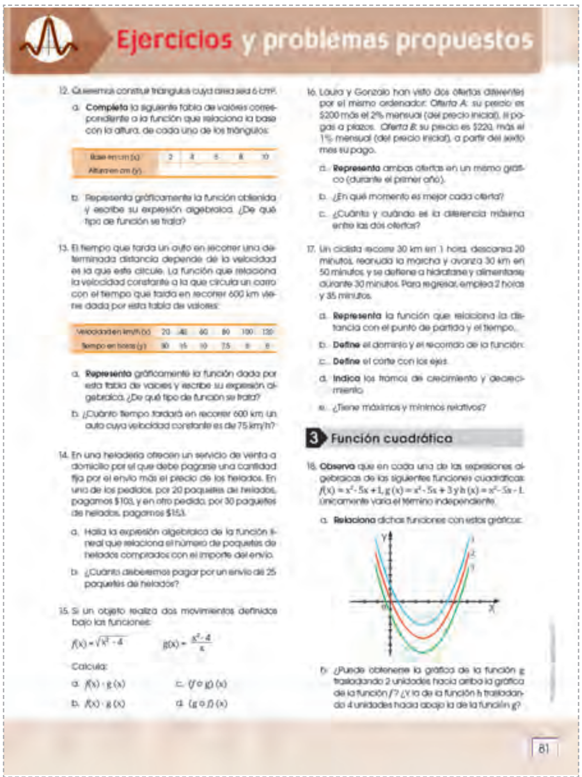
b. D (f) {x | x ≥ 2}, R (f) = {y | y ≥ 0}

c. D (f) = R, R (f) = [0, + ∞).

12.



Página 81


Ejercicios y problemas propuestos

12. Queremos construir triángulos cuya área sea 6 cm².

a. **Completa** la siguiente tabla de valores correspondiente a la función que relaciona la base con la altura, de cada uno de los triángulos:

Base en cm (x)	2	4	6	8	10
Altura en cm (y)					

b. Representa gráficamente la función obtenida y escribe su expresión algebraica. ¿De qué tipo de función se trata?

13. El tiempo que tarda un auto en recorrer una determinada distancia depende de la velocidad a la que este circule. La función que relaciona la velocidad constante a la que circula un carro con el tiempo que tarda en recorrer 600 km viene dada por esta tabla de valores:

Velocidad en km/h (x)	20	40	60	80	100	120
Tiempo en horas (y)	30	15	10	7,5	6	[illegible]

a. **Representa** gráficamente la función dada por esta tabla de valores y escribe su expresión algebraica. ¿De qué tipo de función se trata?

b. ¿Cuánto tiempo tardará en recorrer 600 km un auto cuya velocidad constante es de 75 km/h?

14. En una heladería ofrecen un servicio de venta a domicilio por el que debe pagarse una cantidad fija por el envío más el precio de los helados. En uno de los pedidos, por 20 paquetes de helados, pagamos $103, y en otro pedido, por 30 paquetes de helados, pagamos $153.

a. Halla la expresión algebraica de la función lineal que relaciona el número de paquetes de helados comprados con el importe del envío.

b. ¿Cuánto deberemos pagar por un envío de 25 paquetes de helados?

15. Si un objeto realiza dos movimientos definidos bajo las funciones:

$f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ $\quad g(x) = \frac{x^2 - 4}{x}$

Calcula:

a. $f(x) \cdot g(x)$ c. $(f \circ g)(x)$

b. $f(x) \cdot g(x)$ d. $(g \circ f)(x)$

16. Laura y Gonzalo han visto dos ofertas diferentes por el mismo ordenador. Oferta A: su precio es $200 más el 2% mensual (del precio inicial), si pagas a plazos. Oferta B: su precio es $220, más el 1% mensual (del precio inicial), a partir del sexto mes su pago.

a. **Representa** ambas ofertas en un mismo gráfico (durante el primer año).

b. ¿En qué momento es mejor cada oferta?

c. ¿Cuánto y cuándo es la diferencia máxima entre las dos ofertas?

17. Un ciclista recorre 30 km en 1 hora, descansa 20 minutos, reanuda la marcha y avanza 30 km en 50 minutos y se detiene a hidratarse y alimentarse durante 30 minutos. Para regresar, emplea 2 horas y 35 minutos.

a. **Representa** la función que relaciona la distancia con el punto de partida y el tiempo.

b. **Define** el dominio y el recorrido de la función.

c. **Define** el corte con los ejes.

d. **Indica** los tramos de crecimiento y decrecimiento.

e. ¿Tiene máximos y mínimos relativos?

3 Función cuadrática

18. **Observa** que en cada una de las expresiones algebraicas de las siguientes funciones cuadráticas $f(x) = x^2 - 5x + 1$, $g(x) = x^2 - 5x + 3$ y $h(x) = x^2 - 5x - 1$, únicamente varía el término independiente.

a. **Relaciona** dichas funciones con estas gráficas:

b. ¿Puede obtenerse la gráfica de la función g trasladando 2 unidades hacia arriba la gráfica de la función f? ¿Y la de la función h trasladando 4 unidades hacia abajo la de la función g?

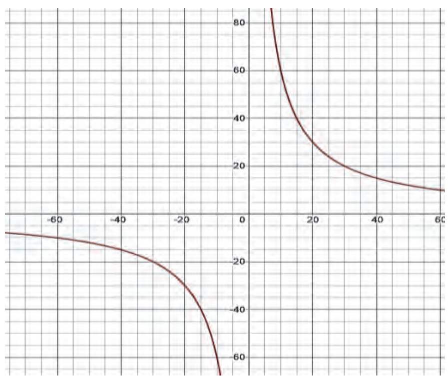
81

Solucionario

13.

Base en cm (x)	2	4	6	8	10
Altura en cm(y)	3	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$

14.



a. La expresión algebraica de la función es $y = \frac{600}{x}$. Es una función de proporcionalidad inversa.
b. El tiempo que tarda en recorrer 600 km un auto a una velocidad de 75 km/h es de 8 horas.

15.
a. y = 5x + 3
b. Debemos pagar $128 por un envío de 25 paquetes de helado.

Solucionario

16.

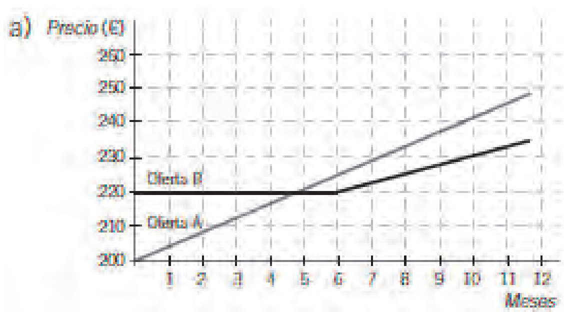
a) $f(x) - g(x) = \sqrt{x^2 - 4} - \dfrac{x^2 - 4}{x}$

b) $f(x) \cdot g(x) = \dfrac{(x^2 - 4)^{3/2}}{x}$

c) $(f \circ g)(x) = \sqrt{\dfrac{(x^2 - 4)^2 - 4x^2}{x^2}} = \sqrt{\dfrac{x^4 - 12x^2 + 16}{x^2}}$

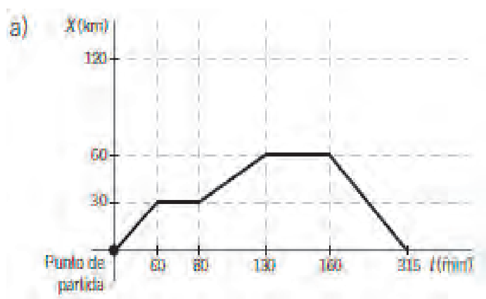
d) $(g \circ f)(x) = \dfrac{x^2 - 8}{x}$

17.



a. La oferta *A* es mejor los 5 primeros meses. A partir de entonces, es mejor la oferta *B*.
b. La diferencia es máxima el primer en el momento de comprar el ordenador y es de $20.

18.



a.
b. *D* (*f*) = [0, 5 h 15 min] *R*(*f*) = [0, 60]
c. Los puntos de corte son (0, 0) y (5 h 15 min, 0).
d. Crece en (0, 1), (1 h 20 min, 2 h 10 min) y decrece en (2 h40 min, 5 h 15 min).
e. No tiene máximos ni mínimos relativos.

19.
f(x) gráfica 2, g (x) gráfica 1, h(x) gráfica 3
b) Se puede obtener la gráfica de la función g trasladando 2 unidades hacia arriba la gráfica de la función f, pero no se puede obtener la función h trasladando 4 unidades hacia abajo la de la función g.

Solucionario

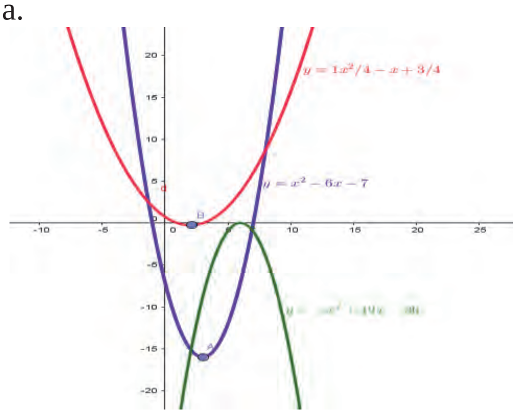
20. $y = \frac{8}{3}x^2 - 16x + 24$

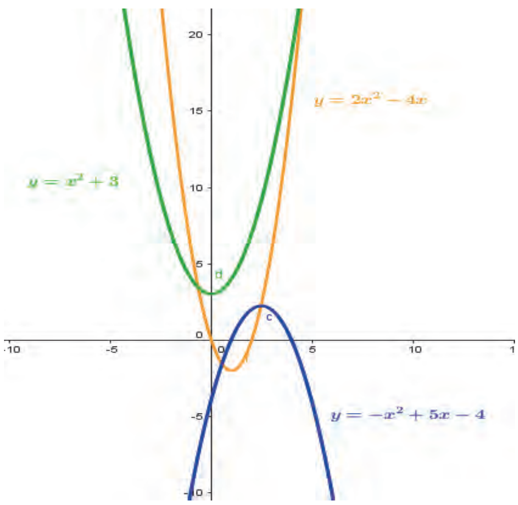
21.

a. Vértice (-1;-8), eje de simetría: x = -1
b. Vértice (0;2), eje de simetría: x = 0
c. Vértice $\left(\frac{1}{4};\frac{31}{16}\right)$, eje de simetría: $x = \frac{1}{4}$
d. Vértice (-4;-1), eje de simetría: x = -4

22.
a. tiene una solución doble, porque el discriminante es 0
b. tiene dos soluciones, porque el discriminante es 10
c. tiene dos soluciones, porque el discriminante es 1
d. no tiene solución porque el discriminante es < 0

23.
a.



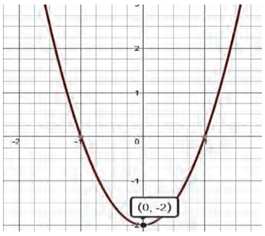


Página 82


Ejercicios y problemas propuestos

Solucionario

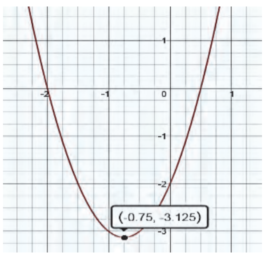
24.



25.

a.
Dominio: (0;-2)
Recorrido: y ≥-2
Puntos de corte con x: (-1,0)y(1,0)
Puntos de corte con y: (0,-2)
Crece: (0,+∞) y decrece (-∞,0)
Mínimo absoluto en (0,-2)

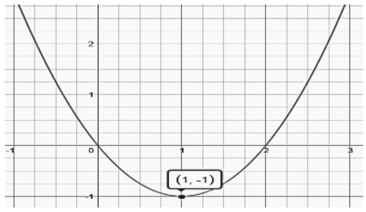
b.



Dominio: (-2; 1/2)
Recorrido: y ≥- $\frac{25}{8}$

Puntos de corte con x:(-2,0)y($\frac{1}{2}$,0)
Puntos de corte con y: (0,-2)
Crece: (-3/4,+∞) y decrece (-∞,-3/4)
Mínimo absoluto en (-3/4,-25/8)

c.



Dominio: (0;2)
Recorrido: y ≥-1
Puntos de corte con x:(0,0) y (2,0)
Puntos de corte con y: (0,0)
Crece: (1,+∞) y decrece (-∞,1)
Mínimo absoluto en (1,-1)
Página sesenta y nueve (69)

Página 82

Ejercicios y problemas propuestos

19. **Determina** la expresión algebraica de la función cuadrática que cumple las siguientes condiciones:
    - La imagen de 0 es 24.
    - Pasa por el punto P (3, 0).

20. **Halla** el eje de simetría y las coordenadas del vértice de cada una de las siguientes parábolas sin representarlas gráficamente:
    a. $y = 2x^2 + 4x - 6$ c. $y = -2x^2 + x$
    b. $y = -x^2 + 2$ d. $y = x^2 - 8x + 15$

21. **Halla** el número de puntos de corte con el eje de abscisas de las siguientes parábolas:
    a. $y = x^2 + 10x + 25$ c. $y = x^2 - 3x + 2$
    b. $y = -x^2 - 8x + 9$ d. $y = 2x^2 - x + 1$

22. **Representa** gráficamente las siguientes funciones de segundo grado:
    a. $y = x^2 - 6x - 7$ d. $y = 2x^2 - 4x$
    b. $y = \frac{1}{4}x^2 - x + \frac{3}{4}$ e. $y = -x^2 + 5x - 4$
    c. $y = -x^2 + 12x - 36$ f. $y = x^2 + 2$
    —**Halla** el dominio y el recorrido de cada función. ¿Qué características presenta cada una de las funciones?

23. **Calcula** los coeficientes a, b y c de la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ si sabemos que pasa por los puntos (-1, 10), (0, 2) y (2, 4).

24. **Representa** gráficamente las siguientes funciones:
    a. $y = 2x^2 - 2$ c. $y = x^2 - 2x$
    b. $y = 2x^2 + 3x - 2$ d. $y = -x^2 + 7$
    A partir de las gráficas obtenidas, **determina** las siguientes características de cada función: dominio y recorrido; puntos de corte con los ejes; intervalos de crecimiento y decrecimiento; y máximos y mínimos absolutos y relativos.

25. **Determina** las coordenadas del vértice de la parábola $y = 2x^2 - x + 3$.

26. **Halla** el valor de c en la función $y = 2x^2 - 5x + c$ si su gráfica pasa por el punto (-1, 3).

27. **Efectúa** las siguientes transformaciones, a partir de la función $f(x)$ representada en el gráfico:
    a. $f(x) - 2$
    b. $f(x + 3)$
    c. $f(-x)$
    d. $-f(x)$

28. **Halla** la función cuadrática cuya gráfica tiene su vértice en el punto V (-1, 2) y se obtiene por traslación vertical de la parábola $y = 3x^2 + 6x$.

29. Si $f(x) = x^2$, representa en los mismos ejes de coordenadas las siguientes funciones:
    a. $f(x) - 2$ c. $f(2x)$
    b. $f(x + 4)$ d. $f(0,5x)$

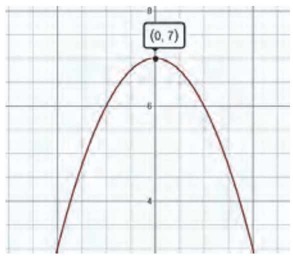
30. Una persona que se dedica a solucionar problemas informáticos de particulares, cobra $20 por el desplazamiento y $30 por cada hora de trabajo.
    a. **Construye** una tabla de valores y **representa** gráficamente la función que relaciona el número de horas de trabajo de una salida con el importe que cobrará.
    b. **Halla** la expresión algebraica de la función y **determina** el número de horas que ha trabajado en una salida si ha cobrado $95.

31. La suma de los cuadrados de dos números consecutivos es 4 141. ¿Cuáles son estos números?

32. Si lanzamos una pelota verticalmente hacia arriba, con una velocidad inicial de 40 m/s, la altura que esta alcanza respecto al punto de lanzamiento en función del tiempo viene dada por la expresión $h(t) = 40t - 5t^2$.
    a. **Construye** una tabla de valores y **representa** gráficamente dicha función.
    b. **Determina** analítica y gráficamente la altura que va alcanzando la pelota en función del tiempo, durante los primeros 8 segundos.

82

Solucionario



Dominio: (-2,646; 2,646)
Recorrido: $y \leq 7$
Puntos de corte con x:
(-2,646,0)y(2,646;0)
Puntos de corte con y: (0,7)
Crece: $(-\infty,0)$ y decrece $(0,+\infty)$
Máximo absoluto en (0,7)

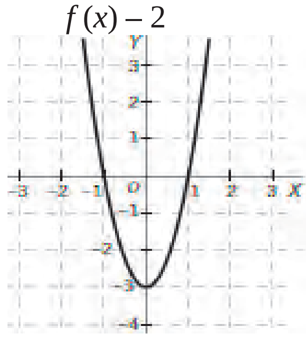
26. $y = 2x^2 - x + 3.$,
a = 2, b = -1 y c = 3.Por tanto:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-1)}{2.2} = \frac{1}{4};\ y = \frac{23}{8} \qquad V\left(\frac{1}{4}; \frac{23}{8}\right)$$

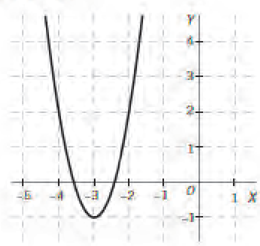
27. Sustituimos el punto (-1,3) en $y = 2x^2 - x + c$
$3 = 2.\ 1 + 1 + c \rightarrow 3 = 3 + c \rightarrow c = 0$

28. La función del gráfico es $f(x) = 3x^2 - 1$.

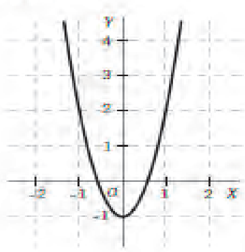
$f(x) - 2$



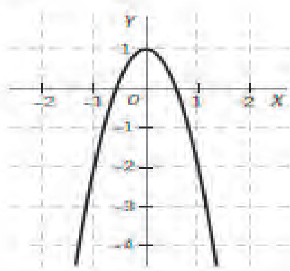
b) $f(x+3)$



c) $f(-x)$



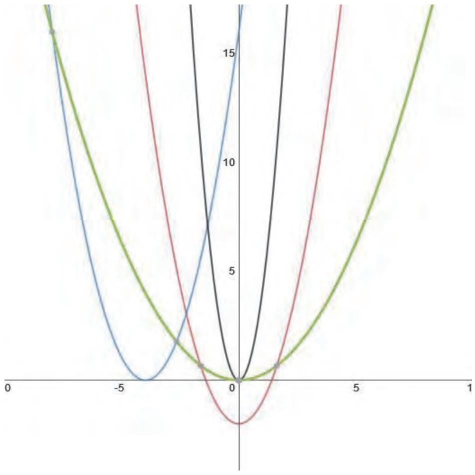
d) $-f(x)$



29. $y = x^2 + 2x + 3$.

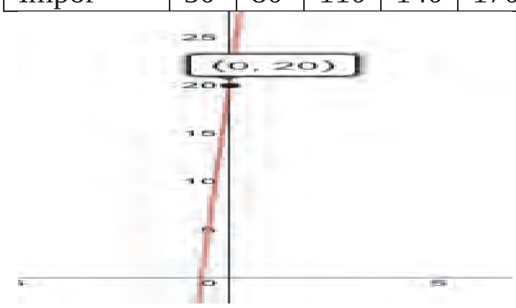
Solucionario

30.



31.

x(horas	1	2	3	4	5	6	7
Impor	50	80	110	140	170	200	230



b) y = 30x+20, el número de horas que ha trabajado en una salida es 2 horas y media si ha cobrado $95.

Solucionario

32. Un número : x

El consecutivo: x + 1

$x^2+(x + 1)^2= 4141 \rightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 - 4141 = 0 \rightarrow 2x^2 + 2x - 4140 = 0$

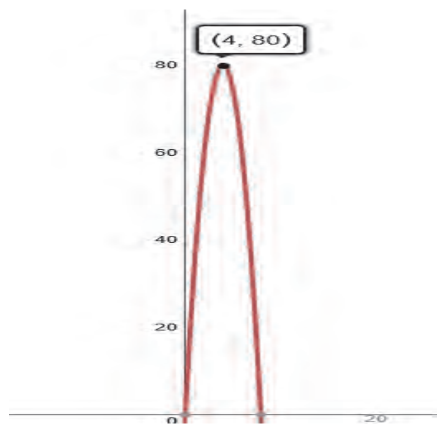
$x^2 + x-2070 = 0$, $(x + 46)(x - 45)=0\rightarrow x = 45, x = 46$

33.

a.

t	1	2	3	4	5	6	7	8
h	35	60	75	80	75	60	35	0

b.



Página 82

Ejercicios y problemas propuestos

19. **Determina** la expresión algebraica de la función cuadrática que cumple las siguientes condiciones:
    - La imagen de 0 es 24.
    - Pasa por el punto P (3, 0).

20. **Halla** el eje de simetría y las coordenadas del vértice de cada una de las siguientes parábolas sin representarlas gráficamente:
    a. $y = 2x^2 + 4x - 6$
    b. $y = -x^2 + 2$
    c. $y = -2x^2 + x$
    d. $y = x^2 - 8x + 15$

21. **Halla** el número de puntos de corte con el eje de abscisas de las siguientes parábolas:
    a. $y = x^2 + 10x + 25$
    b. $y = -x^2 - 8x + 9$
    c. $y = x^2 - 3x + 2$
    d. $y = 2x^2 - x + 1$

22. **Representa** gráficamente las siguientes funciones de segundo grado:
    a. $y = x^2 - 6x - 7$
    b. $y = \frac{1}{4}x^2 - x + \frac{3}{4}$
    c. $y = -x^2 + 12x - 36$
    d. $y = 2x^2 - 4x$
    e. $y = -x^2 + 5x - 4$
    f. $y = x^2 + 3$

    —**Halla** el dominio y el recorrido de cada función. ¿Qué características presenta cada una de las funciones?

23. **Calcula** los coeficientes a, b y c de la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ si sabemos que pasa por los puntos (-1, 10), (0, 2) y (2, 4).

24. **Representa** gráficamente las siguientes funciones:
    a. $y = 2x^2 - 2$
    b. $y = -2x^2 + 3x - 2$
    c. $y = x^2 - 2x$
    d. $y = -x^2 + 7$

    A partir de las gráficas obtenidas, **determina** las siguientes características de cada función: dominio y recorrido; puntos de corte con los ejes; intervalos de crecimiento y decrecimiento; y máximos y mínimos absolutos y relativos.

25. **Determina** las coordenadas del vértice de la parábola $y = 2x^2 - x + 3$.

26. **Halla** el valor de c en la función $y = 2x^2 - 5x + c$ si su gráfica pasa por el punto (-1, 3).

27. **Efectúa** las siguientes transformaciones, a partir de la función $f(x)$ representada en el gráfico:
    a. $f(x) - 2$
    b. $f(x + 3)$
    c. $f(-x)$
    d. $-f(x)$

28. **Halla** la función cuadrática cuya gráfica tiene su vértice en el punto V (-1, 2) y se obtiene por traslación vertical de la parábola $y = 3x^2 + 6x$.

29. Si $f(x) = x^2$, representa en los mismos ejes de coordenadas las siguientes funciones:
    a. $f(x) - 2$
    b. $f(x + 4)$
    c. $f(2x)$
    d. $f(0,5x)$

30. Una persona que se dedica a solucionar problemas informáticos, de particulares, cobra $20 por el desplazamiento y $30 por cada hora de trabajo.
    a. **Construye** una tabla de valores y **representa** gráficamente la función que relaciona el número de horas de trabajo de una salida con el importe que cobrará.
    b. **Halla** la expresión algebraica de la función y **determina** el número de horas que ha trabajado en una salida si ha cobrado $95.

31. La suma de los cuadrados de dos números consecutivos es 4 141. ¿Cuáles son estos números?

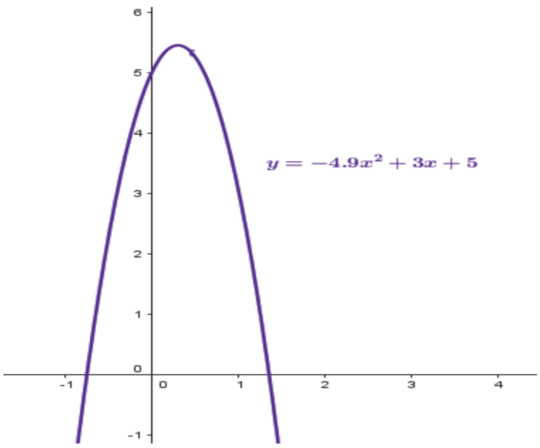
32. Si lanzamos una pelota verticalmente hacia arriba, con una velocidad inicial de 40 m/s, la altura que esta alcanza respecto al punto de lanzamiento en función del tiempo viene dada por la expresión $h(t) = 40t - 5t^2$.
    a. **Construye** una tabla de valores y **representa** gráficamente dicha función.
    b. **Determina** analítica y gráficamente la altura que va alcanzando la pelota en función del tiempo, durante los primeros 8 segundos.

82

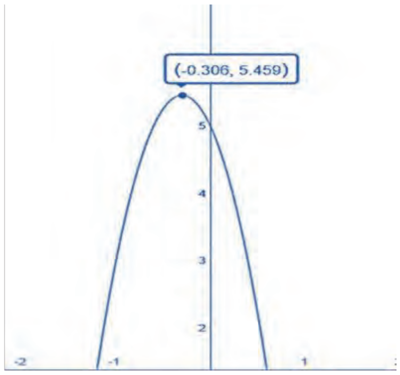
Solucionario

34.

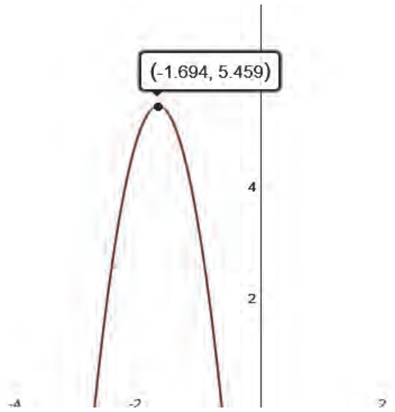
a.



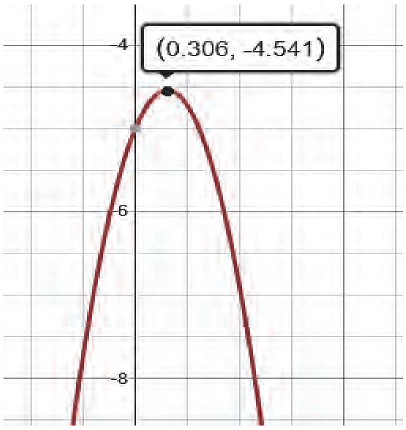
c.



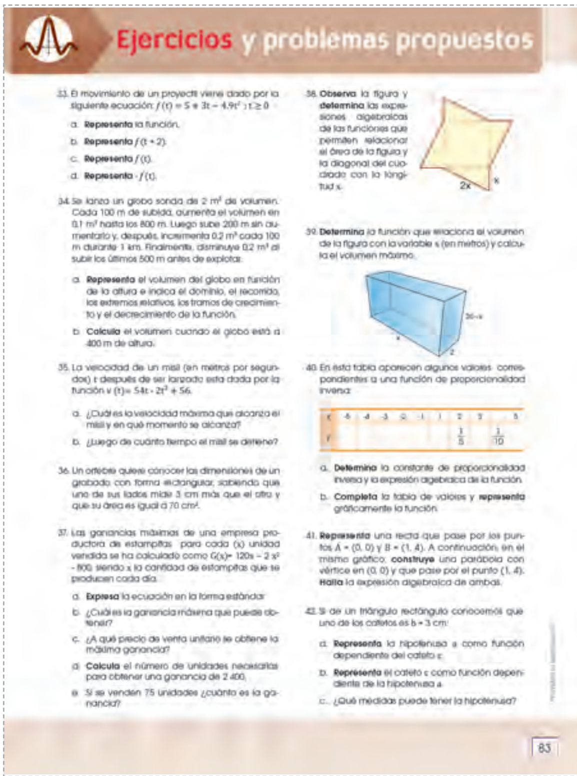
b.



d.



Página 83



Ejercicios y problemas propuestos

33. El movimiento de un proyectil viene dado por la siguiente ecuación: $f(t) = 5 + 3t - 4.9t^2$; $t \geq 0$
    a. **Representa** la función.
    b. **Representa** $f(t + 2)$.
    c. **Representa** $f(t)$.
    d. **Representa** $-f(t)$.

34. Se lanza un globo sonda de 2 m^3 de volumen. Cada 100 m de subida, aumenta el volumen en 0,1 m^3 hasta los 800 m. Luego sube 200 m sin aumentarlo y, después, incrementa 0,2 m^3 cada 100 m durante 1 km. Finalmente, disminuye 0,2 m^3 al subir los últimos 500 m antes de explotar.
    a. **Representa** el volumen del globo en función de la altura e indica el dominio, el recorrido, los extremos relativos, los tramos de crecimiento y el decrecimiento de la función.
    b. **Calcula** el volumen cuando el globo está a 400 m de altura.

35. La velocidad de un misil (en metros por segundos) t después de ser lanzado está dada por la función $v(t) = 54t - 2t^2 + 56$.
    a. ¿Cuál es la velocidad máxima que alcanza el misil y en qué momento se alcanza?
    b. ¿Luego de cuánto tiempo el misil se detiene?

36. Un orfebre quiere conocer las dimensiones de un grabado con forma rectangular, sabiendo que uno de sus lados mide 3 cm más que el otro y que su área es igual a 70 cm^2.

37. Las ganancias máximas de una empresa productora de estampitas para cada (x) unidad vendida se ha calculado como $G(x) = 120x - 2x^2 - 800$ siendo x la cantidad de estampitas que se producen cada día.
    a. **Expresa** la ecuación en la forma estándar.
    b. ¿Cuál es la ganancia máxima que puede obtener?
    c. ¿A qué precio de venta unitario se obtiene la máxima ganancia?
    d. **Calcula** el número de unidades necesarias para obtener una ganancia de 2 400.
    e. Si se venden 75 unidades ¿cuánto es la ganancia?

38. **Observa** la figura y **determina** las expresiones algebraicas de las funciones que permiten relacionar el área de la figura y la diagonal del cuadrado con la longitud x.

39. **Determina** la función que relaciona el volumen de la figura con la variable x (en metros) y calcula el volumen máximo.

40. En esta tabla aparecen algunos valores correspondientes a una función de proporcionalidad inversa:

x	-5	-4	-3	-2	-1	1	2	3		5
y							$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{10}$	

    a. **Determina** la constante de proporcionalidad inversa y la expresión algebraica de la función.
    b. **Completa** la tabla de valores y **representa** gráficamente la función.

41. **Representa** una recta que pase por los puntos A = (0, 0) y B = (1, 4). A continuación, en el mismo gráfico, **construye** una parábola con vértice en (0, 0) y que pase por el punto (1, 4). **Halla** la expresión algebraica de ambas.

42. Si de un triángulo rectángulo conocemos que uno de los catetos es b = 3 cm:
    a. **Representa** la hipotenusa a como función dependiente del cateto c.
    b. **Representa** el cateto c como función dependiente de la hipotenusa a.
    c. ¿Qué medidas puede tener la hipotenusa?

83

Solucionario

35.

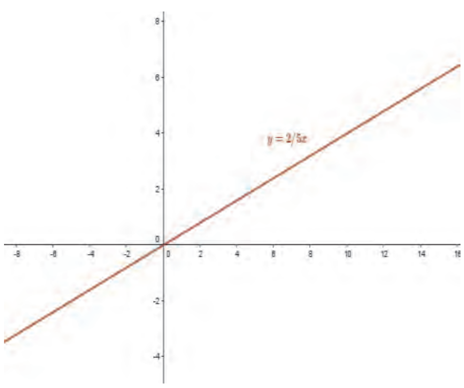
a. D (f) = [0, 2 000], R (f) = [2; 4,8], punto máximo en [2 000; 4,8], crece [0, 800), (1 000, 2 000), decrece (2 000, 2 500);

b. el volumen cuando el globo está a 400 m de altura es de 2,4 m^3.

36.

a. La velocidad máxima que alcanza el misil es de 13,5 m, a los 7 minutos aproximadamente.

b. El misil se detiene a los 28 segundos.



Solucionario

37. El lado mayor, 10 cm, y el lado menor, 7 cm.

38. a. $G(x) = -2x^2 + 120x - 800$.
b. La ganancia máxima que se puede obtener es de 1000.
c. La máxima ganancia se obtiene a un precio de venta de 30.

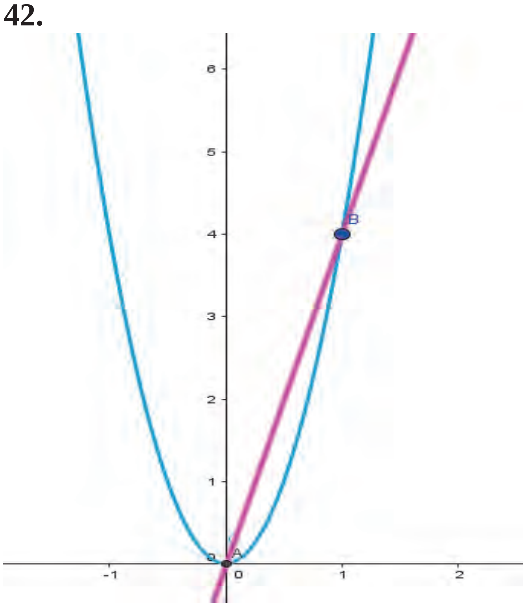
39. Lado del cuadrado: $l = \sqrt{(2x)^2 - x^2} = x\sqrt{3}$
Diagonal del cuadrado = $\sqrt{3x^2 + 3x^2} = x\sqrt{6}$
Área del cuadrado: $A(x) = 3x^2$
Área del triángulo: $A = \frac{2x.x}{2} = x^2$
Área de la figura: $A = 3x^2 + 4.\, x^2 = 7x^2$

40. $V = x.\ 2\ (20-x)\ m^3 = 40x - 2x^2)m^3$

41. a. $k = \frac{2}{5}$, $y = \frac{2}{5x}$
b.

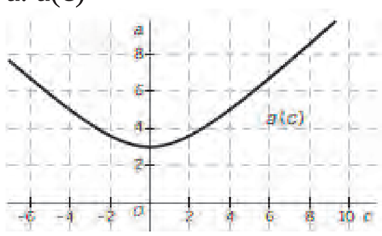
x	-5	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4
y	$-\frac{2}{25}$	$-\frac{2}{20}$	$-\frac{2}{15}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{10}$

42.

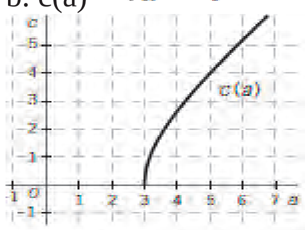


Expresión de la recta: $y = 4x$
Expresión de la parábola: $y = 4x^2$

43. a. $a(c) = \sqrt{c^2 + 9}$



b. $c(a) = \sqrt{a^2 - 9}$



c. La hipotenusa puede medir $[3, +\infty)$

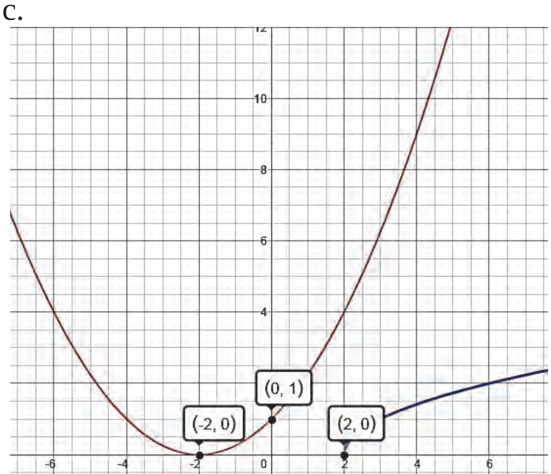
Solucionario

44.

a. $f(2) = 0$, $f(4) = \sqrt{2}$, $g(2) = 4$, $g(4) = 9$

b. Estudio de $f(x)$:
$D(g) = [2,+\infty)$ $R(g) = [0,+\infty)$
Creciente en todo su dominio y no presenta extremos. Corta los ejes en (2, 0). No tiene simetría ni periodicidad.
Estudio de $g(x)$:
$D(g) = [-2, +\infty)$ $R(g) = [0, +\infty)$
Crece de [-2; + ∞) y decrece (-∞; 2]. Corta al eje x en (-2, 0).Corta al eje y en (0; 1). Eje de simetría: x = -2

c.



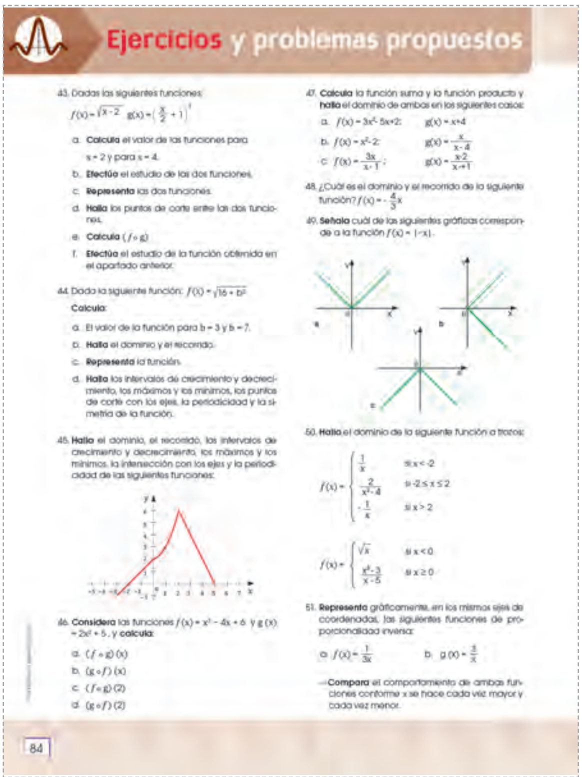
d. No tienen punto de corte

e. $(fog)(x) = \dfrac{\sqrt{x(x+4)}}{2}$

f. Estudio de $g(x)$:
$D(g) = (-\infty; -4) \cup (0, +\infty)$; $R(g) = [0, +\infty)$
Crece de [0; + ∞) y decrece (-∞; -4].

Puntos de corte con el eje x en (-4, 0) y (0;0).Corta al eje y en (0; 0).

Página 84



Ejercicios y problemas propuestos

43. Dadas las siguientes funciones:
$f(x) = \sqrt{x-2}$ $g(x) = \left(\frac{x}{2}+1\right)^2$
a. **Calcula** el valor de las funciones para x = 2 y para x = 4.
b. **Efectúa** el estudio de las dos funciones.
c. **Representa** las dos funciones.
d. **Halla** los puntos de corte entre las dos funciones.
e. **Calcula** $(f \circ g)$
f. **Efectúa** el estudio de la función obtenida en el apartado anterior.

44. Dada la siguiente función: $f(x) = \sqrt{16+b^2}$
Calcula:
a. El valor de la función para b = 3 y b = 7.
b. **Halla** el dominio y el recorrido.
c. **Representa** la función.
d. **Halla** los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y los mínimos, los puntos de corte con los ejes, la periodicidad y la simetría de la función.

45. **Halla** el dominio, el recorrido, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y los mínimos, la intersección con los ejes y la periodicidad de las siguientes funciones:

46. **Considera** las funciones $f(x) = x^2 - 4x + 6$ y $g(x) = 2x^2 + 5$, y **calcula:**
a. $(f \circ g)(x)$
b. $(g \circ f)(x)$
c. $(f \circ g)(2)$
d. $(g \circ f)(2)$

47. **Calcula** la función suma y la función producto y **halla** el dominio de ambas en los siguientes casos:
a. $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$; $g(x) = x + 4$
b. $f(x) = x^2 - 2$; $g(x) = \frac{x}{x-4}$
c. $f(x) = \frac{3x}{x-1}$; $g(x) = \frac{x-2}{x+1}$

48. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de la siguiente función? $f(x) = -\frac{4}{3}x$

49. **Señala** cuál de las siguientes gráficas corresponde a la función $f(x) = |-x|$.

50. **Halla** el dominio de la siguiente función a trozos:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < -2 \\ \frac{2}{x^2-4} & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ -\frac{1}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2-3}{x-5} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

51. **Representa** gráficamente, en los mismos ejes de coordenadas, las siguientes funciones de proporcionalidad inversa:
a. $f(x) = \frac{1}{3x}$ b. $g(x) = \frac{3}{x}$
— **Compara** el comportamiento de ambas funciones conforme x se hace cada vez mayor y cada vez menor.

84

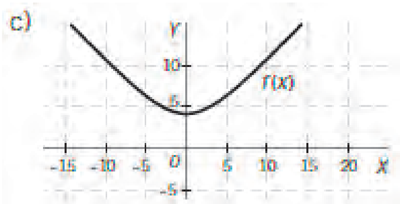
Solucionario

45.

a. f(3) = 5 ,f(7) = $\sqrt{65}$ = 8,062

b. D (f) = R, R(f) = [4,−∞)

c)



d. La función decrece en (−∞, 0) y alcanza un mínimo en (0, 4), punto que además es el único corte con los ejes. En (0,+∞) crece. No presenta periodicidad, pero sí simetría respecto a x = 0.

e) $f^{-1}(x) = x^2 - 16$

46. a. D (f) = [−3,5] R (f) = [−1,6]

Es una función creciente de (-3, 2), alcanza un máximo en (2, 6) y decrece de (2, 5).

Los puntos de corte son (-2, 0), (5, 0) y (0, 2), y no presenta periodicidad.

47. a. $(f \circ g)(x) = (2x^2 + 5)^3 - 4(2x^2 + 5) + 6 = 8x^6 + 60x^4 + 142x^2 + 111$

b. $(f \circ g)(2) = 2151$

c. $(g \circ f)(x) = 2(x - 4x + 6)^2 + 5 =$

$= x^6 - 16x^4 + 24x^3 + 32^2 - 96x + 77$

d) $(g \circ f)(2) = 77$

48. a. $(f + g)(x) = 3x^2 - 4x + 6$, $(f - g)(x) = 3x^3 + 7x^2 - 18x + 8$

b. $(f + g)(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 3x - 8}{x - 4}$, $(f - g)(x) = \dfrac{x^3 - 2x}{x - 4}$

c. $(f + g)(x) = \dfrac{4x^2 + 2}{x^2 - 1}$, $(f - g)(x)$ $\dfrac{3x^2 - 6x}{x^2 - 1}$

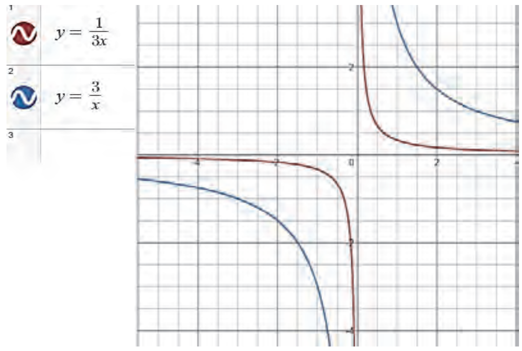
49. El dominio y el recorrido de la función f (x) = $-\dfrac{3}{4}x$ es el conjunto de los números reales.

50. La gráfica a corresponde a la función $f(x) = |-x|$.

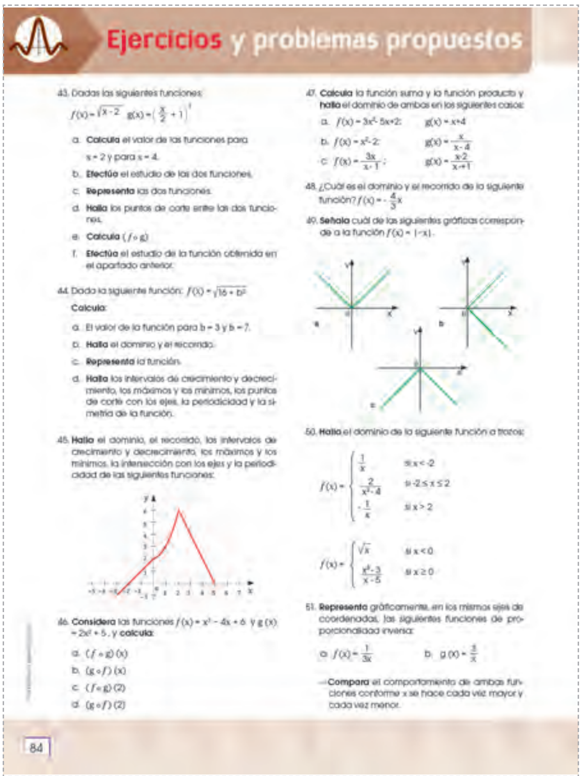
51. a. D(f) = (−∞, −2)U(−2, 2)U(2, +∞)

b. D (f) = [0, +∞)

52.



Página 86


Ejercicios y problemas propuestos

43. Dadas las siguientes funciones: $f(x) = \sqrt{x-2}$ $g(x) = \left(\frac{x}{2}+1\right)^{1}$
a. **Calcula** el valor de las funciones para $x = 2$ y para $x = 4$.
b. **Efectúa** el estudio de las dos funciones.
c. **Representa** las dos funciones.
d. **Halla** los puntos de corte entre las dos funciones.
e. **Calcula** $(f \circ g)$
f. **Efectúa** el estudio de la función obtenida en el apartado anterior.

44. Dada la siguiente función: $f(x) = \sqrt{16 + b^2}$
Calcula:
a. El valor de la función para $b = 3$ y $b = 7$.
b. **Halla** el dominio y el recorrido.
c. **Representa** la función.
d. **Halla** los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y los mínimos, los puntos de corte con los ejes, la periodicidad y la simetría de la función.

45. **Halla** el dominio, el recorrido, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y los mínimos, la intersección con los ejes y la periodicidad de las siguientes funciones:

46. **Considera** las funciones $f(x) = x^3 - 4x + 6$ y $g(x) = 2x^2 + 5$, y **calcula**:
a. $(f \circ g)(x)$
b. $(g \circ f)(x)$
c. $(f \circ g)(2)$
d. $(g \circ f)(2)$

47. **Calcula** la función suma y la función producto y **halla** el dominio de ambas en los siguientes casos:
a. $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$; $g(x) = x+4$
b. $f(x) = x^2 - 2$; $g(x) = \frac{x}{x-4}$
c. $f(x) = \frac{3x}{x-1}$; $g(x) = \frac{x-2}{x+1}$

48. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de la siguiente función? $f(x) = -\frac{4}{3}x$

49. **Señala** cuál de las siguientes gráficas corresponde a la función $f(x) = |-x|$.

50. **Halla** el dominio de la siguiente función a trozos:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < -2 \\ \frac{2}{x^2-4} & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ -\frac{1}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2-3}{x-5} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

51. **Representa** gráficamente, en los mismos ejes de coordenadas, las siguientes funciones de proporcionalidad inversa:
a. $f(x) = \frac{1}{3x}$ b. $g(x) = \frac{3}{x}$
— **Compara** el comportamiento de ambas funciones conforme x se hace cada vez mayor y cada vez menor.

84

Solucionario

1.
a. $f(x) = x^3 - 4x + 6$
$f(0) = 6$ $f(-2) = 6$ $f(3) = 21$
b. $f(x) = x - 3$
$f(0) = -3$ $f(-2)$ 0-5 $f(3) = 0$
c. $f(x) = \sqrt{2x + 1}$
$f(0) = 1$ $f(-2)$ N.E. $f(3) = 2{,}65$
d. $f(x) = \frac{x+1}{x-2} + 2$
$f(0) = \frac{3}{2}$ $f(-2) = \frac{9}{4}$ $f(3) = 6$

2.
a. $D(f) = [-1,+\infty)$
b. $D(g) = |R-\{3\}$
c. $D(h) = [-1;1]$
d. d)$D(i) = R-\{4\}$

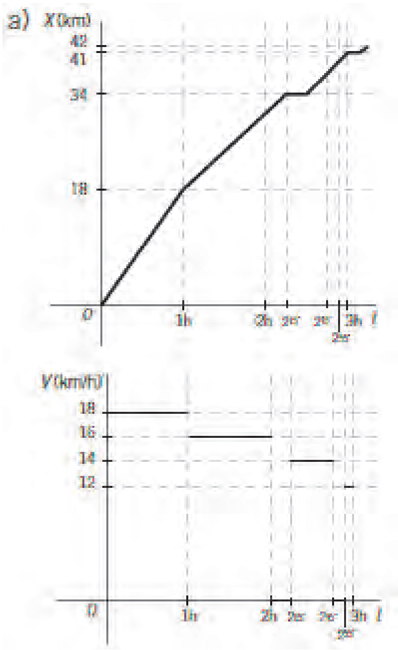
4. a. $\cos\sqrt{x-2}$

5. b. $\sqrt{\cos x - 2}$,
c. $\sqrt{\sqrt{x-2} - 2}$
d. $\cos(\sqrt{\cos x - 2})$

Solucionario

6.

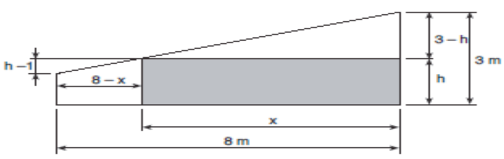
a.



b. $D(f) = [0, 3]$ $D(g) = [0, 3]$
$R(f) = [0, 42]$ $R(g) = [0,18]$
La función $f(x)$ es continua en todo su dominio y crece en los intervalos (0, 2 h), (2 h 15 min, 2 h 45 min) y (2 h 55 min, 3 h).
La función $g(x)$ es discontinua para los siguientes valores de x: 1 h, 2 h, 2 h 15 min, 2 h 45 min y 2 h 55 min. No hay intervalos de crecimiento ni decrecimiento, ya que la función es constante en todo su recorrido, salvo en las discontinuidades.

7.

a.



Solucionario

a) Por semejanza de triángulos:

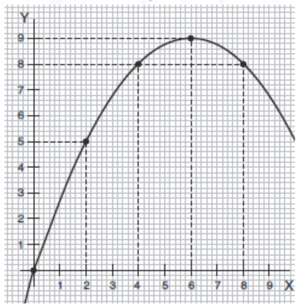
$$\frac{3-h}{x}=\frac{h-1}{8-x}\Rightarrow h=3-\frac{x}{4}$$

y el área f del rectángulo será:

$$f(x)=x\cdot h=x\left(3-\frac{x}{4}\right)=3x-\frac{x^2}{4}=\frac{-x^2}{4}+3x$$

b) Para representar $f(x)$ construimos una tabla con varios pares de valores:

x	0	2	4	6	8
$y=f(x)$	0	5	8	9	8



Solucionario

¿Baja el precio del taxi?

• $f(x) = 2{,}05 + 0{,}98x$

$g(x) = 1{,}84 + 1{,}05x$

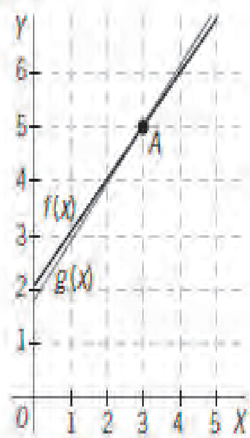
$$\begin{cases}-0{,}98x+y=2{,}05\\-1{,}05x+y=1{,}84\end{cases}$$

Resolviendo el sistema por el método de reducción o eliminación, se obtiene:

$$\begin{cases}-0{,}98x+y=2{,}05\\1{,}05x-y=-1{,}84\end{cases}$$

$0{,}07x = 0.21 \rightarrow$ ***x = 3, y = 4, 99***

Coinciden a los 3 km.



• Respuesta abierta a modo de reflexión personal.

Página 87


ZONA

UD. 2 FUNCIONES REALES Y RACIONALES

La idea actual de función

El concepto de función, tal y como lo conocemos hoy, fue estudiado y precisado por el matemático francés Augustin Louis Cauchy (1789-1857). El fue pionero en el análisis matemático de las funciones al eliminar de ellas toda referencia inicial a expresiones formales y basarlas en la idea de correspondencia entre conjuntos.

¿Baja el precio del taxi?

El precio en este tipo de transporte suele condicionarse por dos conceptos básicos: la bajada de bandera y el precio por kilómetro recorrido. Imagina que se publica el siguiente cambio de tarifas: $1,84 por bajada de bandera y $1,05 por kilómetro recorrido. A partir de estos datos:

Economista

Trabajaría en alguna empresa desempeñando las siguientes funciones: en tesorería o en finanzas, manejando los activos líquidos; en presupuestos y en planificación, optimizando los procesos y beneficios de la empresa, en la producción y en el análisis de información estadística del entorno nacional e internacional. Útil para mejorar la toma de decisiones; pero también podría trabajar en centros de investigación, realizando estudios generales o concretos, para proponer alternativas de solución a problemas específicos en este mundo cada vez más globalizado o en organismos internacionales, evaluando y proponiendo soluciones en temas de pobreza, finanzas, trabajo y otros.

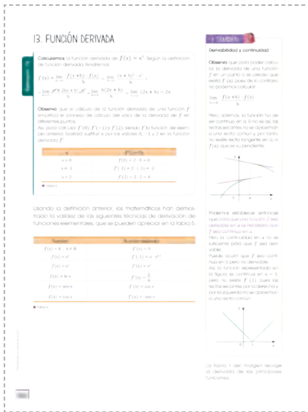
Para ser economista, debo tener una base muy firme en Matemáticas, pero sobre todo en el estudio de funciones, para analizar gastos, costos e ingresos de una empresa, optimización de procesos de producción, etcétera, todo esto para la toma de decisiones futuras.

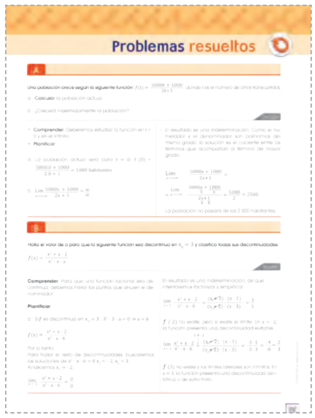
Las funciones de un economista tienen una gran aplicación en el campo de las Ciencias Sociales. Una de las funciones más utilizadas por los economistas son las llamadas curvas de oferta-demanda.

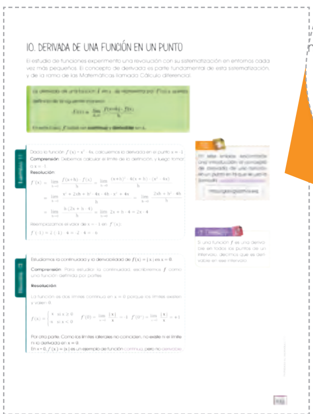
¿Cómo se mantiene un avión jumbo en el aire? (Función lineal y cuadrática). Cuando un ala se mueve con una cierta velocidad, se genera sobre la misma una zona de baja presión y, bajo la misma, una zona de alta presión. Al juego de estas dos presiones se debe el «sostén» o «sustentación». Una fuerza que se opone al peso del avión. Así, para proyectar en vuelo un avión, es indispensable saber de qué magnitudes depende esta fuerza.

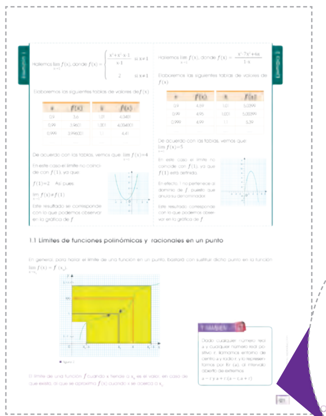
87

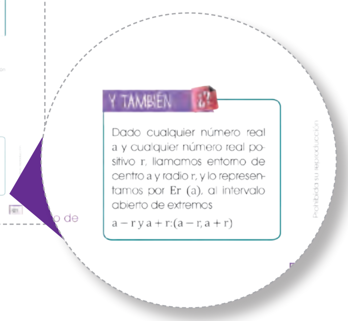
Límite y derivada de funciones

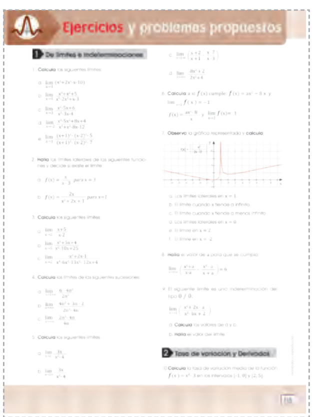


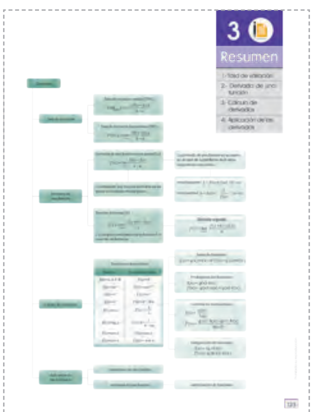




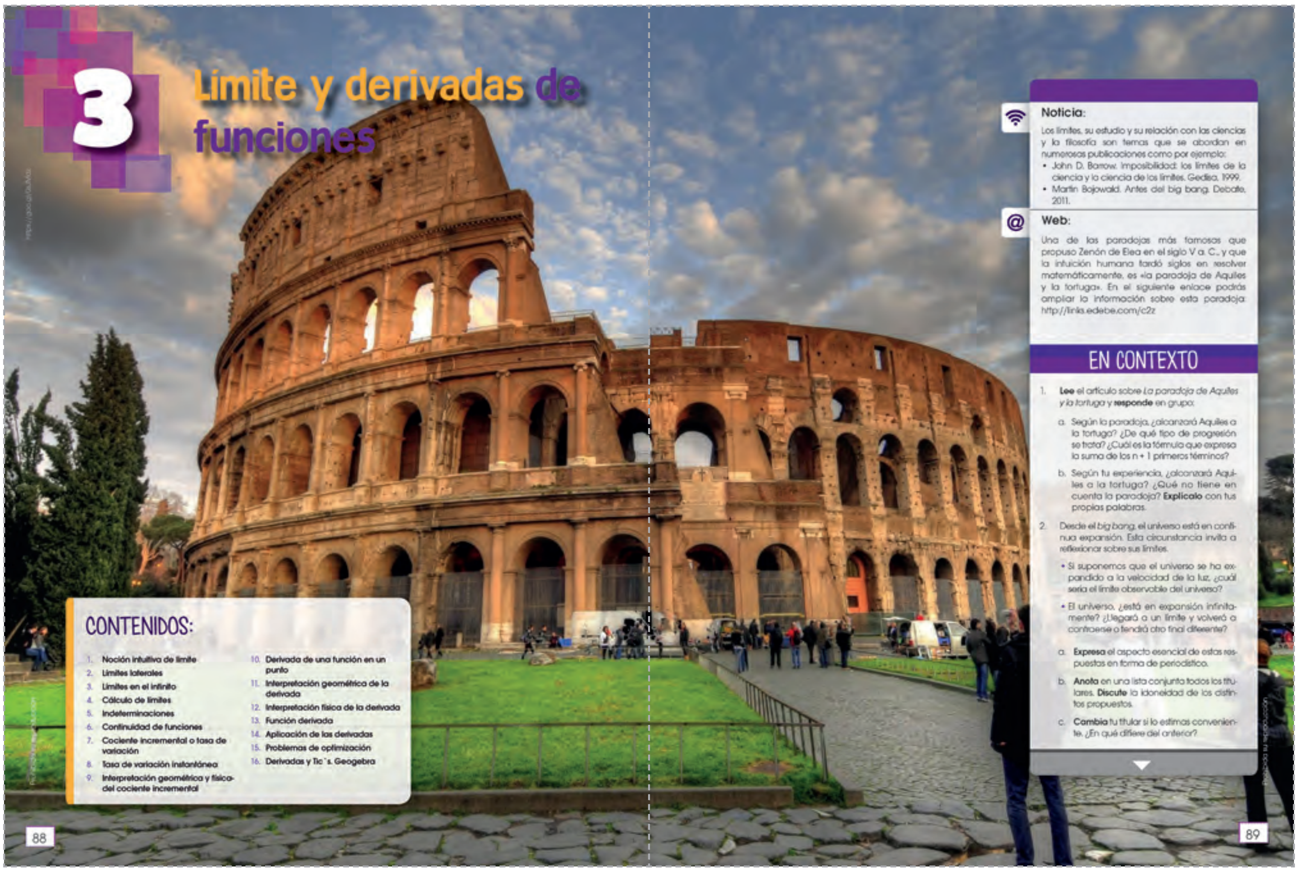








UNIDAD 3



3 Límite y derivadas de funciones

CONTENIDOS:

1. Noción intuitiva de límite
2. Límites laterales
3. Límites en el infinito
4. Cálculo de límites
5. Indeterminaciones
6. Continuidad de funciones
7. Cociente incremental o tasa de variación
8. Tasa de variación instantánea
9. Interpretación geométrica y física del cociente incremental
10. Derivada de una función en un punto
11. Interpretación geométrica de la derivada
12. Interpretación física de la derivada
13. Función derivada
14. Aplicación de las derivadas
15. Problemas de optimización
16. Derivadas y Tic´s. Geogebra

Noticia:

Los límites, su estudio y su relación con las ciencias y la filosofía son temas que se abordan en numerosas publicaciones como por ejemplo:

- John D. Barrow. Imposibilidad: los límites de la ciencia y la ciencia de los límites. Gedisa, 1999.
- Martin Bojowald. Antes del big bang. Debate, 2011.

Web:

Una de las paradojas más famosas que propuso Zenón de Elea en el siglo V a. C., y que la intuición humana tardó siglos en resolver matemáticamente, es «la paradoja de Aquiles y la tortuga». En el siguiente enlace podrás ampliar la información sobre esta paradoja: http://links.edebe.com/c2z

EN CONTEXTO

1. **Lee** el artículo sobre *La paradoja de Aquiles y la tortuga* y **responde** en grupo:
   a. Según la paradoja, ¿alcanzará Aquiles a la tortuga? ¿De qué tipo de progresión se trata? ¿Cuál es la fórmula que expresa la suma de los n + 1 primeros términos?
   b. Según tu experiencia, ¿alcanzará Aquiles a la tortuga? ¿Qué no tiene en cuenta la paradoja? **Explícalo** con tus propias palabras.
2. Desde el *big bang*, el universo está en continua expansión. Esta circunstancia invita a reflexionar sobre sus límites.
   - Si suponemos que el universo se ha expandido a la velocidad de la luz, ¿cuál sería el límite observable del universo?
   - El universo, ¿está en expansión infinitamente? ¿Llegará a un límite y volverá a contraerse o tendrá otro final diferente?

   a. **Expresa** el aspecto esencial de estas respuestas en forma de periodístico.
   b. **Anota** en una lista conjunta todos los titulares. **Discute** la idoneidad de los distintos propuestos.
   c. **Cambia** tu titular si lo estimas conveniente. ¿En qué difiere del anterior?

88

89

	Contenidos
Límite y derivada de funciones	Noción intuitiva de límite 90-91
	Límites laterales 92
	Límites en el infinito 93
	Cálculo de límites 94
	Indeterminaciones 95-96
	Continuidad de funciones 97-98
	Cociente incremental o tasa de variación 100
	Tasa de variación instantánea 101
	Interpretación geométrica y física del cociente incremental 102
	Derivada de una función en un punto 103
	Interpretación geométrica de la derivada 104
	Interpretación física de la derivada 105
	Función derivada 106-108
	Aplicación de las derivadas 109-110
	Problemas de optimización 111
	Derivadas y TIC. Geogebra 114

Indicadores para la evaluación del criterio

- Emplea el concepto de límites en sucesiones convergentes y sucesiones reales; opera con funciones escalonadas; halla de manera intuitiva derivadas de funciones polinomiales; diferencia funciones mediante las respectivas reglas para resolver problemas de optimización; concibe la integración como proceso inverso, y realiza conexiones geométricas y físicas. (I.2.)

Elementos del perfil de salida a los que se contribuye

- Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos e información posibles.

Objetivo del área por subnivel

- O.M.5.3. Desarrollar estrategias individuales y grupales que permitan un cálculo mental y escrito, exacto o estimado; y la capacidad de interpretación y solución de situaciones problémicas del medio.

Objetivo integrador del área por subnivel

- OI.5.3. Tomar decisiones considerando la relación entre individuo y sociedad en la era digital y sus influencias en las distintas producciones científicas y culturales, en un marco de reconocimiento y respeto a los derechos.
- OI.5.10. Desarrollar mecanismos de participación a partir de la comprensión de los procesos de lucha social y política de diversos grupos, movimientos y culturas y su contribución a la construcción de la identidad nacional en el marco de una sociedad intercultural y multicultural de convivencia armónica.

Básicos imprescindibles | Básicos deseables

Eje temático	Aprendizajes básicos
Límite y derivada de funciones	• Calcular, de manera intuitiva, el límite de una función cuadrática con el uso de la calculadora como una distancia entre dos números reales. • Calcular de manera intuitiva la derivada de funciones cuadráticas, a partir del cociente incremental. • Interpretar de manera geométrica (pendiente de la secante) y física el cociente incremental (velocidad media) de funciones cuadráticas, con apoyo de las TIC. • Interpretar de manera geométrica y física la primera derivada (pendiente de la tangente, velocidad instantánea) de funciones cuadráticas, con apoyo de las TIC. • Resolver y plantear problemas, reales o hipotéticos, que pueden ser modelizados con derivadas de funciones cuadráticas, identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas; juzgar la pertinencia y validez de los resultados obtenidos. • Calcular de manera intuitiva la derivada de funciones polinomiales de grado ≤4 a partir del cociente incremental. • Interpretar de manera geométrica (pendiente de la secante) y física el cociente incremental (velocidad media) de funciones polinomiales de grado ≤4, con apoyo de las TIC. • Interpretar de manera geométrica y física la primera derivada (pendiente de la tangente, velocidad instantánea) de funciones polinomiales de grado ≤4, con apoyo de las TIC • Calcular de manera intuitiva la derivada de funciones racionales cuyos numeradores y denominadores sean polinomios de grado ≤ 2, para analizar la monotonía, determinar los máximos y mínimos de estas funciones y graficarlas con apoyo de las TIC (calculadora gráfica, software, applets)
	Resolver aplicaciones reales o hipotéticas con ayuda de las derivadas de funciones polinomiales de grado ≤ 4 y de funciones racionales cuyos numeradores y denominadores sean polinomios de grado ≤ 2, y juzgar la validez y pertinencia de los resultados obtenidos.

LOGO INSTITUCIONAL	NOMBRE DE LA INSTITUCIÓN					AÑO LECTIVO	
PLAN DE UNIDAD TEMÁTICA							
1. DATOS INFORMATIVOS:							
Docente:	Nombre del docente que ingresa la información	Área/asignatura:	MATEMÁTICA	Grado/Curso:	1° BACHILLERATO	Paralelo:	
N.º de unidad de planificación:	3	Título de unidad de planificación:	LÍMITE Y DERIVADAS DE FUNCIONES	Objetivos específicos de la unidad de planificación:		Proponer soluciones creativas a situaciones concretas de la realidad nacional y mundial mediante la aplicación de las operaciones básicas de los diferentes conjuntos numéricos, el uso de modelos funcionales, algoritmos apropiados, estrategias y métodos formales y no formales de razonamiento matemático que lleven a juzgar con responsabilidad la validez de procedimientos y los resultados en un contexto. Desarrollar estrategias individuales y grupales que permitan un cálculo mental, escrito, exacto o estimado y la capacidad de interpretación y solución de situaciones problemáticas del medio. solución de situaciones concretas.	
PERÍODOS	30				SEMANA DE INICIO:		
2. PLANIFICACIÓN							
DESTREZAS CON CRITERIOS DE DESEMPEÑO A SER DESARROLLADAS:						CRITERIOS DE EVALUACIÓN	
• Calcular de manera intuitiva el límite cuando h→0 de una función cuadrática con el uso de calculadora como una distancia entre dos número reales. • Calcular de manera intuitiva la derivada de funciones cuadráticas a partir del cociente incremental. • Interpretar de manera geométrica (pendiente de la secante) y física el cociente incremental (velocidad media) de funciones cuadráticas con apoyo de las TIC. • Interpretar de manera geométrica y física la primera derivada (pendiente de la tangente, velocidad instantánea) de funciones cuadráticas con apoyo de las TIC. • Calcular de manera intuitiva la derivada de funciones polinomiales de grado =4 a partir del cociente incremental. • Interpretar de manera geométrica y física la primera derivada (pendiente de la tangente, velocidad instantánea) y geométrica						CE.M.5.5. Aplica el álgebra de límites como base para el cálculo diferencial e integral, interpreta las derivadas de forma geométrica y física, y resuelve ejercicios de áreas y problemas de optimización.	

• (pendiente de la secante) y física el cociente incremental (velocidad media) de funciones polinomiales de grado =4 con apoyo de las TIC. • Calcular de manera intuitiva la derivada de funciones racionales cuyos numeradores y denominadores sean polinomios de grado =2 para analizar la monotonía, determinar los máximos y mínimos de estas funciones y graficarlas con apoyo de las TIC (calculadora gráfica, software, applets).			
ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	RECURSOS	INDICADORES DE LOGRO	TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN
Experiencia Representación concreta, mediante gráficos de las propiedades de las funciones: dominio, recorrido, monotonía, extremos, simetría. Resolución de problemas de aplicación de límites y derivadas. Conceptualización Uso de diagramas que resuman los principales conceptos, propiedades y procedimientos con límites y derivadas de funciones. Uso de softwares que refuercen la aplicación de derivadas de funciones. Aplicación ¿Por qué es importante el uso y aplicación de los límites y la derivada? Planteamiento y resolución de problemas de continuidad y optimización. Reflexión ¿Qué diferencia el conjunto de los nùmeros reales del resto de conjuntos estudiados? Identificación, en ejercicios o problemas, de las características de las funciones, dadas mediante su expresión algebraica o su gráfico. Reflexión y análisis sobre la aplicación de las funciones, límites y derivadas en la vida.	- Texto - Cuaderno - Videos (sitios web) - Pizarra - Calculadora	I.M.5.5.1. Emplea el concepto de límites en sucesiones convergentes y sucesiones reales; opera con funciones escalonadas; halla de manera intuitiva derivadas de funciones polinomiales; diferencia funciones mediante las respectivas reglas para resolver problemas de optimización; concibe la integración como proceso inverso, y realiza conexiones geométricas y físicas. (I.2.)	Comprobar el desarrollo de las destrezas necesarias para la interpretación, el cálculo y la aplicación de la primera y segunda derivadas (interpretación geométrica y física). Resolver problemas de aplicación y operar con las funciones escalonadas. Calcular la integral definida de una función y aplicar la interpretación geométrica de la integral de una función, relacionando la derivación y la integración como procesos inversos.
ELEMENTOS DEL PERFIL DE SALIDA			
I.2. Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para Resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos e información posibles.			

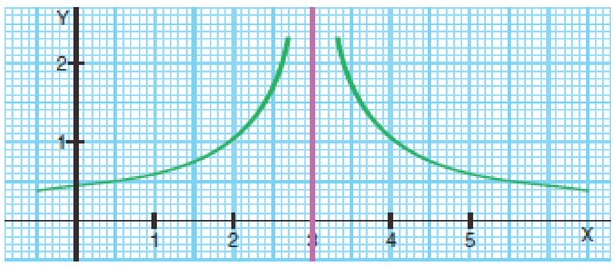
ELABORADO	REVISADO	APROBADO
Docente:	Director del área :	Vicerrector:
Firma:	Firma:	Firma:
Fecha:	Fecha:	Fecha:

Asíntotas de una función

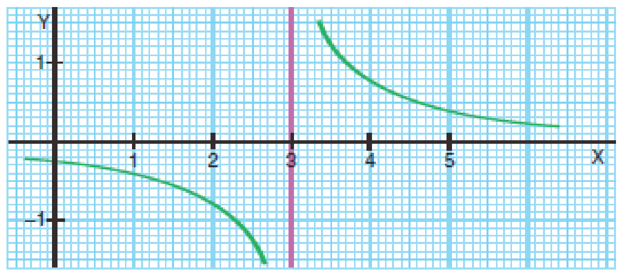
A veces la gráfica de una función y la de una recta se aproximan cada vez más a medida que la variable independiente se acerca a un valor determinado o crece indefinidamente. Estas rectas se llaman asíntotas de la función.

Asíntotas verticales

Observa la representación gráfica de las siguientes funciones:



La gráfica tiende a $+\infty$ al acercarse x a 3 por la izquierda y por la derecha.



La gráfica tiende a $-\infty$ al acercarse x a 3 por la izquierda y a $+\infty$ al acercarse x a 3 por la derecha.

En ambos casos la recta vertical x = 3 indica la dirección que siguen las gráficas al tender x a 3. De esta recta diremos que es una asíntota vertical de f.

Si alguno de los límites laterales de f en x0 es más infinito o menos infinito, la recta x = x0 se llama asíntota vertical de f.

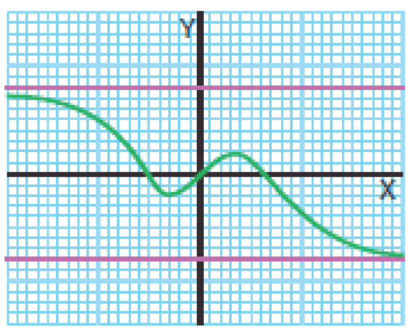
Observa que, como consecuencia de la definición, las **funciones polinómicas**, f(x) = P(x), no tienen asíntotas verticales, puesto que no tienen límite infinito en ningún punto x0.

En el caso de las **funciones racionales**, (P(x))/(Q(x)), para hallar las posibles asíntotas verticales procedemos del siguiente modo:

– Buscamos los puntos x0 tales que Q (x0) = 0.

– Calculamos los límites laterales de f en cada uno de los puntos x0 hallados. Si alguno de dichos límites es infinito, la función f tendrá una asíntota vertical de ecuación x = x0.

Una función cualquiera f puede tener **como máximo dos asíntotas horizontales.**



Nombre: ______________________________ Fecha: ______________

Halla a de forma que f(x) = (x+2)/(x^3+ax^2+16x) sea discontinua en x0 = 4 y clasifica sus discontinuidades.

Una población crece según la siguiente función: f(t) = (5000t+1000)/(2t+1), donde t es el número de años transcurridos.

a) Calcula la población actual.

b) ¿Crecerá indefinidamente la población?

Halla los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones.

a) f(x) = x2 + 4x − 2

b) f(x) = (x-1)/(x+5)

Estudia la continuidad de las siguientes funciones a partir de sus representaciones gráficas y halla los límites cuando x →0,

x →2 y x →-2:

Los datos obtenidos en la realización de diversos experimentos se representan en la siguiente gráfica:

a) Explica los diferentes tipos de discontinuidad en la gráfica. A continuación calcula:

b) lim (x 1^-) f(x)→ c) lim (x 1^+) f(x)→

d) lim (x 2) f(x) →e)lim (x 4^-) f(x)→

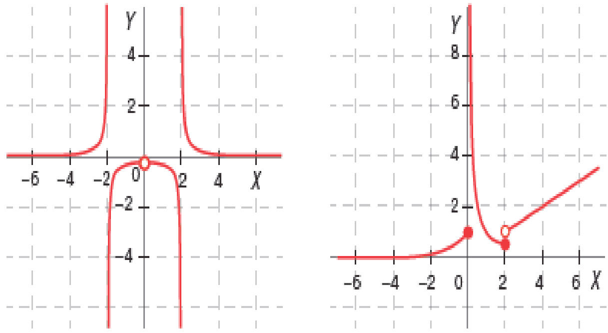
Determina la ecuación de la recta perpendicular a la función f(x) = x2 − x − 6, en el punto x = − 6.

Halla en qué puntos las rectas tangentes a la curva de ecuación f(x) = x 3 − 4x son paralelas al eje de abscisas.

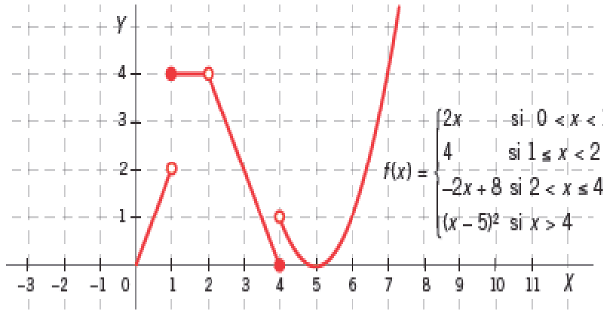
Averigua la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación f = x3 − 2x + 7, que sea paralela a la recta de ecuación y = x + 4. Sol.: y = x + 5; y = x + 9

A temperatura constante, la presión (P) y el volumen (V) de un gas son inversamente proporcionales. La siguiente gráfica es la representación de la función P = f(V).

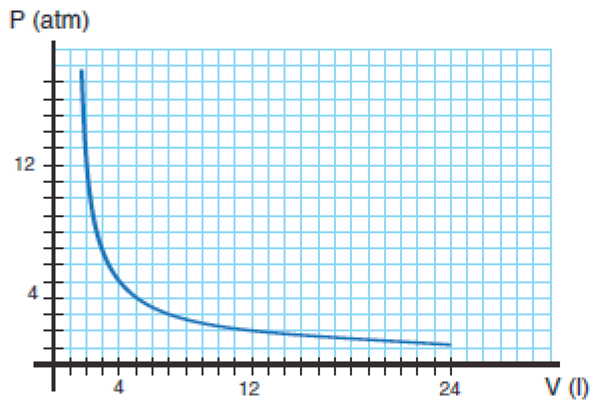
$x \to 2$ y $x \to -2$:



Los datos obtenidos en la realización de diversos experimentos se representan en la siguiente gráfica:



a) Explica los diferentes tipos de discontinuidad en la gráfica. A continuación calcula:



a) Averigua cuánto vale la presión del gas cuando el volumen es 4 l, 6 l y 12 l.

b) Calcula la disminución de la presión por unidad de volumen en los intervalos (4, 6) y (6, 12). ¿En cuál de estos intervalos disminuye de forma más rápida la presión al aumentar el volumen?

Dadas las siguientes funciones: f(x) = x2−2; g(x) = e−x; h(x) = 1/(x-2), calcula:

a) h ₒ g b) h ₒ f ₒ g
c) f ₒ g d) f ₒ g ₒ h

Se lanza un globo sonda de 2 m3 de volumen. Cada 100 m de subida aumenta el volumen en 0,1 m3 hasta los 800 m. Luego sube 200 m sin aumentarlo y, después, incrementa 0,2 m3 cada 100 m durante 1 km. Finalmente, disminuye 0,2 m3 al subir los últimos 500 m antes de explotar.

a) Representa el volumen del globo en función de la altura e indica el dominio, el recorrido, los extremos relativos, los tramos de crecimiento y el decrecimiento de la función.

b) **Calcula** el volumen cuando el globo está a 400 m de altura.

Dada la función: f(x) =1/3 x^3-5/2 x^2+4x

a) **Halla** la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa 2.

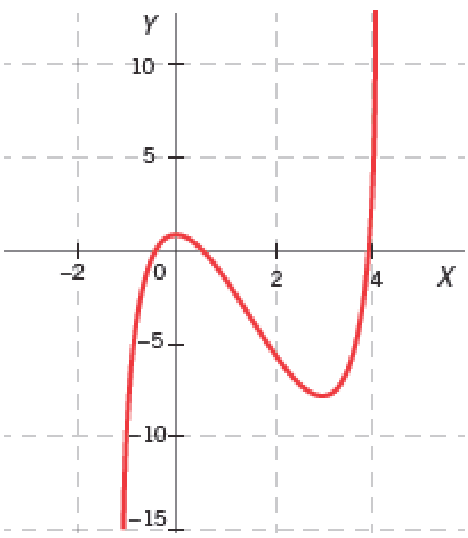
b) ¿Existe otra recta tangente a la gráfica de la función que sea paralela a la recta que has hallado en el apartado a? En caso afirmativo, **halla** su ecuación.

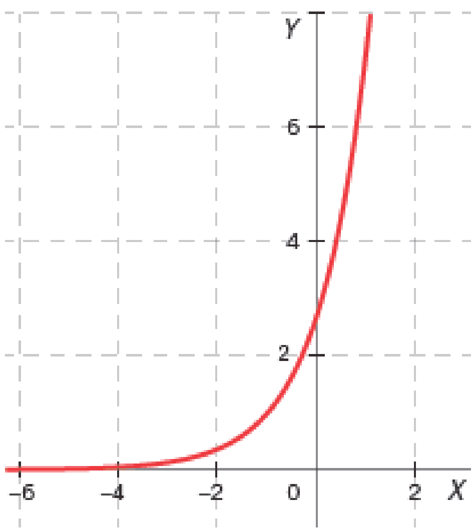
Averigua el valor de los coeficientes m, n y p de la función: f(x) = x3 + mx2 + nx + p, sabiendo que su gráfica pasa por el punto (0, 2) y que f′(2) = f′(0) = 1.

Descompón el número 10 en dos sumandos tales que el cuadrado del primero más el séxtuplo del segundo sea un mínimo.

Halla el punto de la recta de ecuación y = 3x – 2 más cercano al punto de coordenadas (4, 1).

Indica, en cada una de las siguientes gráficas, los intervalos en los cuales la derivada será positiva y en los que será negativa:





Recurso para la evaluación

Ejercicio 1.

Si f es discontinua en $x = 4$, entonces: $4^3 + 4^2 \cdot a + 16 \cdot 4 = 0 \rightarrow a = -8$

$$f(x) = \frac{x+2}{x^3-8x^2+16x}$$

A. V.: $Q(x) = 0 \rightarrow x^3 - 8x^2 + 16x = 0 \rightarrow$

$$x = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

A. H.: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x^3-8x^2+16x} = 0$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+2}{x^3-8x^2+16x} = 0$$

La función presenta dos asíntotas verticales en $x = 0$ y $x = 4$, y tiende a 0 en $\pm\infty$.

Ejercicio 2. Estudiamos la función en $t = 0$ y en el infinito.

a) La población actual será para $t = 0$:

$$f(0) = \frac{5000 \cdot 0+1000}{2 \cdot 0+1} = 1000 \text{ habitantes}$$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{5000x+1000}{2x+1} = \frac{\infty}{\infty}$. El resultado es una indeterminación. Como el numerador y el denominador son polinomios del mismo grado, la solución es el cociente entre los términos que acompañan al término de mayor grado:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5000x+1000}{2x+1} = \frac{5000}{2} = 2500$$

La población no pasará de los 2500 habitantes.

Ejercicio 3. a) $f(x) = x^2 + 4x - 2$

Al ser una función polinómica no presenta ninguna discontinuidad.

b) $f(x) = \frac{x-1}{x+5}$ La función presenta una discontinuidad en el punto en el que se anula el denominador: $Q(x) = 0 \rightarrow x = -5$

Ejercicio 4

a) La función presenta una discontinuidad de salto infinito en $x = 2$ y $x = -2$, y una discontinuidad evitable en $x = 0$.

$\lim_{x\to0} f(x)$ no existe

$\lim_{x\to2^+} = +\infty$ $\qquad \lim_{x\to2^-} = -\infty$

$\lim_{x\to-2^+} = -\infty$ $\qquad \lim_{x\to-2^-} = +\infty$

Ejercicio 5

a) La función presenta en $x = 1$ y en $x = 4$ una discontinuidad de salto finito, y en $x = 2$ una discontinuidad evitable.

b) $\lim_{x\to1^-} 2x = 2$ $\qquad$ c) $\lim_{x\to1^+} 4 = 4$

d) $\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2^-} 4 = \lim_{x\to2^+}(-2x + 8) = 4$

e) $\lim_{x\to4^+}(-2x + 8) = 0$

Ejercicio 6

La recta que cumple esas condiciones es la recta normal de $f(x)$ en $x = -6$; por tanto:

$f'(x) = 2x - 1 \quad f'(-6) = -13 \qquad f(-6) = 36$

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

$$y - 36 = \frac{1}{13}(x + 6) \rightarrow y = \frac{x + 474}{13}$$

Ejercicio 7. $\quad f(x) = x^3 - 4x$

El eje de abscisas tiene por ecuación $y = 0$, es decir, tiene pendiente $m = 0$.

Así, debemos buscar puntos de la gráfica de $f(x)$ tales que la recta tangente a dicha gráfica en ellos tenga pendiente 0. Sabemos que la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en x es $f'(x)$. Queremos encontrar x tg $f'(x) = 0$. Así:

$$f'(x) = 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4/3 \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Y por otro lado: $f(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$

Luego se calculan las imágenes de los puntos:

Así, los puntos pedidos son $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -16\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$ y $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 16\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$

Ejercicio 8

Queremos encontrar rectas tangentes a $f(x) = x^3 - 2x + 7$ y paralelas a $y = x + 4$. Así, las rectas que buscamos han de tener la misma pendiente que $y = x + 4$, es decir, $m = 1$. Además, sabemos que la recta tangente que pasa por $(x, f(x))$ tiene pendiente $f'(x)$. Por tanto, debemos buscar $(x, f(x))$ tales que $f'(x) = 1$.

$f'(x) = 3x^2 - 2 = 1 \Leftrightarrow 3x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1, x = -1$

Así, los puntos de la gráfica $(x, f(x))$ tales que las rectas tangentes a la gráfica $f(x)$ en estos puntos tienen pendiente 1 son $(1, f(1)) = (1, 6)$ y $(-1, f(-1)) = (-1, 8)$.

(cont. Ejercicio 8)

Luego las rectas que buscamos tienen pendiente 1 y pasan por (1, 6) y (−1, 8). Estas rectas son respectivamente: $\begin{cases}(y-6) = 1\,(x-1)\\(y-8) = 1\,(x+1)\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y = x+5\\y = x+9\end{cases}$

Ejercicio 9

a) De la gráfica se deduce que: $f(4) \approx 5$, $f(6) \approx 3{,}5$ y $f(12) \approx 2$

b) La disminución de la presión por unidad de volumen en [*a*, *b*] coincide con TVM [*a*, *b*] de *P* como función del volumen, *V*. Puesto que *P* y *V* son inversamente proporcionales, podemos considerar

$P = f(v) = \frac{k}{v}$

$$\text{TVM}\,[2,4] = \frac{P(4)-P(2)}{4-2} = \frac{\frac{k}{4}-\frac{k}{2}}{4-2} =$$

$$= \frac{k\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)}{2} = k\left(\frac{-2}{8\cdot 2}\right) = -\frac{k}{8}$$

$$\text{TVM}\,[6,12] = \frac{P(12)-P(6)}{12-6} = \frac{k\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{6}\right)}{6} =$$

$$= k\left(\frac{6-12}{12\cdot 6\cdot 6}\right) =$$

$$= -k\frac{1}{12\cdot 6} = -\frac{k}{72}$$

En el intervalo [6, 12] disminuye de forma más rápida la presión al aumentar el volumen, pues |TVM [6, 12]| > |TVM [2, 4]|.

Ejercicio 10.

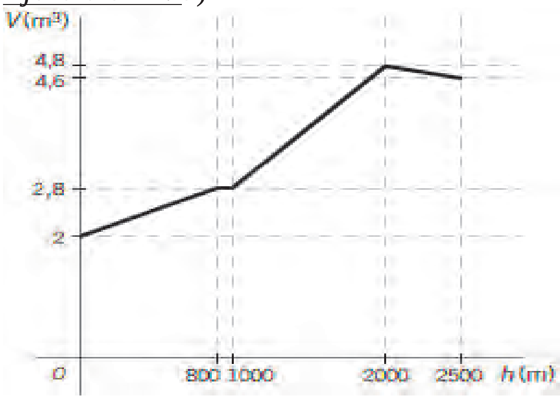
a) $h \circ g = h(g(x)) = \dfrac{1}{e^{-x}-2}$

b) $h \circ f \circ g = h(f(g(x))) = \dfrac{1}{(e^{-2x})-2-2} = \dfrac{1}{e^{-2x}-4}$

c) $f \circ g = f(g(x)) = e^{-2x}-2$

d) $f \circ g \circ h = f(g(h(x))) = e^{\frac{-2}{x-2}}-2$

Ejercicio 11. a)



D(*f*) = [0, 2500]

R(*f*) = [2; 4,8]

Crece en (0, 800) y (1000, 2000), experimenta un máximo en (2000; 4,8) y decrece en (2000, 2500).

b) $V\,(h = 400) = 2{,}4\ \text{m}^3$

Ejercicio 12

a) La ecuación de la recta tangente será:

$y - f(2) = f'(2)\cdot(x-2)$

Calculamos *f*(2):

$$f(2):\quad f(2) = \frac{1}{3}\cdot 2^3 - \frac{5}{2}\cdot 2^2 + 4\cdot 2 = \frac{2}{3}$$

Calculamos *f*'(2):

$$f'(x) = x^2 - 5x + 4$$

$$f'(2) = 2^2 - 5\cdot 2 + 4 = -2$$

Hallamos la ecuación de la recta tangente:

$$y - \frac{2}{3} = -2\,(x-2)$$

$$y = -2x + \frac{14}{3}$$

b) La pendiente de la recta paralela ha de ser −2. Resolvemos la ecuación $f'(x) = -2$.

$$x^2 - 5x + 4 = -2$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1} = \frac{5\pm 1}{2} = \begin{cases}3\\2\end{cases}$$

Recurso para la evaluación

Así, en $x = 3$ hay una recta tangente a la gráfica de f paralela a y= –2x + 14/3.
Hallamos la ecuación de la recta tangente:

$$f(3)=\frac{1}{3}\cdot 3^3-\frac{5}{2}\cdot 3^2+4\cdot 3=-\frac{3}{2}$$

$$y+\frac{3}{2}=-2\ (x-3)\Rightarrow y=-2x+\frac{9}{2}$$

La ecuación de la recta es y= –2x + 9/2

Ejercicio 13

Si pasa por (0, 2), ha de ser $f(0) = 2$.
Luego: $f(0) = p = 2$.
Calculemos ahora $f'(x)$:
$f'(x) = 3x^2 + 2mx + n$
Supongamos que $f'(2) = f'(0) = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2)=3\cdot 2^2+2m\cdot 2+n=12+4m+n=1 \\ f'(0)=n=1 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow n=1 \text{ y } m=-3$$

Por tanto, $m = -3$, $n = 1$ y $p = 2$.

Ejercicio 14
Sabemos que $x + y = 10$, y que la condición es que $f(x, y) = x^2 + 6y \rightarrow f(x) = x^2 - 6x + 60$
Para buscar el mínimo, la derivada debe ser nula:

$f'(x) = 2x - 6 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow y = 7$

Nos aseguramos que el valor de $x = 3$ sea un mínimo.
$f'(3) = 2 > 0 \rightarrow x = 3$ es un mínimo.

Ejercicio 15
El punto de la recta más cercano al punto (4, 1), el punto de cruce entre la recta $y = 3x - 2$ y una recta perpendicular a esta que pase por el punto (4, 1). Sabemos que la pendiente de la nueva recta tiene que ser $m = -1/3$ y sabemos que la fórmula de la recta es $y - y_p = m\,(x - x_0) \rightarrow y = \frac{-x}{3} + \frac{7}{3}$
Por tanto, hemos de buscar el punto de cruce de ambas rectas:

$$\left.\begin{array}{l} y=3x-2 \\ y=\dfrac{-x}{3}+\dfrac{7}{3} \end{array}\right\}\rightarrow x=\frac{13}{10};\ y=\frac{19}{10}$$

Así pues el punto será $\left(\frac{13}{10}, \frac{19}{10}\right)$.

Ejercicio 16
a) Es positiva en $(-\infty, 0) \cup (3, \infty)$ y negativa en (0, 3).
b) La derivada será positiva en $(-\infty, \infty)$.

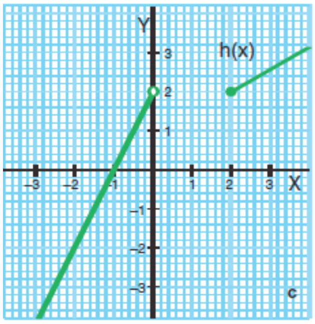
ayuda de una tabla de valores:

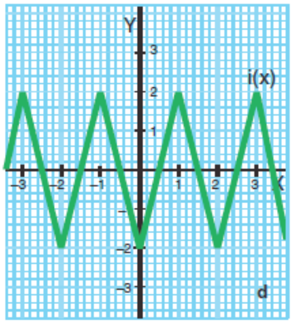
a) $f(x) = 3x + 2$ b) $f(x) = x^2 - 4$

2. Dada la función $f(x) = e^x$, representa:

a) $f(-x)$ b) $-f(x)$

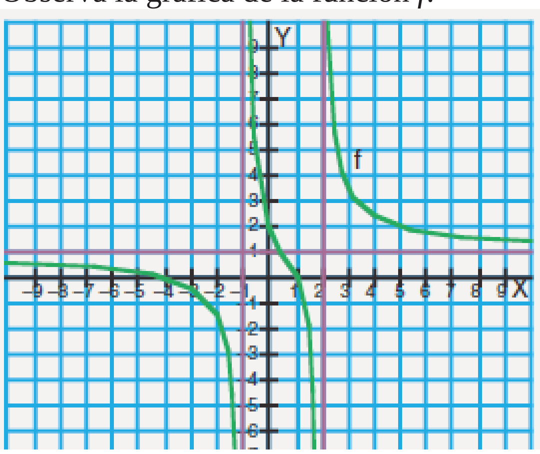
3. Representa una recta que pase por los puntos $A = (0, 0)$ y $B = (1, 4)$.
A continuación, en el mismo gráfico construye una parábola con vértice en (0, 0) y que pase por el punto (1, 4). Halla la expresión algebraica de ambas.



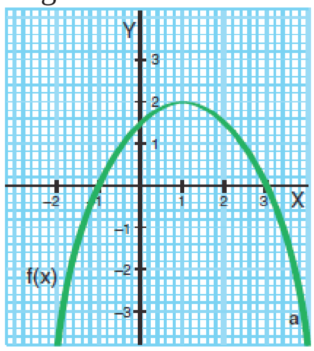


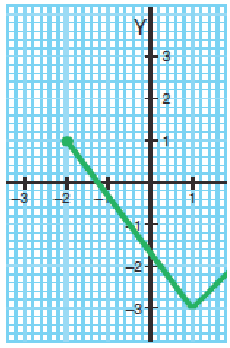
Considera la función $f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^3-6x^2+7x-2}$.
Halla los valores de a para los cuales $\lim_{x\to a} f(x) = 1$

Observa la gráfica de la función f.



una de las funciones siguientes a partir de su gráfica.



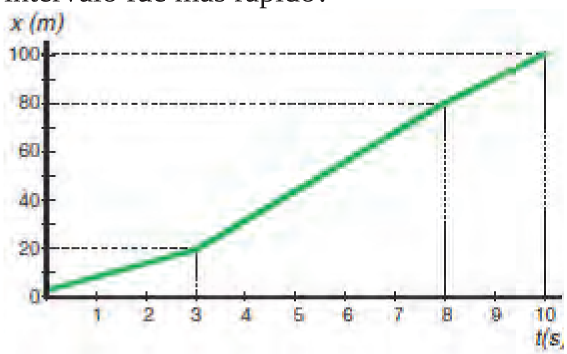


Calcula los siguientes límites y determina las ecuaciones de las asíntotas de f.

a) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ c) $\lim_{x\to -1^+} f(x)$
e) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$
b) $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ d) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$
f) $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

7. Estudia los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

8. La gráfica representa la posición, x, respecto al tiempo, t, de un atleta en una carrera de 100 m lisos. Averigua la tasa de variación media de la posición en los intervalos [0, 3], [3, 8] y [8, 10]. ¿En qué intervalo fue más rápido?



Trabajo inclusivo

9. **Expresa** la función $f(x) = (x - 1)2$ como composición de dos funciones.

10. **Comprueba** que las siguientes funciones no son continuas en el punto $x0 = 2$ y **señala** el tipo de discontinuidad que presentan.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 2}$

b) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si} \quad x < 2 \\ x^2 + x & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x < 2 \\ -x + 6 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

Some Maths in English

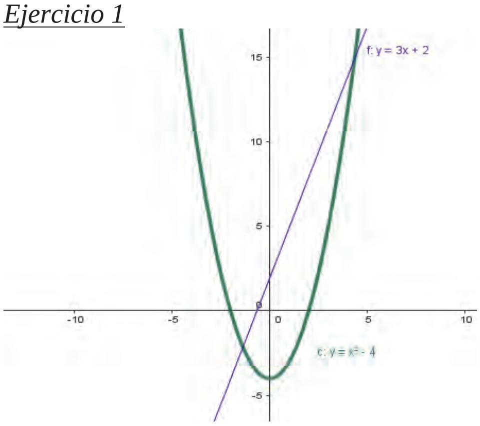
Functions and graphs

Visit: http://links.edebe.com/y4

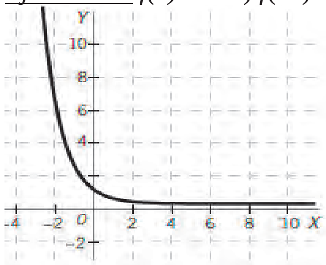
Read the website's contents and answer the questions below:

1. Which functions have minimum and/or maximum values? Identify these values.
2. Which functions are continuous?
3. Which functions are symmetric?
4. Add the following terms to your English Maths Dictionary: function, algebraic equation, table, graph, domain, range, intersection with the axes, minimum and maximum values, continuity and discontinuity and symmetry.

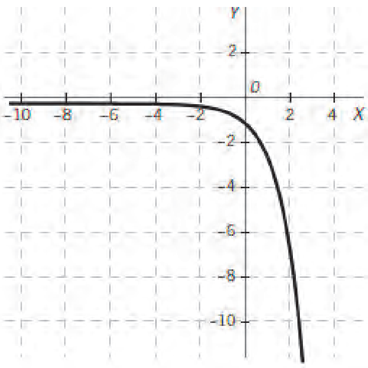
Ejercicio 1



Ejercicio 2. $f(x) = e^x$ a) $f(-x)$



b) $-f(x)$



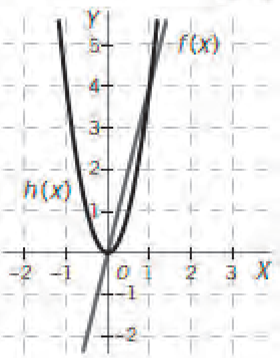
Ejercicio 3.

En el caso lineal, sabemos que pasa por (0, 0) y (1, 4):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \rightarrow \frac{x - 0}{1 - 0} = \frac{f(x) - 0}{4 - 0} \rightarrow$$
$$\rightarrow f(x) = 4x$$

En el caso de la interpolación cuadrática, sabemos que el vértice se halla en (0, 0). La posición del vértice viene dada por $x_v = \frac{-b}{2a}$; por lo tanto, b debe ser 0. Así pues:

$$h(x) = ax^2 + c \rightarrow \left.\begin{matrix} a \cdot 0^2 + c = 0 \\ a \cdot 1^2 + c = 4 \end{matrix}\right\} \rightarrow h(x) = 4x^2$$



Las expresiones algebraicas son $y = 4x$ e $y = 4x^2$.

Ejercicio 4

$D(f) = |R$ Recorrido (f): $(-\infty, 2]$

$D(g) = [-2; 3]$, Recorrido (g): $(-3, 1)$

$D(h) = (-\infty, 0) \cup [2, +\infty)$, Recorrido (h):$(-\infty, +\infty]$

$D(i) = (-\infty; +\infty)$, Recorrido (g): $[-2, 2]$

Ejercicio 5

$$\lim_{x \to a} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 6x^2 + 7x - 2} = \frac{a^2 - 4a + 3}{a^3 - 6a^2 + 7a - 2}$$

$$\frac{a^2 - 4a + 3}{a^3 - 6a^2 + 7a - 2} = 1 \Rightarrow a^2 - 4a + 3 = a^3 - 6a^2 + 7a - 2 \Rightarrow$$

$$a^3 - 7a^2 + 11a - 5 = 0 \Rightarrow (a-1)^2 \cdot (a-5) = 0 \Rightarrow a = \begin{cases} 1 \\ 5 \end{cases}$$

Los posibles valores de a son $a = 1$ y $a = 5$.

a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$

b) $\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$

c) $\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

d) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

e) $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

f) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

Las rectas $x = -1$ y $x = -2$ son asíntotas verticales de f y la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal.

Ejercicio 7

$f(x) = x^3 - 3x + 2, \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$

Resolvemos la ecuación $f'(x) = 0.3x^2 - 3 = 0$

$\Rightarrow x = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$

Estos valores determinan tres intervalos sobre la recta real: $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, +\infty)$.

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo de $f'(x)$	+	–	+

Luego la función es creciente en $(-\infty, -1)$, decreciente en $(-1,1)$ y creciente en $(1,+\infty)$.

Ejercicio 8

TVM [0, 3] = 6,67 m/s; TVM [3, 8] = 12 m/s;
TVM [8, 10] = 10 m/s;
Fue más rápido en el intervalo [3, 8]

Ejercicio 9

$f = h \circ g$, donde $h(x) = x^2$ y $g(x) = x - 1$

Ejercicio10

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 2}$

No existe $f(2)$.

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = +\infty$$

La función f presenta en $x_0 = 2$ una discontinuidad no evitable de salto infinito.

b) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 2 \\ x^2 + x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x + 1) = 2 + 1 = 3$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 + x) = 2^2 + 2 = 6$$

No existe $\lim_{x \to 2} f(x)$.

La función f presenta en $x_0 = 2$ una discontinuidad no evitable de salto finito.

c) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 2 \\ -x + 6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

No existe $f(2)$.

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} 2x = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (-x + 6) = -2 + 6 = 4$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

La función f presenta en $x_0 = 2$ una discontinuidad evitable.

CICLO DEL APRENDIZAJE

¿Cómo dinamizo el aula?

Experiencia

Representación concreta, mediante gráficos de las propiedades de las funciones: dominio, recorrido, monotonía, extremos, simetría.

Resolución de problemas de aplicación de límites y derivadas.

Conceptualización

Uso de diagramas que resuman los principales conceptos, propiedades y procedimientos con límites y derivadas de funciones.

Uso de softwares que refuercen la aplicación de derivadas de funciones.

Reflexión

¿Qué diferencia el conjunto de los nùmeros reales del resto de conjuntos estudiados?

Identificación, en ejercicios o problemas, de las características de las funciones, dadas mediante su expresión algebraica o su gráfico.

Reflexión y análisis sobre la aplicación de las funciones, límites y derivadas en la vida.

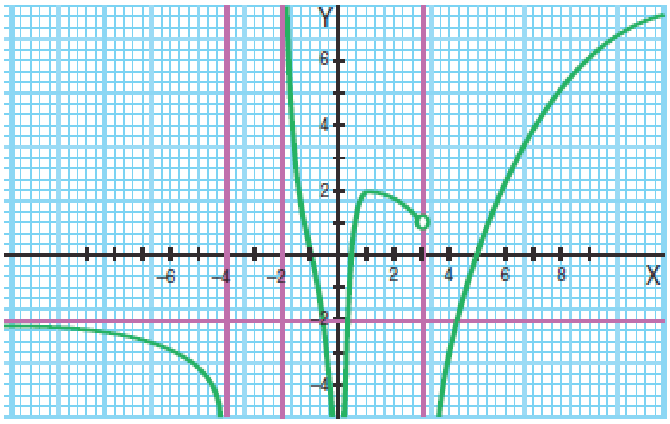
Aplicación

¿Por qué es importante el uso y aplicación de los límites y la derivada?

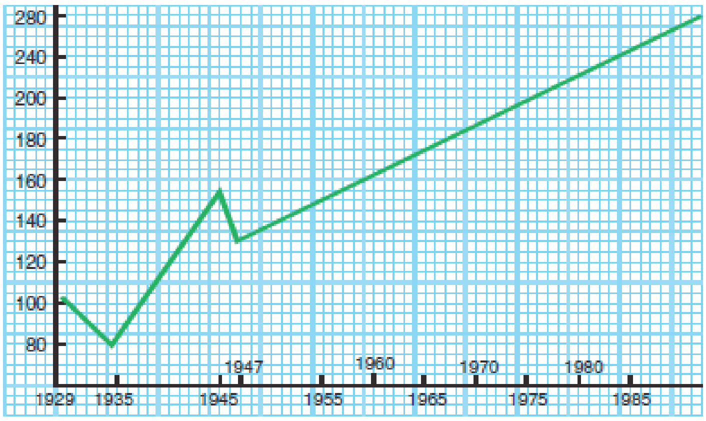
Planteamiento y resolución de problemas de continuidad y optimización.

BANCO DE PREGUNTAS

1. ¿Cuál es la función derivada de $f(x) = (x^2 + 5)^2$?
   a) $x^2 + 5$ *b)* $4x^3 + 20x$ *c)* $2x^2 + 10$
   Sol.: b
2. A partir de la gráfica de *f*, halla:
   a) $f(3)$ *c)* $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ *e)* $\lim_{x \to -2} f(x)$ *g)* $\lim_{x \to 3^-} f(x)$
   b) $f(5)$ *d)* $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ *f)* $\lim_{x \to 0} f(x)$ *h)* $\lim_{x \to 3} f(x)$
   – Determina las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales de *f*.
   Sol.: *a)* No existe; *b)* 0; *c)* − 2; *d)* +∞;
   e) +∞; *f)* −∞; *g)* 1; *h)* No existe
   Asíntotas verticales: $x = -4$, $x = -2$, $x = 0$ y $x = 3$
   Asíntota horizontal: $y = -2$ por la izquierda



3. La siguiente figura refleja la evolución de un indicador del bienestar económico de EE. UU. durante el período 1929-1985.
   Este indicador considera como un valor de referencia, 100, el correspondiente al año 1929.



   a) Averigua cuál era el valor del indicador en 1935, 1945 y 1970.
   b) Calcula la variación del bienestar por unidad de tiempo en los intervalos [1929, 1935], [1935, 1945], [1945, 1947] y [1947, 1985].
   c) ¿En cuál de los intervalos anteriores disminuye de forma más rápida el bienestar? ¿En cuál aumenta más rápidamente?
   d) ¿Cuáles crees que fueron las causas de los intervalos de disminución del bienestar?
   Sol.: a) f(1935) = 85, f(1945) = 155, f(1970) = 188
4. Dibuja la gráfica de una función *f* que tenga las siguientes características:
   • Las rectas $x = 2$ y $x = -2$ son asíntotas verticales de *f* y la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal.
   • Corta al eje *OY* en el punto (0, −2) que a su vez es un máximo relativo de la función y no corta al eje *OX*.
   • Pasa por los puntos (−4, 2) y (4, 2).

RECURSOS PROPIOS DEL ÁREA

La incorporación de herramientas tecnológicas como recurso didáctico para el aprendizaje de las matemáticas, especialmente en el caso de que se apliquen estos recursos dentro y fuera del aula.

Así, las principales herramientas TIC disponibles y algunos ejemplos de sus utilidades concretas son:

– Utilización de herramientas simples de algún programa de diseño gráfico.

Como Mathlab, Desmos, Derive, especialmente en esta unidad, para graficar funciones.

– Uso y aplicación de calculadoras gráficas.

– Uso de procesadores de texto para redactar, revisar la ortografía, hacer resúmenes, añadir títulos, imágenes, hipervínculos, gráficos y esquemas sencillos, etc.

– Usos sencillos de las hojas de cálculo para organizar la información (datos) y presentarla, en ocasiones, de forma gráfica.

– Usos simples de bases de datos.

– Utilización de programas de correo electrónico.

– Usos y opciones básicas de los programas navegadores.

- Acceso, entre otras muchas utilidades, a las noticias de prensa (prensa digital) para establecer comparaciones, recabar información actualizada, etc., o para investigaciones bibliográficas.
- Uso de buscadores.
- Extracción de información (enlaces) a partir de los propios directorios de cada buscador principal.
- Uso de los recursos de búsqueda por términos clave en búsquedas simples y avanzadas.
- Usos sencillos de programas de presentación (PowerPoint o similares): trabajos multimedia, presentaciones creativas de contenidos, esquemas, o realización de diapositivas.
- Uso de los recursos de búsqueda por términos clave en búsquedas simples y avanzadas.
- Creación y organización de listas de favoritos, así como seguimiento y actualización de la información de las distintas URL consultadas.

– Uso de enciclopedias virtuales (cd y www).

– Uso de periféricos: escáner, impresoras, etc.

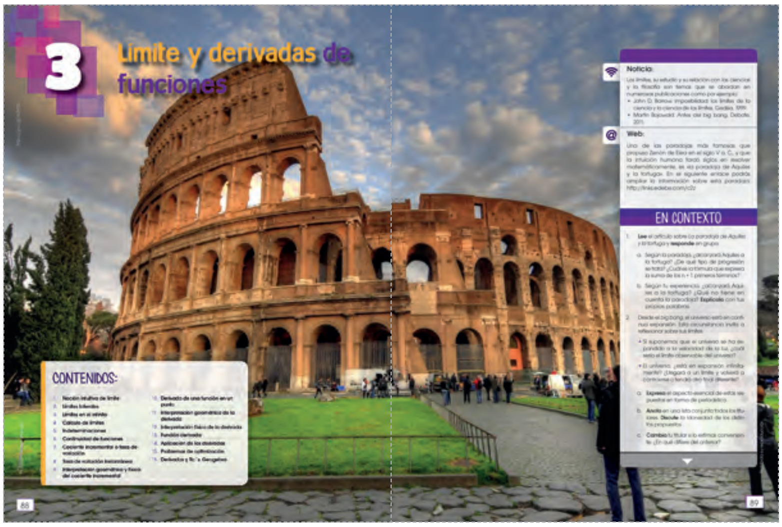
– Puesta en práctica de videoconferencias, chats...

– Usos sencillos de programas de presentación (PowerPoint o similares): trabajos multimedia, presentaciones creativas de textos.

Página 88 Página 89

Orientación didáctica

- Para anticipar posibles dificultades en los contenidos de la unidad, se recomienda:
- Hacer un recordatorio de los contenidos vistos en la unidad anterior: Determinación del dominio y recorrido de funciones y división de polinomios por el método de Ruffini.
- Insistir en el uso correcto del vocabulario matemático y la nomenclatura básica para la unidad desigualdades. Enfatizar en el término de −∞ o +∞, pues un error común en los estudiantes es expresar ∞− o ∞+.
- Aplicar rutinas que se proponen al inicio de esta guía, para favorecer la actividad reflexiva por parte de los alumnos, los procesos de pensamiento y el trabajo en grupo y cooperativo.
- Debe darse gran importancia al aprendizaje de las reglas de derivación, explicando y comprobando mediante ejemplos resueltos en pizarra que los alumnos entienden muy bien el procedimiento para derivar funciones.
- Practicar extensamente la resolución de ejercicios y problemas de aplicación.



Solucionario

S4 = 100 / (1 – 1/10) = 111,111... m

Es una progresión geométrica.

La fórmula que expresa la suma de los n + 1 primeros términos es:

S = a + a·r + a·r2 + a·r3 + a·r4 + ...+ a·rn

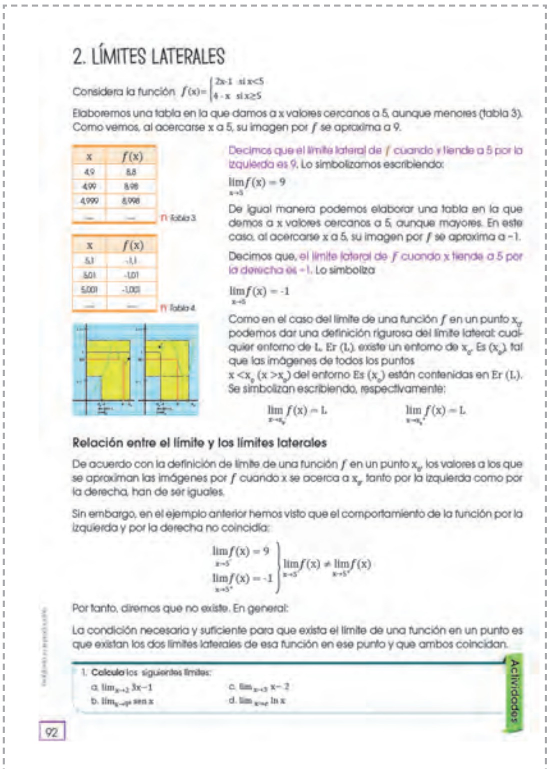
S=(a_1-a_r^(n+1))/(1-r)

La experiencia también nos dice que la alcanzará. No se tuvo en cuenta que la serie que planteaba Zenón no tiende a infinito, de modo que, llegado a cierto punto, la superará.

b) Esta actividad pretende que el alumno reflexione sobre el concepto de límite y su significado, en el contexto del universo.

Página 92

Página 95


2. LÍMITES LATERALES

Considera la función $f(x)=\begin{cases}2x-1 & \text{si } x<5\\ 4-x & \text{si } x\geq 5\end{cases}$

Elaboremos una tabla en la que damos a x valores cercanos a 5, aunque menores (tabla 3). Como vemos, al acercarse x a 5, su imagen por f se aproxima a 9.

Decimos que el límite lateral de f cuando x tiende a 5 por la izquierda es 9. Lo simbolizamos escribiendo: $\lim_{x\to 5^-} f(x) = 9$

De igual manera podemos elaborar una tabla en la que demos a x valores cercanos a 5, aunque mayores. En este caso, al acercarse x a 5, su imagen por f se aproxima a -1.

Decimos que, el límite lateral de f cuando x tiende a 5 por la derecha es -1. Lo simboliza $\lim_{x\to 5^+} f(x) = -1$

Relación entre el límite y los límites laterales

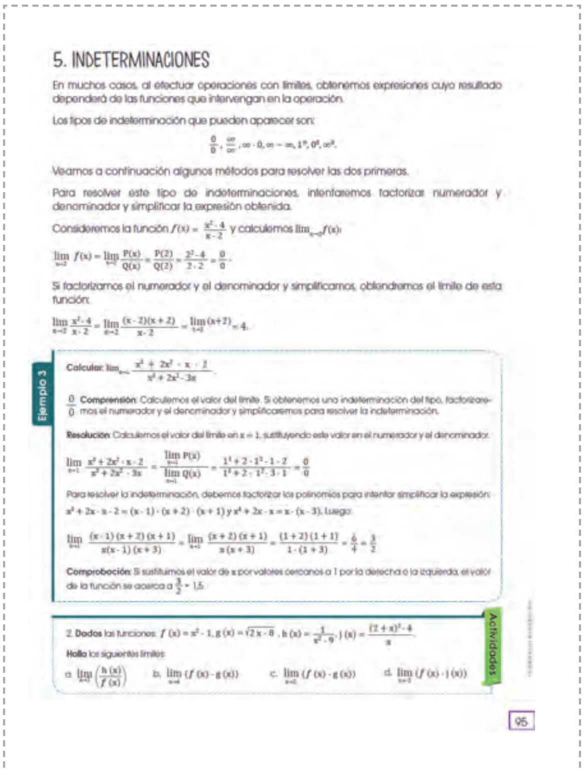
Por tanto, diremos que no existe. En general:

La condición necesaria y suficiente para que exista el límite de una función en un punto es que existan los dos límites laterales de esa función en ese punto y que ambos coincidan.

1. Calcula los siguientes límites:

Actividades

92


5. INDETERMINACIONES

En muchos casos, al efectuar operaciones con límites, obtendremos expresiones cuyo resultado dependerá de las funciones que intervengan en la operación.

Los tipos de indeterminación que pueden aparecer son:

Veamos a continuación algunos métodos para resolver las dos primeras.

Ejemplo 3

2. Dadas las funciones: $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = \sqrt{2x-8}$, $h(x) = \frac{1}{x^2-9}$, $i(x) = \frac{(2+x)^2-4}{x}$

Halla los siguientes límites:

Actividades

95

Solucionario

Ejercicio 1

a) $\lim_{x\to 2} 3x - 1 = 3.2 - 1 = 5$

b) $\lim_{x\to 90^\circ} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 90^{o} = 1$

c) $\lim_{x\to 3} x - 2 = 3 - 2 = 1$

d) $\lim_{x\to e} \ln x = 1$

a) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{h(x)}{f(x)}\right) = \lim_{x\to 2}\frac{1}{(x^2-9)\cdot(x^2-1)} = -\frac{1}{15}$

b) $\lim_{x\to 4}\left(f(x)+g(x)\right) =$

$= \lim_{x\to 4}(x^2-1) + \lim_{x\to 4}\sqrt{2x-8} = 15 + 0 = 15$

c) $\lim_{x\to 2}\left(f(x)-g(x)\right) =$

$= \lim_{x\to 2}(x^2-1) + \lim_{x\to 2}\sqrt{2x-8} = 15 + \sqrt{-4}$

No existe.

d) $\lim_{x\to -1}\left(f(x)\cdot i(x)\right) =$

$= \lim_{x\to -1}\frac{(x^2-1)\left((2+x)^2-4\right)}{x} = 0$

Solucionario

Ejercicio 3

a) Calculamos:

$f(0) = 3$ $\quad\quad$ $f(2) = 15{,}778$

$$TVM_{\,(0,2]}\, f(x) = \frac{15{,}778 - 3}{2-0} = 6{,}39$$

b) Calculamos:

$f(3) = 41{,}17$ $\quad\quad$ $f(6) = 807{,}85$

$$TVM_{\,[3,6]}\, f(x) = \frac{807{,}85 - 41{,}17}{6-3} = 255{,}56$$

c) La fórmula de la tasa de variación instantánea podemos escribirla como:

e) $\quad TVI_a\, f(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = 1$

Por tanto:

$$TVI_6 f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1+2e^{6+h} - \left(1+2e^{6}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2e^{6}\left(e^{h}-1\right)}{h} =$$

$$= 2e^{6} \lim_{h\to 0} \frac{e^{h}-1}{h} = 2e^{6} \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)-1}{h} = 2e^{6} = 806{,}86$$

Ejercicio 4

a) $f(x) = 2x + 3$ en $x = 2$; $f(2) = 7$

$$TVI_2 f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{2x+3-7}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{2(x-2)}{x-2} = 2$$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $x = 2$; $f(2) = 1/2$

$$TVI_2 f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{-(x-2)}{2x}}{x-2} = \frac{-1}{4}$$

c) $f(x) = x^2 - 1$ en $x = 0$; $f(0) = -1$

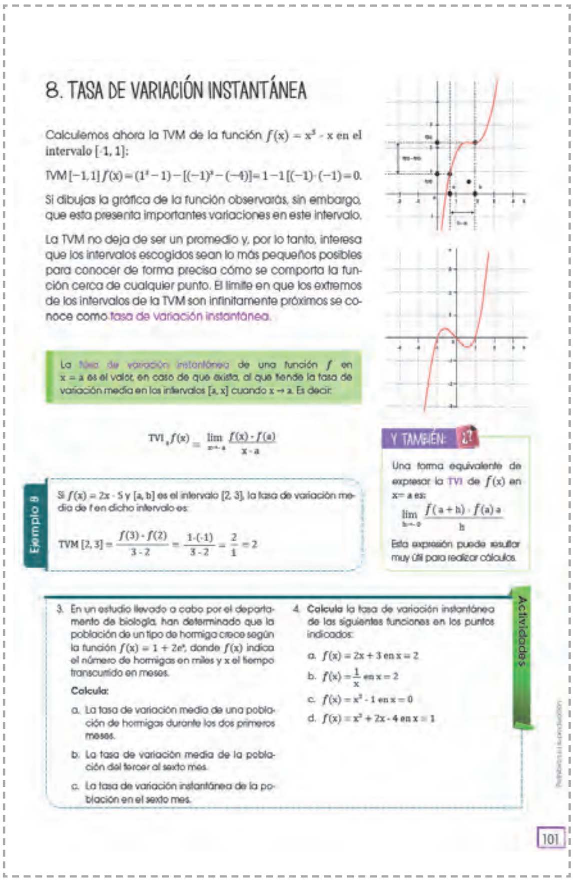
$$TVI_0 f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-1+1}{x-0} = \lim_{x\to 0} x = 0$$

d) $f(x) = x^3 + 2x - 4$ en $x = 1$; $f(1) = -1$

$$TVI_1 f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^3+2x-4+1}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+3)}{x-1} = 5$$

Página 101



8. TASA DE VARIACIÓN INSTANTÁNEA

Calculemos ahora la TVM de la función $f(x) = x^3 - x$ en el intervalo $[-1, 1]$:

$TVM[-1,1]\,f(x) = (1^3 - 1) - [(-1)^3 - (-4)] = 1 - 1[(-1)\cdot(-1) = 0.$

Si dibujas la gráfica de la función observarás, sin embargo, que esta presenta importantes variaciones en este intervalo.

La TVM no deja de ser un promedio y, por lo tanto, interesa que los intervalos escogidos sean lo más pequeños posibles para conocer de forma precisa cómo se comporta la función cerca de cualquier punto. El límite en que los extremos de los intervalos de la TVM son infinitamente próximos se conoce como tasa de variación instantánea.

La tasa de variación instantánea de una función f en $x = a$ es el valor, en caso de que exista, al que tiende la tasa de variación media en los intervalos $[a, x]$ cuando $x \to a$. Es decir:

$$TVI_a f(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Ejemplo 8

Si $f(x) = 2x - 5$ y $[a, b]$ es el intervalo $[2, 3]$, la tasa de variación media de f en dicho intervalo es:

$$TVM\,[2,3] = \frac{f(3) - f(2)}{3-2} = \frac{1-(-1)}{3-2} = \frac{2}{1} = 2$$

Y TAMBIÉN:

Una forma equivalente de expresar la TVI de $f(x)$ en $x = a$ es:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)\,a}{h}$$

Esta expresión puede resultar muy útil para realizar cálculos.

Actividades

3. En un estudio llevado a cabo por el departamento de biología, han determinado que la población de un tipo de hormiga crece según la función $f(x) = 1 + 2e^x$, donde $f(x)$ indica el número de hormigas en miles y x el tiempo transcurrido en meses.

Calcula:

a. La tasa de variación media de una población de hormigas durante los dos primeros meses.

b. La tasa de variación media de la población del tercer al sexto mes.

c. La tasa de variación instantánea de la población en el sexto mes.

4. **Calcula** la tasa de variación instantánea de las siguientes funciones en los puntos indicados:

a. $f(x) = 2x + 3$ en $x = 2$

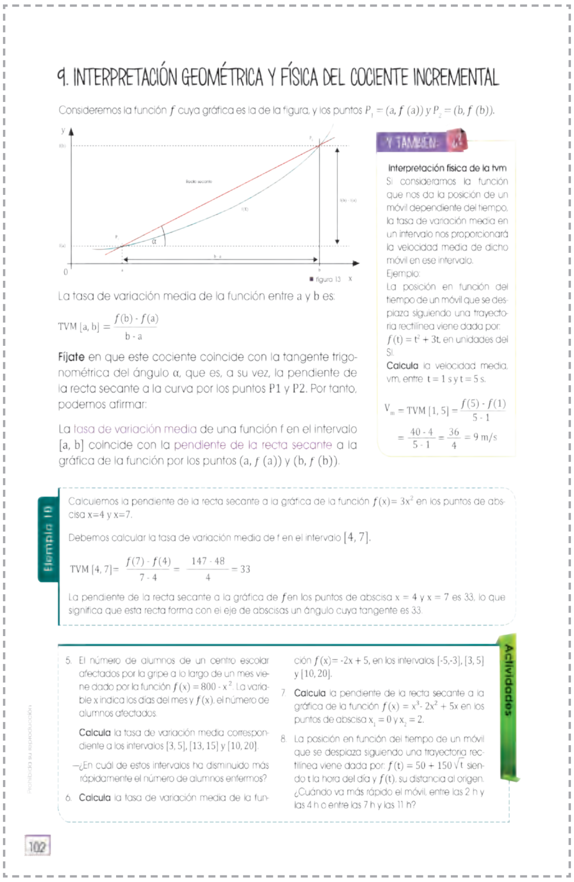
b. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $x = 2$

c. $f(x) = x^2 - 1$ en $x = 0$

d. $f(x) = x^3 + 2x - 4$ en $x = 1$

101

Página 102


9. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA Y FÍSICA DEL COCIENTE INCREMENTAL

Consideremos la función f cuya gráfica es la de la figura, y los puntos $P_1 = (a, f(a))$ y $P_2 = (b, f(b))$.

La tasa de variación media de la función entre a y b es:

$TVM\,[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Fíjate en que este cociente coincide con la tangente trigonométrica del ángulo α, que es, a su vez, la pendiente de la recta secante a la curva por los puntos P1 y P2. Por tanto, podemos afirmar:

La tasa de variación media de una función f en el intervalo [a, b] coincide con la pendiente de la recta secante a la gráfica de la función por los puntos (a, f (a)) y (b, f (b)).

Y TAMBIÉN:

Interpretación física de la tvm

Si consideramos la función que nos da la posición de un móvil dependiente del tiempo, la tasa de variación media en un intervalo nos proporcionará la velocidad media de dicho móvil en ese intervalo.

Ejemplo:

La posición en función del tiempo de un móvil que se desplaza siguiendo una trayectoria rectilínea viene dada por $f(t) = t^2 + 3t$, en unidades del SI.

Calcula la velocidad media, vm, entre $t = 1$ s y $t = 5$ s.

$V_m = TVM\,[1, 5] = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{40 - 4}{5 - 1} = \frac{36}{4} = 9$ m/s

Ejemplo 10

Calculemos la pendiente de la recta secante a la gráfica de la función $f(x) = 3x^2$ en los puntos de abscisa x=4 y x=7.

Debemos calcular la tasa de variación media de f en el intervalo [4, 7].

$TVM\,[4, 7] = \frac{f(7) - f(4)}{7 - 4} = \frac{147 - 48}{4} = 33$

La pendiente de la recta secante a la gráfica de f en los puntos de abscisa x = 4 y x = 7 es 33, lo que significa que esta recta forma con el eje de abscisas un ángulo cuya tangente es 33.

Actividades

5. El número de alumnos de un centro escolar afectados por la gripe a lo largo de un mes viene dado por la función $f(x) = 800 - x^2$. La variable x indica los días del mes y $f(x)$, el número de alumnos afectados.

Calcula la tasa de variación media correspondiente a los intervalos [3, 5], [13, 15] y [10, 20].

—¿En cuál de estos intervalos ha disminuido más rápidamente el número de alumnos enfermos?

6. **Calcula** la tasa de variación media de la función $f(x) = -2x + 5$, en los intervalos [-5,-3], [3, 5] y [10, 20].

7. **Calcula** la pendiente de la recta secante a la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$ en los puntos de abscisa $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$.

8. La posición en función del tiempo de un móvil que se desplaza siguiendo una trayectoria rectilínea viene dada por $f(t) = 50 + 150\sqrt{t}$ siendo t la hora del día y $f(t)$, su distancia al origen. ¿Cuándo va más rápido el móvil, entre las 2 h y las 4 h o entre las 7 h y las 11 h?

102

Solucionario

Ejercicio 5

1. $\left.\begin{array}{l} f(x) = 800 - x^2 \\ [a, b] = [3, 5] \end{array}\right\} \Rightarrow TVM\,[3, 5] =$

$$= \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{(\cancel{800} - 25) - (\cancel{800} - 9)}{2} =$$

$$= \frac{-25 + 9}{2} = \frac{-16}{2} = -8$$

$\left.\begin{array}{l} f(x) = 800 - x^2 \\ [a, b] = [13, 15] \end{array}\right\} \Rightarrow TVM\,[13, 15] =$

$$= \frac{f(15) - f(13)}{15 - 13} = \frac{(\cancel{800} - 15^2) - (\cancel{800} - 13^2)}{2} =$$

$$= \frac{-15^2 + 13^2}{2} = \frac{-56}{2} = -28$$

$\left.\begin{array}{l} f(x) = 800 - x^2 \\ [a, b] = [10, 20] \end{array}\right\} \Rightarrow TVM\,[10, 20] =$

$$= \frac{f(20) - f(10)}{20 - 10} = \frac{(\cancel{800} - 20^2) - (\cancel{800} - 10^2)}{10} =$$

$$= \frac{-20^2 + 10^2}{10} = \frac{-400 + 100}{10} = -30$$

En el intervalo [10, 20] ha disminuido más rápidamente el número de enfermos, pues es donde hay menor tasa de variación media (menor tasa de variación media significa menor aumento del número de enfermos, o sea, mayor disminución de dicho número).

Ejercicio 6

TVM [–5, –3] = 2,

TVM [3, 5] = 4,

TVM [10, 20] = –2

Ejercicio 7

Como la TVM coincide con la pendiente de la recta secante que nos piden, tenemos que esta vale 5.

Ejercicio 8

$f(t) = 50 + 150\sqrt{t}$

intervalo, para responder buscaremos los valores: TMV (2, 4) y TMV (7, 11).

TMV (2, 4) = 43,93 TMV (7,11) = 25,16

Así, la velocidad media en el intervalo (2, 4) es mayor que la del intervalo (7, 11), por lo que va más rápido en el intervalo (2, 4).

a) $f(x) = 8x^9$; $f'(x) = 8 \cdot 9 \cdot x^{9} - 1 = 72 \cdot x^8$

b) $f(x) = \sqrt[5]{x^4} = x^{\frac{4}{5}}$

$$f'(x) = \frac{4}{5}x^{\frac{4}{5}-1} = \frac{4}{5}x^{\frac{4-5}{5}} = \frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}} = \frac{4}{5\sqrt[5]{x}}$$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} = x^{-4/5}$

$$f'(x) = -\frac{4}{5}x^{-\frac{9}{5}} = \frac{-4}{5\sqrt[5]{x^9}} = \frac{-4}{5x\sqrt[5]{x^4}} = \frac{-4\sqrt[5]{x}}{5x^2}$$

d) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 7x + 10$

$f'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 7$

e) $f(x) = \cos x \,.\, e^x$

$f'(x) = e^x (\cos x - \text{sen } x)$

f) $f(x) = 4x^3.\ \ln x$

$f'(x) = -4x^2(3\ln x - 1)$

Página 108

Solucionario

Ejercicio 9

a) $f(x) = 8x^9$; $f'(x) = 8 \cdot 9 \cdot x^9 - 1 = 72 \cdot x^8$

b)
$$f(x) = \sqrt[5]{x^4} = x^{\frac{4}{5}}$$
$$f'(x) = \frac{4}{5}x^{\frac{4}{5}-1} = \frac{4}{5}x^{\frac{4-5}{5}} = \frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}} = \frac{4}{5\sqrt[5]{x}}$$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} = x^{-4/5}$

$$f'(x) = -\frac{4}{5}x^{-\frac{9}{5}} = \frac{-4}{5\sqrt[5]{x^9}} = \frac{-4}{5x\sqrt[5]{x^4}} = \frac{-4\sqrt[5]{x}}{5x^2}$$

d) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 7x + 10$

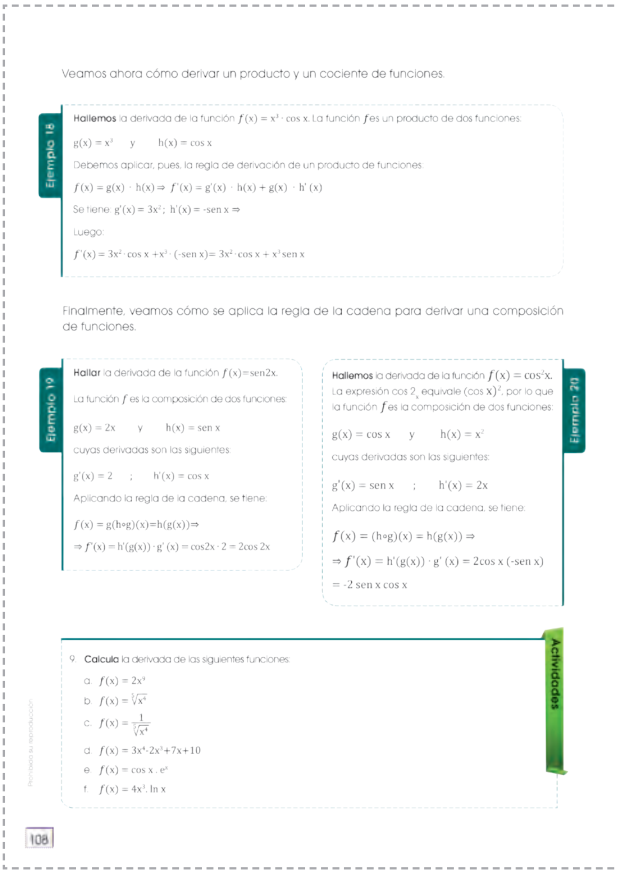
$f'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 7$

e) $f(x) = \cos x \,.\, e^x$

$f'(x) = e^x (\cos x - \text{sen } x)$

f) $f(x) = 4x^3 .\ \ln x$

$f'(x) = -4x^2(3\ln x - 1)$


Veamos ahora cómo derivar un producto y un cociente de funciones.

Ejemplo 18

Hallemos la derivada de la función $f(x) = x^3 \cdot \cos x$. La función f es un producto de dos funciones:

$g(x) = x^3$ y $h(x) = \cos x$

Debemos aplicar, pues, la regla de derivación de un producto de funciones:

$f(x) = g(x) \cdot h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$

Se tiene: $g'(x) = 3x^2$; $h'(x) = -\text{sen } x \Rightarrow$

Luego:

$f'(x) = 3x^2 \cdot \cos x + x^3 \cdot (-\text{sen } x) = 3x^2 \cdot \cos x + x^3 \text{sen } x$

Finalmente, veamos cómo se aplica la regla de la cadena para derivar una composición de funciones.

Ejemplo 19

Hallar la derivada de la función $f(x) = \text{sen}2x$.

La función f es la composición de dos funciones:

$g(x) = 2x$ y $h(x) = \text{sen } x$

cuyas derivadas son las siguientes:

$g'(x) = 2$; $h'(x) = \cos x$

Aplicando la regla de la cadena, se tiene:

$f(x) = g(h \circ g)(x) = h(g(x)) \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = \cos 2x \cdot 2 = 2\cos 2x$

Ejemplo 20

Hallemos la derivada de la función $f(x) = \cos^2 x$. La expresión $\cos 2_x$ equivale $(\cos x)^2$, por lo que la función f es la composición de dos funciones:

$g(x) = \cos x$ y $h(x) = x^2$

cuyas derivadas son las siguientes:

$g'(x) = \text{sen } x$; $h'(x) = 2x$

Aplicando la regla de la cadena, se tiene:

$f(x) = (h \circ g)(x) = h(g(x)) \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = 2\cos x\,(-\text{sen } x)$

$= -2 \text{ sen } x \cos x$

Actividades

9. **Calcula** la derivada de las siguientes funciones:

a. $f(x) = 2x^9$
b. $f(x) = \sqrt[5]{x^4}$
c. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$
d. $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 7x + 10$
e. $f(x) = \cos x \,.\, e^x$
f. $f(x) = 4x^3 .\ \ln x$

Página 115

Solucionario

Ejercicio 1

a) $\lim_{x\to 1} x^3 + 2x^2 - x - 10 = 1^3 + 2.1^2 - 1 - 10 = -8$

b)
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x^2 + 5}{x^3 - 2x^2 + x - 3} =$$
$$= \frac{1^3 + 1^2 + 5}{1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 - 3} = -\frac{7}{3}$$

c)
$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x - 4} = \frac{3^2 - 5 \cdot 3 + 6}{3^2 - 3 \cdot 3 - 4} = 0$$

d) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3 - 5x + 8x + 4}{x^3 + x^2 - 8x - 12} =$

$$\frac{(-2)^3 - 5(-2) + 8(-2) + 4}{(-2)^3 + (-2)^2 - 8(-2) - 12} = \frac{-8 + 10 - 16 + 4}{-8 + 4 + 16 - 12} = \frac{-10}{0} = \text{NE}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x+1)^2 - (x-2)^3 - 5}{(x+1)^3 - (x-2)^2 - 7}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}\,(-x^2 + 6x - 4)}{\cancel{(x-1)}\,(x^2 + 3x + 10)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-x^2 + 6x - 4}{x^2 + 3x + 10} = \frac{-1^2 + 6 \cdot 1 - 4}{1^2 + 3 \cdot 1 + 10} = \frac{1}{14}$$

Solucionario

Ejercicio 2

a) $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$ para $x = 3$.

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x}{x-3} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x}{x-3} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

b) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+2x+1}$ para $x = 1$.

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2x}{x^2+2x+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{x^2+2x+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

No existe el límite

Ejercicio 3

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+5}{x-2}$

Calculamos los límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x+5}{x-2} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+5}{x-2} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{No existe } \lim_{x\to 2} \frac{x+5}{x-2}$$

b) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2+5x-14}{x^2-10x+25}$

Calculamos los límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{x^2+5x-14}{x^2-10x+25} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{x^2+5x-14}{x^2-10x+25} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 5} \frac{x^2+5x-14}{x^2-10x+25} = +\infty$$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-x^2+2x-1}{x^4-6x^3+13x^2-12x+4} =$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{-\cancel{(x-1)^2}}{(x-2)^2\cancel{(x-1)^2}} = \lim_{x\to 2} \frac{-1}{(x-2)^2}$$

Calculamos los límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{-1}{(x-2)^2} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{-1}{(x-2)^2} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty$$

Ejercicio 4

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6-4n^2}{2n^2} = \dfrac{-4}{2} = -2$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4n^2+3n-2}{2n^3-4n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^3-4n}{4n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{2} = +\infty$

Ejercicio 5

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{3x}{x^2-4} = \dfrac{6}{0^-} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{3x}{x^2-4} = \dfrac{6}{0^+} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{x+2}{x+1} \cdot \dfrac{x-7}{x-3}\right) = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{x^2-5x-14}{x^2-2x-3}\right) = 1$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-8x^4+2}{2x^2+4} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(-x^2\right) = -\infty$

La variable *a* debe cumplir que:

$$-1 = \lim_{x\to 2} \frac{ax^2-8}{x} = \frac{4a-8}{2} = 2a-4 \rightarrow a = \frac{3}{2}$$

Ejercicio 7

a) $\lim\limits_{x\to 1^-} \left|\dfrac{x^2}{2x-2}\right| = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} \left|\dfrac{x^2}{2x-2}\right| = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left|\dfrac{x^2}{2x-2}\right| = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left|\dfrac{x^2}{2x-2}\right| = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 0^-} \left|\dfrac{x^2}{2x-2}\right| = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \left|\dfrac{x^2}{2x-2}\right| = 0$

e) $\lim\limits_{x\to 2} \left|\dfrac{x^2}{2x-2}\right| = 2$

f) $\lim\limits_{x\to -2} \left|\dfrac{x^2}{2x-2}\right| = \dfrac{2}{3}$

Solucionario

Ejercicio 8

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+a}{x-a}-\frac{x^2-a}{x+a}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2ax^2+2ax}{x^2-a^2}=6\rightarrow$$

$\rightarrow 2a = 6 \rightarrow a = 3$

Ejercicio 9

a) $$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+2x-a}{x^2-bx+2}\right)=\frac{8-a}{6-2b}=\frac{0}{0}\rightarrow$$

$\rightarrow 8 - a = 0 \rightarrow a = 8$
$6 - 2b = 0 \rightarrow b = 3$

b) $$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+2x-8}{x^2-3x+2}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x+4)(x-2)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+4}{x-1}=6$$

Ejercicio 10

$$\text{TVM }[-1,0]=\frac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}\underset{f(x)=x^2-3}{\overset{\uparrow}{=}}\frac{-3-(-2)}{1}=$$

$$=-3+2=-1$$

$$\text{TVM }[2,5]=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}\underset{f(x)=x^2-3}{\overset{\uparrow}{=}}\frac{(25-\cancel{3})-(4-\cancel{3})}{3}=$$

$$=\frac{21}{3}=7$$

Ejercicio 11

a) $TVM_{[0,2]}f(x)=\dfrac{2-0}{2-0}=1$

$TVM_{[0,2]}g(x)=\dfrac{9-25}{2-0}=-8$

b) $TVM_{[2,4]}f(x)=\dfrac{2-2}{4-2}=0$

$TVM_{[2,4]}g(x)=\dfrac{1-9}{4-2}=-4$

c) $TVM_{[4,10]}f(x)=\dfrac{0-2}{10-4}=-\dfrac{1}{3}$

$TVM_{[4,10]}g(x)=\dfrac{25-1}{10-4}=4$

Ejercicio 12

a) $TVM_{[0,5]}f(x)=\dfrac{5-0}{20-0}=0{,}25$ km/min

$TVM_{[0,5]}g(x)=\dfrac{5-0}{20-0}=0{,}25$ km/min

b) $TVM_{[20,45]}f(x)=\dfrac{10-5}{45-20}=0{,}2$ km/min

$TVM_{[20,40]}g(x)=\dfrac{10-5}{40-20}=0{,}25$ km/min

c) $TVM_{[0,45]}f(x)=\dfrac{10-0}{45-0}=0{,}222$ km/min

$TVM_{[0,40]}g(x)=\dfrac{10-0}{40-0}=0{,}25$ km/min

d) Se corresponde a la velocidad media.

Ejercicio 13

a) $f(x)=x$ $\quad f(1)=1 \quad f(1+h)=1+h$

$TVM_{[1,1+h]}f(x)=\dfrac{1+h-1}{1+h-1}=1$

b) $f(x)=x^2$ $\quad f(1)=1 \quad f(1+h)=h^2+2h+1$

$TVM_{[1,1+h]}f(x)=\dfrac{h^2+2h+1-1}{1+h-1}=h+2$

c) $f(x)=\sqrt{x}$ $\quad f(1)=1 \quad f(1+h)=\sqrt{1+h}$

$TVM_{[1,1+h]}f(x)=\dfrac{\sqrt{1+h}-1}{1+h-1}=\dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h}$

d) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ $\quad f(1)=1 \quad f(1+h)=\dfrac{1}{1+h}$

$TVM_{[1,1+h]}f(x)=\dfrac{\frac{1}{1+h}-1}{1+h-1}=\dfrac{\frac{-h}{1+h}}{h}=\dfrac{-1}{1+h}$

Página 116

Solucionario

Ejercicio14

La función que representa el área del círculo es: $A(r) = \pi r^2$

a) $TVM_{[2,4]}A(r) = \dfrac{16\pi - 4\pi}{4 - 2} = 18{,}85$

b) $TVM_{[0,10]}A(r) = \dfrac{100\pi - 0}{10 - 0} = 31{,}41$

c) $TVI_2A(r) = \lim\limits_{r \to 2} \dfrac{\pi r^2 - 4\pi}{r - 2} =$

$= \lim\limits_{r \to 2} \dfrac{\pi(r+2)(r-2)}{r-2} = 12{,}56$

d) $TVI_{10}A(r) = \lim\limits_{r \to 10} \dfrac{\pi r^2 - 100\pi}{r - 10} =$

$= \lim\limits_{r \to 10} \dfrac{\pi(r+10)(r-10)}{r-10} = 62{,}8$

e) $TVI_{100}A(r) = \lim\limits_{r \to 100} \dfrac{\pi r^2 - 10\,000\pi}{r - 100} =$

$= \lim\limits_{r \to 2} \dfrac{\pi(r+100)(r-100)}{r-100} = 628{,}3$

Ejercicio 15

a) $f(x) = -x + 6$

$f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

$f'(1) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-x + 6 - 5}{x - 1} = -1$

b) $f(x) = \dfrac{x}{2} - 1$

$f'(1) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\frac{x}{2} - 1 + \frac{1}{2}}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\frac{1}{2}(x-1)}{x-1} = 0{,}5$

c) $f(x) = -x^2 +$

$f'(1) = \lim\limits_{x \to 1}$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-x^2 +}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{2}{x}$

$f'(1) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\frac{2}{x} - 2}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\frac{2 - 2x}{x}}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\frac{-2(x-1)}{x}}{x - 1} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-2}{x} = -2$

Ejercicio16

$f(x) = x^2 - 3x + 5$ en $x = 2$; $f(2) = 3$

La ecuación de la recta tangente viene dada por:

$y - f(a) = f'(a)(x - a)$

Calculamos la derivada de la función en el punto $x = 2$

$f'(2) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 5 - 3}{x - 2} =$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} =$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x-1)}{x - 2} = 1$

La ecuación de la recta tangente será: $y - 3 = (x - 2) \to y = x + 1$

Ejercicio17

$f(x) = 3x^2 - 4x + 6$

a) $f'(2) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2 - 4x + 6 - 10}{x - 2} =$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2 - 4x - 4}{x - 2} =$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(3x+2)(x-2)}{x - 2} = 8$

b) $f'(-1) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^2 - 4x + 6 - 13}{x + 1} =$

$= \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^2 - 4x - 7}{x + 1} =$

$= \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^2 - 4x - 7}{x + 1} =$

$= \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x+1)(3x-7)}{x + 1} = -10$

Solucionario

Ejercicio18

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, \text{ si } x < 0 \\ x^2 \ \text{ si } 0 \le x \le 2 \\ 2x \ \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Estudiamos el punto $x = 0$ y comprobamos si la función es continua en este punto:

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \ f(0) = 0$

Como no coinciden, la función no es continua en $x = 0$ y, por tanto, tampoco derivable en él.

Estudiamos la continuidad de la función $f(x)$ en el punto $x = 2$:

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4 \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = 4, \quad f(2) = 4$

Los valores coinciden y, por tanto, la función $f(x)$ es continua en $x = 2$.

Derivamos la función $f(x)$:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Para saber si es derivable en $x = 2$, observamos cómo se comporta alrededor de ese punto:

$f'(2^-) = 4 \ f'(2^+) = 2$

No coinciden y, por tanto, la función $f(x)$ no es derivable en $x = 2$.

Ejercicio19

$$f(x) = \frac{k}{g(x)} \overset{?}{\Rightarrow} f'(x) = -\frac{k\,g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$f'(x) \underset{\uparrow}{=} \frac{k'\,g(x) - k \cdot g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{0 \cdot g(x) - k \cdot g'(x)}{(g(x))^2} =$$

[regla de derivación para el cociente]

$$= \frac{-k \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Luego la afirmación es cierta.

Ejercicio20

$$f(x) = tg(x) = \frac{\text{sen } x}{\cos x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(\text{sen } x)' \cdot \cos x - \text{sen } x \cdot (\cos x)'}{(\cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{\cos^2 x}$$

[teorema fundamental de trigonometría]

Ejercicio 21

a) $f(x) = x^5 \rightarrow f'(x) = 5x^4$

b) $f(x) = x^{-4} \rightarrow f'(x) = -4x^{-5}$

c) $f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3} \rightarrow f'(x) = -3x^{-4} = \frac{-3}{x^4}$

d) $f(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

e) $f(x) = \sqrt[5]{x^3} = x^{\frac{3}{5}} \rightarrow f'(x) = \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$

f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}} \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}}$

Ejercicio22

a) $h(x) = f'(x) + g(x) = 15x\ 4 - \text{sen } x$

$j(x) = f'(x) - g(x) = 15x\ 4 + \text{sen } x$

b) $h(x) = f'(x) + g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$

$j(x) = f'(x) - g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$

c) $h(x) = f'(x) + g'(x) = 6x^2 - \frac{1}{x^2}$

$j(x) = f'(x) - g'(x) = 6x^2 + \frac{1}{x^2}$

d) $h(x) = f'(x) + g'(x) = \cos x + 5^{e\,x}$

$j(x) = f'(x) - g(x) = \cos x - 5^{ex}$

e) $h(x) = f'(x) + g'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 3} + \ln 3 \cdot 3^x$

$h(x) = f'(x) - g'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 3} - \ln 3 \cdot 3^x$

24. a) $f(x) = 2x - 6, \quad f'(x) = 2$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{2(x+h) - 6 - (2x - 6)}{h} = \lim_{h\to 0} 2 = 2$$

b) $f(x) = -x \quad f'(x) = -1$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{-(x+h) - (-x)}{h} = \lim_{h\to 0} -1 = -1$$

c) $f(x) = \sqrt{x + 1}, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

d) $f(x) = \frac{2x}{x-5}$

$$f'(x) = \frac{2(x-5) - 2x}{(x-5)^2} = -\frac{10}{(x-5)^2}$$

Página 116

Solucionario

a) $x^5(6\text{sen } x + x\cos x)$ b) $2x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2\sqrt{x}}$
c) $x(2\ln x + 1)$ d) $e^x(x3 + 3x^2 - 2x - 2)$
e) $\frac{\cos x}{x} - \text{sen } x.\ln x$ f) $\cos^2 x - \text{sen}^2 x$
g) $\frac{1}{2\sqrt{x}} sen\, x + \cos x\sqrt{x}$ h) $3^x(x\ln x + 1)$

Ejercicio 26

a) $f(x) = 3x^4 + 5x3 - 12x^2 + 3x + 4$
$f'(x) = 3 \cdot 4x^3 + 5 \cdot 3x^2 - 12 \cdot 2x + 3 =$
$= 12x^3 + 15x^2 - 24x + 3$
b) $f(x) = 4\ln x - x$
$f'(x) = 4\frac{1}{x} - 1 = \frac{4}{x} - 1$
c) $f(x) = e^x \cdot \text{sen } x$;
$f'(x) = e^x \text{ sen } x + e^x \cos x = e^x(\text{sen } x + \cos x)$
d) $f(x) = 4\cos x - x\ln x$
$f'(x) = -4\text{sen } x - \left(\ln x + x.\frac{1}{x}\right) = -4\text{sen } x - \ln x$
-1
e) $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$ $f'(x) = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2}$

Ejercicio 27

$f(x) = 2x^2 - 4x + 6$, $g(x) = -x^2 + 2x$
$f'(x) = 4x - 4$ $g'(x) = -2x + 2$
a) $h(x) = f(x) + g(x) \to h'(x) = 2x - 2$
b) $i(x) = g(x) - f(x) \to i'(x) = -6x + 6$
c) $j(x) = f(x) \cdot g(x) \to$
$j'(x) = (4x - 4)(-x^2 + 2x) + (2x^2 - 4x + 6)(-2x + 2) =$
$= -8x^3 + 24x^2 - 28x + 12$
d) $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \to$
$$\to k'(x) = \frac{(4x-4)(-x^2+2x) - (2x^2-4x+6)(-2x+2)}{(-x^2+2x)^2} =$$
$$= \frac{12x - 12}{(-x^2+2x)^2}$$

Ejercicio 28

a) $f(x)\ \ln(x + 1)$ en $x = 2$
La ecuación de la recta tangente viene dada por:
$y - f(a) = f'(a)(x - a)$
Calculamos la derivada de la función:
$f'(x) = \frac{1}{x+1}$, $f'(2) = 0{,}333$, $f(2) = 1{,}098$
La ecuación de la recta tangente será:
$y - 1{,}098 = 0{,}333(x - 2) \to y = 0{,}333x - 1{,}764$
La ecuación normal viene dada por:
$y - 1{,}098 = \frac{-1}{0{,}33}(x - 2) \to y = -3x + 7{,}098$
b) $f(x) = \sqrt{x - 2}$ en $x = 6$
La ecuación de la recta tangente viene dada por:
$y - f(a) = f'(a)(x - a)$
Calculamos la derivada de la función:
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$
$f'(6) = \frac{1}{4}$ $f(6) = 2$
La ecuación de la recta tangente será:
$y - 2 = \frac{x-6}{4} \to y = \frac{x+2}{4}$
La ecuación normal viene dada por:
$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$
Si sustituimos por los valores obtenidos anteriormente:
$y - 2 = -4(x - 6) \to y = -4x + 26$
c) $f(x) = 2e^x$ en $x = 0$
La ecuación de la recta tangente viene dada por:
$y - f(a) = f'(a)(x - a)$
Calculamos la derivada de la función:
$f'(x) = 2e^x$ $f'(0) = 2$ $f(0) = 2$
La ecuación de la recta tangente será:
$y - 2 = 2(x - 0) \to y = 2x + 2$
La ecuación normal viene dada por: $y - 2 = \frac{-1}{2}(x - 0) \to y = \frac{-x}{2} + 2$
d) $f(x) = \ln(x + 1)$ en $x = 0$
La ecuación de la recta tangente viene dada por:
$y - f(a) = f'(a)(x - a)$
Calculamos la derivada de la función: $f'(x) = \frac{1}{x+1}$
$f'(0) = 1$ $f(0) = 0$
La ecuación de la recta tangente será:
$y - 0 = 1(x - 0) \to y = x$
La ecuación normal viene dada por: $y = -x$

Ejercicio 29

$y_t = 8x - 22$; $y_n = -\frac{x}{8} + \frac{19}{8}$

Ejercicio 30

a) $y = 2\cdot(x - 1)$; b) $y = 2x + 4$;
c) $y = 2x - 9$; d) $y = 2x - 1{,}69$

	$x = 0$	$x = 2$
$f'(x)$	–	+
$f(x)$	↘	↗

Por tanto, *f(x)* es decreciente en $(-\infty, 3/2)$ y creciente en $(3/2, +\infty)$

b) $f(x) = x^2 - 4$

$f'(x) = 2x \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$

	$x = -1$	$x = 1$
$f'(x)$	–	+
$f(x)$	↘	↗

Por tanto, *f(x)* es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$.

c) $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$

	$x = -1$	$x = 1$
$f'(x)$	+	+
$f(x)$	↗	↗

Por tanto, *f(x)* es creciente para toda *x*.

d) $f(x) = x^4$

$f'(x) = 4x^3 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$

	$x = -1$	$x = 1$
$f'(x)$	–	+
$f(x)$	↘	↗

f(x) es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$.

e) $f(x) = x^3 - 12x$

$$f'(x) = 3x^2 - 12 \rightarrow f(x) = 0 \rightarrow x = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

	$x = -3$	$x = 0$	$x = 3$
$f'(x)$	+	–	+
$f(x)$	↗	↘	↗

f(x) es decreciente en $(-2, 2)$ y creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

f) $f(x) = 4x - 80$

$f'(x) = 4f'(x) > 0$ para todo $D(f)$ y, por lo tanto, la función es creciente en todo $D(f)$.

g) $f(x) = 2 \cdot \ln x \;\; f'(x) = \frac{2}{x}$

El dominio de una función logarítmica con base mayor que 1 es $D(f) = (0, +\infty)$. Para todo este intervalo, su derivada es positiva, de modo que la función es creciente para todo su dominio.

h) $f(x) = x^5$

$f'(x) = 5x^4 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$

	$x = -1$	$x = 1$
$f'(x)$	+	+
$f(x)$	↗	↗

Por tanto, *f(x)* es creciente para todo *x*.

MÁS A FONDO

Ejercicio 32 a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

$f'(x) = 2x - 3 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = 3/2$

	$x = 0$	$x = 2$
$f'(x)$	–	+
$f(x)$	↘	↗

La función pasa de decrecer a crecer en $x = 3/2$; por tanto, es un mínimo.

b) $f(x) = x^2 - 4$

$f'(x) = 2x \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$

	$x = -1$	$x = 1$
$f'(x)$	–	+
$f(x)$	↘	↗

La función pasa de decrecer a crecer en $x = 0$; por tanto, es un mínimo.

c) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

	$x = -0,5$	$x = 0,5$	$x = 2$
$f'(x)$	+	–	+
$f(x)$	↗	↘	↗

La función pasa de crecer a decrecer en $x = 0$ y, por tanto, es un máximo, y de decrecer a crecer en $x = 1$ que es un mínimo.

Solucionario

$f'(x) = 3x^2 - 12 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

	$x = -3$	$x = 0$	$x = 3$
$f'(x)$	+	–	+
$f(x)$	↗	↘	↗

La función pasa de crecer a decrecer en $x = -2$ y, por tanto, es un máximo, y de decrecer a crecer en $x = 2$, que es un mínimo.

e) $f(x) = x^2 - 2$

$f'(x) = 2x \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$

	$x = -1$	$x = 1$
$f'(x)$	–	+
$f(x)$	↘	↗

La función pasa de decrecer a crecer en $x = 0$ que, por tanto, es un mínimo.

f) $f(x) = 3x - 20$

$f'(x) = 3$

Como $f'(x) > 0$ para todo $D(f)$, la función no presenta ningún extremo.

Ejercicio 33

a) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{3 - x^3} = 0$

b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{6 - x}{2 - x} = 1$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{6 - x}{2 - x} = 1$

c) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{6x^4 + 1}{2x^4 + 1} = \frac{6}{2} = 3$

d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{-6x^4 + 1}{2x^3 + 1} = \lim_{x \to +\infty} (-3x) = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{-6x^4 + 1}{2x^3 + 1} = \lim_{x \to -\infty} (-3x) = +\infty$

a) $\lim_{x \to 0} x \cdot 3^{x-1} = \frac{0}{3} = 0$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{2x+2} = \frac{0}{2} = 0$

c) $\lim_{x \to 2} \frac{x - 1}{\sqrt{2 - x} + x} = \frac{1}{2}$

d) $\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + x^2 - 8x - 12} = \lim_{x \to -2} \frac{\cancel{(x+2)}\cancel{(x+2)}(x+1)}{\cancel{(x+2)}\cancel{(x+2)}(x-3)} = \frac{1}{5}$

e) $\lim_{x \to 5} \sqrt{(x^2 - 16)^{x-5}} = 9^{0/2} = 1$

f) $\lim_{x \to -2} \left(\frac{x - 2}{2 - x} \right)^{\frac{-4}{x}} = (-1)^2 = 1$

Ejercicio 35

a) $\lim_{x \to 2} \left(\frac{h(x)}{f(x)} \right) = \lim_{x \to 2} \frac{1}{(x^2 - 9) \cdot (x^2 - 1)} = -\frac{1}{15}$

b) $\lim_{x \to 4} (f(x) + g(x)) =$

$= \lim_{x \to 4} (x^2 - 1) + \lim_{x \to 4} \sqrt{2x - 8} = 15 + 0 = 15$

c) $\lim_{x \to 2} (f(x) - g(x)) =$

$= \lim_{x \to 2} (x^2 - 1) + \lim_{x \to 2} \sqrt{2x - 8} = 15 + \sqrt{-4}$

No existe.

d) $\lim_{x \to -1} (f(x) \cdot j(x)) =$

$= \lim_{x \to -1} \frac{(x^2 - 1)\left((2 + x)^2 - 4\right)}{x} = 0$

e) $\lim_{x \to 6} (f(x) \cdot h(x)) = \lim_{x \to 6} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 9} = \frac{35}{27}$

f) $\lim_{x \to 2} [j(x)]^{f(x)} = \lim_{x \to 2} \left[\frac{(2 + x)^2 - 4}{x} \right]^{x^2-1} =$

$= 6^3 = 216$

Ejercicio 36.

La pendiente es 4, y la ecuación de la recta y = 4x + 9

Ejercicio 37.

a) v (0) = $f'(0)$ = 3 m/s b) v (2) = –16,6 m/s c) v(t) = 3 – 9,8t d) a(0) = v′(0) = –9,8 m/s^2

e) a (t) =v'(t) = –9,8 m/s^2

f) $f'(x) = 3 - 9{,}8t$ $f'(x) = -9{,}8$ $fn(x) = 0$

Solucionario

Los puntos de corte de la función con el eje de abscisas verifican:

$f(x) = 0 \rightarrow x\,2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

Por tanto, procedemos a buscar la recta tangente en los puntos en los que la función *f(x)* corta el eje de abscisas: $f'(x) = 2x + 1$

$f'(-2) = -3 \qquad f'(1) = 3$

Cuando $x = 1$, la recta tangente de *f(x)* será: $y - 0 = 3(x - 1) \rightarrow y = 3x - 3$

Cuando $x = -2$, la recta tangente de *f(x)* será: $y - 0 = -3(x + 2) \rightarrow y = -3x - 6$

Ejercicio 39

Sabemos que esta pendiente coincide con $f'(1/2)$

Calculamos $f'(x)$: $f'(x) = 3x^2 + 1$

Luego:

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{3}{4} + 1 = \frac{3+4}{4} = \frac{7}{4}$$

Por otro lado, sabemos que pasa por el punto $\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

Calculamos $f\left(\frac{1}{2}\right) : f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - 2 = -\frac{11}{8}$

Así pues, la recta tangente a la curva de ecuación

$f(x) = x^3 + x - 2$ en $x = 1/2$ es:

$$y - \left(-\frac{11}{8}\right) = \frac{7}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{7}{4}x - \frac{7}{8} - \frac{11}{8}$$

$$\Rightarrow y = \frac{7}{4}x - \frac{18}{8}$$

$$\Rightarrow y = \frac{7}{4}x - \frac{9}{4}$$

Ejercicio 40

$$f(x) = \frac{x-2}{x+1}$$

La ecuación de la recta tangente viene dada por:

$y - f(a) = f'(a)(x - a)$

Calculamos la derivada de la función:

$f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2} \qquad f(2) = 0$

La ecuación de la recta tangente será:

$y - 0 = \frac{1}{3}(x - 2) \rightarrow y = \frac{x}{3} - \frac{2}{3}$

La ecuación normal, si sustituimos por los valores obtenidos anteriormente, será:

$y - 0 = \frac{-1}{\frac{1}{3}}(x - 2) \rightarrow y = -3x + 6$

Ejercicio 41

a) $f(x) = 10\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{10}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{\sqrt{x}}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3} \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$

c) $f(x) = \sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} =$

$= \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}} = x^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-1} =$

$= -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} = \frac{-3}{2x^2\sqrt{x}}$

Ejercicio 42

a) $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2}$

$a(c) = \sqrt{9 + c^2} \rightarrow a'(c) = \frac{c}{\sqrt{9+c^2}}$

b) $a'(c) = 0 \rightarrow c = 0$

D (f) = [0, +∞) a(1) > 0; por tanto, la función es creciente en todo D (f).

Solucionario

Ejercicio 43

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$

$f'(x) = 3x^2 + 4x + 1 \to f'(x) = 0 \to$

$\to x = \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$

	$x = -2$	$x = -1/2$	$x = 0$
$f'(x)$	+	–	+
$f(x)$	↗	↘	↗

La función $f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1) \cup (-1/3, +\infty)$ y decreciente en $(-1, -1/3)$, y presenta un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = -1/3$.

b) $f(x) = \operatorname{sen} x\ (2x),\ x \in [0, \pi]$

$f'(x) = 2\cos(2x) \to f'(x) = 0 \to$

$x_1 = \pi/4;\ x_2 = 3\pi/4$

	$x = \pi/8$	$x = \pi/2$	$x = 7\pi/8$
$f'(x)$	+	–	+
$f(x)$	↗	↘	↗

La función $f(x)$ es creciente en $(0, \pi/4) \cup (3\pi/4, \pi)$ y decreciente en $(\pi/4, 3\pi/4)$, y presenta un máximo en $x = \pi/4$ y un mínimo en $x = 3\pi/4$.

c) $f(x) = e^{x^2-1}$

$f'(x) = 2x \cdot e^{x^2-1} \to f'(x) = 0 \to x = 0$

	$x = -1$	$x = 1$
$f'(x)$	–	+
$f(x)$	↘	↗

La función $f(x)$ es creciente en $(0, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, 0)$, y presenta un mínimo en $x = 0$.

d) $f(x) = (x-2)^3$

$f'(x) = 3(x-2)^2$

$f'(x) > 0$ para cualquier valor de x; por tanto, la función es creciente en todo $D(f)$. A pesar de que la derivada de $f(x)$ vale 0 para $x = 2$, no presenta ningún máximo ni mínimo en este punto, sino un punto de inflexión.

e) $f(x) = 0{,}5x^2 + 2$

$f'(x) = x \to f'(x) = 0 \to x = 0$

	$x = -1$	$x = 1$
$f'(x)$	–	+
$f(x)$	↘	↗

La función $f(x)$ es creciente en $(0, +\infty)$ y decreciente en
$(-\infty, 0)$, y presenta un mínimo en $x = 0$.

f) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

$f'(x) = \frac{2}{x^2+1} \to f'(x) = 0 \to x = 0$

	$x = -1$	$x = 1$
$f'(x)$	–	+
$f(x)$	↘	↗

La función $f(x)$ es creciente en $(0,+\infty)$ y decreciente en $(-\infty, 0)$, y presenta un mínimo en $x = 0$.

Ejercicio 44.

a) $f(t) = 2t^2 - 5t + 1$

$f'(t) = 4t - 5 \to f'(t) = 0 \to t = 5/4$

	$x = 0$	$x = 2$
$f'(x)$	–	+
$f(x)$	↘	↗

Decreciente en $(-\infty, 5/4)$ y creciente en $(5/4, +\infty)$

$g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$

$g'(x) = x^3 - x \to g'(x) = 0 \to t = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -1 \end{cases}$

	$x = -2$	$x = -0{,}5$	$x = 0{,}5$	$x = 2$
$f'(x)$	–	+	–	+
$f(x)$	↘	↗	↘	↗

Creciente en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

b) En la función $f(x)$, el punto $x = 5/4$ es un mínimo.

En la función $g(x)$, el punto $t = 1$ es un mínimo.

Ejercicio 45 $f(x) = x \cdot e^x$

a) $f'(x) = e^x(x + 1) \to f'(x) = 0 \to x = -1$

	$x = -2$	$x = 0$
$f'(x)$	–	+
$f(x)$	↘	↗

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty,-1)$ y creciente en $(-1, +\infty)$.

b) $f(-1) = -0{,}37$. $f(x)$ presenta un mínimo en $(-1, -0{,}37)$.

Solucionario

Ejercicio 46. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

	$x = -2$	$x = -1/2$	$x = 1/2$	$x = 2$
$f'(x)$	–	+	–	+
$f(x)$	↘	↗	↘	↗

Crece en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

b) La función $f(x)$ presenta un máximo en $x = 0$ que corresponde al punto (0,1), y mínimos en $x = -1$ y $x = 1$ que corresponden a los puntos (–1, 0) y (1, 0) respectivamente.

Ejercicio 47. $f(x) = x^2 . \text{sen } x \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = (x^2)' . \text{sen } x + x^2 . (\text{sen } x)' =$

$= 2x . \text{sen } x + x^2 \cos x$

b) $f(x) = x . \ln x \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = x' . \ln x + x . (\ln x)' =$

$= 1. \ln x + x . (1/x) = \ln x + 1$

Ejercicio 48

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(x^2)' \cdot (x^2 - 4) - x^2 \cdot (x^2 - 4)'}{(x^2 - 4)^2} =$$

$$= \frac{2x\,(x^2 - 4) - x^2\,(2x)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{\cancel{2x^3} - 8x - \cancel{2x^3}}{(x^2 - 4)^2} =$$

$$= \frac{-8x}{(x^2 - 4)^2}$$

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{e^x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(\sqrt{x})' \cdot e^x - \sqrt{x} \cdot (e^x)'}{(e^x)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\, e^x - \sqrt{x} \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x - 2\,x\,e^x}{2\sqrt{x}\; e^{2x}} =$$

$$\frac{\cancel{e^x}(1 - 2x)}{(e^x)^{\cancel{2}}\; 2\sqrt{x}} = \frac{1 - 2x}{2e^x \sqrt{x}}$$

Ejercicio 49

$f'(x) = 2x - 7$

Así:

$f'(-2) = 2(-2) - 7 = -4 - 7 = -11$

$f'(2) = 2 \cdot 2 - 7 = 4 - 7 = -3$

$f'(10) = 2 \cdot 10 - 7 = 20 - 7 = 13$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 50. a) $f(x) = \dfrac{2}{x}$ en $x = 1$

$f'(x) = -\dfrac{2}{x^2}$ $\quad f(1) = 2$ $\quad f'(1) = -2$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente en $x = 1$ de $f(x)$ es: $\boldsymbol{y - 2 = -2(x - 1) \rightarrow y = -2x + 4}$

b) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ en $x = 3$

$f'(x) = 2x - 2$ $\quad f(3) = 6$ $\quad f'(3) = 4$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente en $x = 3$ de $f(x)$ es: $\boldsymbol{y - 6 = 4(x + 1) \rightarrow y = 4x + 10}$

c) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ en $x = -1$

$f'(x) = 2x - 2$ $\quad f(-1) = 2$ $\quad f'(-1) = -4$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente en $x = -1$ de $f(x)$ es: $\boldsymbol{y - 2 = -4(x + 1) \rightarrow y = -4x - 2}$

d) $f(x) = \ln x$ en $x = 1$

$f'(x) = 1/x$ $\quad f(1) = 0$ $\quad f'(1) = 1$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente en $x = 1$ de $f(x)$ es: $\boldsymbol{y - 0 = 1(x - 1) \rightarrow y = x - 1}$

e) $f(x) = \cos x$ en $x = \pi$

$f'(x) = -\text{sen } x$ $f(\pi) = -1$ $f''(\pi) = 0$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente en $x = \pi$ de $f(x)$ es: $y + 1 = 0 \rightarrow y = -1$

Ejercicio 51

a) $f(x) = 3x^2 + \text{sen } x$

$f'(x) = 6x + \cos x$

b) $f(x) = \ln x \cdot (x^2 + 2x + 1)$

$f'(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x} + (2x + 2) \ln x$

c) $f(x) = \dfrac{x \cos x}{\sqrt{x+1}}$

$$f'(x) = \frac{(\cos x - x \,\text{sen}\, x)\sqrt{x+1} - \dfrac{x \cos x}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}$$

d) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{x+1}}$

$$f'(x) = \frac{-\text{sen}\, x\sqrt{x+1} - \dfrac{\cos x}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}$$

Página 119

Solucionario

Ejercicio 52. a) $f(x) = \cos(\pi x)$

$f'(x) = -\pi\,\mathrm{sen}(\pi x)$; $f'(x) = 0 \rightarrow x = k$

$f(x)$ es creciente en $(2k + 1, 2k + 2)$ y decreciente en $(2k, 2k + 1)$.

b) $f(x) = x^3 - 1$

$f'(x) = 3x^2 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$

La función es creciente en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

	$x = -1$	$x = 1$
$f'(x)$	+	+
$f(x)$	↗	↗

c) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

$f'(x) = 2x - 3 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = 3/2$

La función crece en $(3/2, +\infty)$ y decrece en $(-\infty, 3/2)$

	$x = 1$	$x = 2$
$f'(x)$	–	+
$f(x)$	↘	↗

d) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$

La función decrece en $(0, +\infty)$ y crece en $(-\infty, 0)$.

	$x = -1$	$x = 2$
$f'(x)$	+	–
$f(x)$	↗	↘

e) $f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x$

$f'(x) > 0$ para cualquier valor de x y, por lo tanto, $f(x)$ es siempre creciente.

f) $f(x) = \ln x - x$

$f'(x) = 1/x - 1 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = 1$

La función decrece en $(1, +\infty)$ y crece en $(0, 1)$.

	$x = 0{,}5$	$x = 2$
$f'(x)$	+	–
$f(x)$	↗	↘

Ejercicio 53. Aplicaremos que si $f(x) = (g \circ h)(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$

a) $f(x) = 8x + 12$;

b) $g(x) = 5 \cos 5x$;

c) $h'(x) = -\mathrm{sen}\, x.\, e^{\cos x}$

d) $i'(x) = \frac{2x \cos x^2}{\mathrm{sen}\, x^2}$

e) $j'(x) = 6x^2 \cos x^3 (-\mathrm{sen}\, x^3)$

f) $k'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\mathrm{sen}\, x}}$

Ejercicio 54

$f(x) = x^2 - 7x + 1$, $\quad f'(x) = 2x - 7$

$f'(-3) = -13$ $f'(4) = 1$ y $f'(-5) = -17$

Solucionario

Ejercicio 55. f'(x) = (sen x)' → cos x + sen x → (cos x)' =

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^2-\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=0$$

– Como *f'(x)* es la pendiente de la recta tangente a *f(x)* en xy $f'(\frac{\pi}{4})$ la pendiente de la tangente a *f(x)* =cos x sen x en $\frac{\pi}{4}$ es 0, y por lo tanto, esta es paralela al eje de abscisas.

Ejercicio 56. La pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f(x)* = x · ln x en x = 1 es *f'*(1).
Puesto que se tiene: *f'*(1) = ln 1 + 1 = 0 + 1 = 0
Sabemos, por otro lado, que esta recta pasa por (1, f(1)) = (1, 1 · ln 1) = (1, 0). Así, la ecuación de esta recta es: y – 0 = 1(x – 1) ⇔ y = x – 1

Ejercicio 57. a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$
f'(x) = 2x – 3 → *f'(x)* = 0 →
→x = 3/2 *f*(3/2) = –1/4
f(x) tiene un extremo en (3/2, –1/4).
b) *f(x)* = sen (πx)
$f'(x) = \pi \cos(\pi x) \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm 2k}{2}$
Los valores de estos extremos serán 1 o –1 alternativamente.
La función tiene infinitos extremos en $\left(\frac{1\pm 4k}{2}, 1\right)$ y en $\left(\frac{-1\pm 4k}{2}, -1\right)$

c) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$

$$f'(x)=\frac{-(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}\rightarrow f'(x)=0\rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

f(–1/2) = 4/3

La función tiene un extremo en (–1/2, 4/3).
d) *f(x)* = x · ln x
f'(x) = ln x + 1 → *f'(x)* = 0 → x = 1/e
f(1/e) = –1/*e*
La función tiene un extremo en (1/*e*, –1/*e*).

Ejercicio 58. a) Será positiva en (–∞, 1) ∪ (5,+∞), ya que la función es creciente en ese intervalo. Será negativa en (1, 5), donde la función es decreciente.
b) Será positiva en (4*n* – 1) π/4, (4*n* + 1) π /4, ya que la función es creciente en ese intervalo. Será negativa en (4*n* – 3) π/ 4, (4*n* – 1) π/4, ya que es decreciente en ese intervalo.
c) Será positiva en (0, 2), ya que es creciente en ese intervalo y nula en (2, 5) porque se mantiene constante.
d) Será positiva en (0, +∞), ya que es creciente en ese intervalo.

Ejercicio 59

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+4x^2-18}{x^4+3x-6}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2-5x-18}{3x-6}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{3}x=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+2x}{2x^2}=\dfrac{3}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+2x}{500x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{500}=+\infty$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2}}=1$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{x}:\dfrac{x-1}{x^2+5}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+10}{x^2-x}=2$

g) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^5-4x^3}{2x^2-8}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(x^2-4)x^3}{(x^2-4)2}=-4$

h) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^2+4x+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+2)^2(x+1)}{(x+2)^2}=-1$

Ejercicio 60
a) El beneficio es mínimo en 1 año.
b) El valor de este beneficio es de $ 4000.

Solucionario

a) $f(x) = \operatorname{tg} 3x \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) =$$

$[f = h \circ g\,;\ h(x) = \operatorname{tg} x\,;\ g(x) = 3x]$

$$= \frac{1}{\cos^2 3x} \cdot 3 = \frac{3}{\cos^2 3x}$$

(ejercicio 34)

b) $f(x) = e^{x^2} \cdot \operatorname{sen} 3x \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x\, e^{x^2} \operatorname{sen} 3x + e^{x^2}\, 3 \cos 3x =$$

$$= e^{x^2} (2x \operatorname{sen} 3x + 3 \cos 3x)$$

<u>Ejercicio</u> 62. a) $f(x) = x^2 - 4$ Vértice: $x_{\text{vértice}} = 0$

$f(0) = -4$ $f'(2) = 2 > 0$

f(x) tiene el vértice en (0, –4); es un mínimo.

b) $f(x) = x^2 - 4x$ $x_{\text{vértice}} = 2$

$f(2) = -4$ $f'(2) = 2 > 0$

f(x) tiene el vértice en (2, –4); es un mínimo.

c) $f(x) = x^2 - 4x + 4$ $x_{\text{vértice}} = 2$

$f(2) = 0$ $f'(2) = 2 > 0$

f(x) tiene el vértice en (2, 0); es un mínimo.

d) $f(x) = (x + 3)^2$ $x_{\text{vértice}} = -3$

$f(-3) = 0$ $f'(-3) = 2 > 0$.

f(x) tiene el vértice en (–3, 0); es un mínimo.

e) $f(x) = 4x^2 - 16$ $x_{\text{vértice}} = 0$

$f(0) = -16$ $f'(0) = 8 > 0$

f(x) tiene el vértice en (0, –16); es un mínimo.

f) $f(x) = x^2 + x - 6$ $x_{\text{vértice}} = -1/2$

$f(-1/2) = -25/4$ $f'(-1/2) = 2 > 0$

f(x) tiene el vértice en (–1/2, –25/4); es un mínimo.

g) $f(x) = -2(x + 3)^2 - 8 = -2x^2 - 12x - 26$ $x_{\text{vértice}} = -3$

$f(-3) = -8$ $f'(-3) = -4 < 0$

f(x) tiene el vértice en (–3, –8); es un máximo.

h) $f(x) = -x^2 + 3(x + 2) - 1 = -x^2 + 3x + 5$ $x_{\text{vértice}} = 3/2$

$f(3/2) = 29/4$ $f'(3/2) = -2 < 0$

f(x) tiene el vértice en (3/2, 25/4); es un máximo.

<u>*Ejercicio 63*</u>. Dado que nos dicen que su vértice está en (2, 1), podemos deducir que:

$f'(2) = 0 \rightarrow b = -4$

$f(2) = 1 \rightarrow c = 5$

<u>*Ejercicio 64*</u>. a) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 3 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

Derivamos la función:

$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$. Por tanto, la función no tiene ningún extremo; es creciente en el intervalo $(-\infty, 1] \cup (3, \infty)$ y constante en (1, 3].

b) $f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 & si\ x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Derivamos la función:

$f'(x) = \begin{cases} -2x + 2 & si\ x \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Analizamos la función por partes:

– $f'(x) = -2x + 2$ si $x \leq 0$; en este intervalo $f'(x)$ es siempre positiva, de modo que la función será creciente.

– $f'(x) = 1/2\,x$ si $x > 0$, para cualquier valor $f'(x)$ será positiva y, por tanto, *f(x)* creciente.

La función es creciente y no presenta extremos

Solucionario

Ejercicio 65. Los ingresos están dados por la función: $I(x) = (50 + x)(200 – 2x)$ y los gastos por $G(x) = (200 – 2x)40$
Luego el beneficio se obtiene de restar gastos de los ingresos, es decir:
$B(x) = I(x) – G(x)$
$B(x) = (200 – 2x)(x + 10) = –2x^2 + 180x + 2000$
Se halla el valor de x:
$B'(x) = –4x + 180 \rightarrow –4x= –180\rightarrow x = 45$, punto máximo
Luego: B(45) = ¢ 6050, que equivale a $ 60,50
Ejercicio 67. $x (t) = 5t^2 + 2t – 2$
a) $v (t) = x'(t) = 10t + 2 \rightarrow v (0) = 2$ m/s
b) v (3) = 32 m/s
c) $a (t) = v'(t) = 10 \rightarrow a (0) = 10$ m/s^2
d) a (10) = 10 m/s^2
Ejercicio 68. x: temperatura en ºC, y
$Q(x)$: producción de frutillas en kg
Simplificando la expresión: $Q(x) = (x + 1)^2(32 – x)$, se obtiene:
$(x^2 + 2x + 1)(32 – x) = 32x^2 – x^3 + 64x – 2x^2 + 32 – x =$
$= –x^3 + 30x^2 + 63x + 32$
Para calcular la temperatura óptima, la función debe tener un máximo y para ello calculamos la derivada de la función, pues $Q'(x) = 0$
$Q'(x) = –3x^2 + 60 x + 63$
$Q'(x) = x^2 – 20x – 21\rightarrow x^2 – 20x – 21 = 0 \rightarrow$
$(x – 21)(x + 1) = 0$
X = 21, máximo x = –1
a) La temperatura óptima a mantener en el invernadero es de 21 ºC.
b) Si x = 21, entonces se reemplaza en la expresión $Q(x) = (x + 1)^2(32 – x)$
$Q(x) = (21 + 1)^2(32 – 21) = 484 . 11 = 5324$ kg
La producción de frutilla que se obtendría es 5324 kg.
Ejercicio 69. El número de árboles que se plantan es x. Por tanto, el número de frutos sería:
$f(x) = (24 + x) (600 – 15x) = –15x^2 + 240x + 14 400$
Buscamos x para que $f(x)$ sea máxima: $f'(x) = –30x + 240$
$f'(x) = 0 \rightarrow –30x + 240 = 0 \rightarrow x = 8$
En x = 8 hay máximo. (Como $f(x)$ corresponde a una parábola con las ramas hacia abajo, en x = 8 está el máximo absoluto).
Por tanto, se deben plantar 8 árboles. Así, habrá un total de 24 + 8 = 32 árboles, que producirán 15 360 frutos.
Ejercicio 70. $c = 100\,000 + 1500q + 0,2q^2$
El costo promedio por unidad se calcula dividiendo el costo total entre el número de unidades producidas. $C'(q) = –100\,000q^{-2} + 0,2$
Si f' se iguala a 0, obtenemos: $q^2 = 500\,000$
q = 707,11 (unidades)
Por tanto, un mínimo relativo ocurre para f cuando q = 707,11. Este costo promedio mínimo por unidad es $ 1782,84

Ejercicio 71 a) 42 000 unidades b) $ 552
c) $ 8 470 000
Ejercicio 72. La función que tenemos que minimizar es el área del depósito: $A = x^2 + 4xy$
Con la condición de que el volumen $V = x^2 y$ sea de 4000 litros.
$x^2 y = 4000 \Rightarrow y = \frac{4000}{x^2}$, por tanto,
$A=x^2 + 4x.\frac{4000}{x^2}$ $A=x^2 + \frac{16000}{x}$(función a minimizar)
$A = x^2 + 1600x^{-1}$;
$A' = 2x –1 . 16000x^{-2} = 2x – \frac{16000}{x^2} = \frac{2x^3-16000}{x^2}$
Si hacemos $A' = 0$, $2x^3 - 16000 = 0 \Rightarrow$
$x^3 = 8000 \Rightarrow x = 20$
para $x = 20$ la superficie es mínima.
Si $x = 20$, $y = \frac{4000}{20^2} = 10$ luego la caja debe tener *20 dm* de lado y *10 dm* de altura.
Ejercicio 73
El tiempo en que la piedra alcanza su altura máxima es 4 s y el valor de esta altura es de 3 metros.
Ejercicio 74 La altura máxima que alcanza la pelota es de 3600 metros, y la alcanza en 120 s.
Ejercicio 75. 5/3 dm

Página 124

Solucionario

Para finalizar…

Ejercicio 1. TVM[–1,0]=$\frac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}=-1$

TVM[2,5]=$\frac{f(5)-f(2)}{5-2)}=7$

Ejercicio 2 Sea *m* la pendiente de la recta secante a la gráfica de *f(x)* por *x* = 0 y *x* = 2. La pendiente coincide con TVM [0,2] de $f(x) = 3x^2 - 2x + 9$.

m = TVM [0,2] = 4

Además, la recta que buscamos pasa por (0, *f*(0)) = (0, 9). Así, la ecuación de esta es:

***y* − 9 = 4 *x* ⇔ *y* = 4 *x* + 9**

Ejercicio 3 Sabemos que *x* + *y* = 50 y que la función que nos proporciona el valor del material es $V = x^2 + y^2$; por tanto, vamos a hacer que la función dependa únicamente de la variable *x*:

$V(x) = 2x^2 - 100x + 50^2$

Derivamos la función e igualamos la derivada a 0 para hallar su mínimo:

V'(x) = 4*x* – 100 = 0 → *x* = 25

Comprobamos que el valor obtenido es un mínimo: *V'*(0) < 0 *V'*(50) > 0

Una vez comprobado que el valor de *x* es un mínimo, sustituimos para obtener el valor de y:

***y* = 50 – *x* = 50 – 25 = 25**

Ejercicio 4 $f(x) = x^2 - 2x + 4$

a) $TVM_{[2,3]} f(x) = 3$ b) $TVM_1 f(x) = 0$

c) *f'(x)* = 2x – 2 *f'*(0) = –2 *f*(0) = 4

Por tanto, la ecuación de la recta tangente será:

y – 4 = –2(*x* – 0) → *y* = –2*x* + 4

d) La ecuación de la recta normal: y = 0,5x + 4

e) *f'(x)* = 2x – 2 *f''(x)* = 2 *fn(x)* = 0 para cualquier *n* > 2.

f) La función *f(x)* crece en (1, +∞) y decrece en (−∞, 1).

g) *f''*(1) = 2 > 0 → *x* = 1 es un mínimo.

f(1) = 3 La función tiene un mínimo en (1,3).

Ejercicio 5

a) f(x) = 2*x* + 5; *f'* (*x*) = 2 > 0 ∀ *x* ∈ |R.

Así, *f(x)* creciente en |R, y por tanto, para *x* = 3, 5, 7, 9.

b) $g(x) = x^2 - 3x + 5$; *g'(x)* = 2x − 3

g'(3) = 2 · 3 − 3 = 6 − 3 = 3 > 0

Así, *g(x)* es creciente en x = 3

g'(5) = 2 · 5 − 3 = 10 − 3 = 7 > 0

Así, *g(x)* es creciente en x = 5

g'(7) = 2 · 7 − 3 = 14 − 3 = 11 > 0

Así, *g(x)* es creciente en x = 7

g'(9) = 2 · 9 − 3 = 18 − 3 = 15 > 0

Así, *g(x)* es creciente en x = 9

c) $h(x) = \frac{3}{x-1}$; $g'(x) = \frac{-3(1)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$

Observamos que $h'(x) < 0 \ \forall \ x \in D(h) = \mathbb{R} - \{1\}$.

Así, *h*(*x*) es decreciente en todo punto del dominio y, por tanto, en *x* = 3, 5, 7 y 9.

Ejercicio 6 *f(x)* $\frac{5}{3x-2}$

a) $TVM_{[1,2]} f(x) = -15/4$ b) $TVM_{[0,4]} f(x) = 3/4$

c) $TVM_1 f(x) = -15$ d) $TVM_1 f(x) = -3{,}75$

e) La recta tangente de *f(x)* en *x* = 0 vendrá dada por: $f'(x) = \frac{-15}{(3x-2)^2}$

$f'(0) = \frac{-15}{4}$ f(o) = –5/2

$y + \frac{5}{2} = \frac{-15}{4}(x-0) \rightarrow \boldsymbol{y = \frac{-15}{4}x - \frac{5}{2}}$

f) A partir de los valores obtenidos en el apartado anterior, podemos definir que la ecuación de la recta normal de *f(x)* en *x* = 0 será:

y + 5/2 = 4/15 (*x* − 0) → *y* = 4/15*x* −5/2

g) Para estudiar la continuidad de *f(x)* buscamos los puntos en los que el denominador se anula:

3*x* – 2 = 0 → *x* = 2/3

Por tanto, en el punto *x* = 2/3 la función *f(x)* no es continua ni derivable.

h) $f''(x) = \frac{90}{(3x-2)^3}$ i) Podemos observar que para cualquier valor de *x* siempre *f'(x)* < 0; por tanto, la función es decreciente para todo *D* (*f*).

Ejercicio7 a) $f(x) = x^3$ *f'(x)* = 0 → 6x = 0 → x = 0 *f*(0) = 0

El punto de inflexión de *f(x)* es (0, 0).

b) *f(x)* = sen x + cos x

$f'(x) = -\text{sen } x - \cos x = 0 \rightarrow x = \begin{cases} x_1 = 3\pi/4 \\ x_2 = 7\pi/4 \end{cases}$

c) $f(x) = x \cdot e^x$

$f'(x) = e^x(x+2) = 0 \rightarrow x = -2$

$f(-2) = -2e^{-2}$

El punto de inflexión de *f(x)* es $(-2, -2e^{-2})$.

Solucionario

– La maratón

• Respuesta sugerida:

El objetivo del enlace propuesto es ver la aplicación de las derivadas al cálculo de la variación de la velocidad en cada instante de tiempo de un corredor de maratón en carrera, y así saber los cambios que se producen en su rendimiento.

• Respuesta sugerida:

Mediante estos otros enlaces, los alumnos verán otras aplicaciones de la derivada en el campo de los deportes, relacionadas también en este caso con la velocidad.

– Economía y derivadas

• En primer lugar, determinamos la función coste promedio (coste por unidad producida):

$$c(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{5} + 2x + 300\right) = \frac{x}{5} + 2 + \frac{300}{x}$$

Función que derivamos para determinar el mínimo:

$$c'(x) = \frac{1}{5} - \frac{300}{x^2}$$

$$c'(x) = 0 \rightarrow \frac{1}{5} - \frac{300}{x^2} = 0 \rightarrow \frac{1}{5} = \frac{300}{x^2} \rightarrow$$
$$\rightarrow x^2 = 1500 \rightarrow x = 38{,}73 = 39$$

Por tanto, el nivel de producción con coste mínimo es de 39 unidades. Para este nivel de producción, el coste promedio c(x) es de 17,49 euros y el coste total C(x) de $ 677,46.

• Esta información es útil para que el empresario sepa el número de unidades con el que se obtiene un coste mínimo, de modo que pueda optimizar sus beneficios.

Página 125


ZONA

UD. 3

FUNCIONES Y LÍMITES

Teoría de los extremos

Uno de los conceptos que relaciona las derivadas con la geometría es la teoría de los extremos: la derivada en los máximos y mínimos de una función se anula. Así lo enunció el jurista y matemático francés Pierre de Fermat (1601-1665). También es conocido por su llamado último teorema de Fermat, que no fue resuelto hasta 1995.

La derivada y su notación

Las reglas del cálculo de las derivadas se deben al británico Isaac Newton (1642- 1727) y al alemán Gottfried Leibniz (1646-1716). Aunque sus trabajos coincidieron, mantenían cierta diferencia de criterios en aspectos como la manera de nombrar la derivada de una función; mientras que Newton la expresaba como $f(x)$, Leibniz lo hacía con $\frac{dy}{dx}$.

Años más tarde, el italiano Joseph Louis Lagrange (1736-1813) introdujo la notación $f'(a)$ para referirse a la derivada de una función en un punto.

La maratón

«Si quieres ganar, corre cien metros. Si quieres experimentar la vida, corre una maratón».

Esta afirmación la realizó el gran atleta y medallista olímpico de origen checo, [illegible] (1922-2000), más conocido como la [illegible]. La frase hace referencia a la experiencia vital que supone correr una carrera de este tipo, más allá de las victorias y marcas que se puedan conquistar.

Esta y otras pruebas deportivas pueden ser estudiadas matemáticamente a través de las derivadas; en el caso de la maratón, puede analizarse cómo varía la velocidad del atleta a lo largo de cada instante de dicha carrera. Accede a http://links.edebe.com/mx94x y conocerás en qué consiste la relación existente entre esta prueba deportiva y la derivación de funciones. Entra también en http://links.edebe.com/bdkxk y http://links.edebe.com/5ys para obtener más información sobre las aplicaciones de las derivadas en otros deportes.

Economía y derivadas

En economía, las derivadas también pueden resultar útiles, por ejemplo, para conocer a partir de qué nivel de producción los costes serán mínimos, sabiendo la función de los costes de fabricación. Supongamos que el coste de un producto viene dado por la función $C(x) = \frac{x^2}{5} + 2x + 300$, donde x es la cantidad de unidades producidas. ¿Qué nivel de producción tendrá un coste mínimo por unidad? ¿Cuál será dicho coste?

Economista...

Elaboraría un buen plan de optimización para mi empresa y la de mi familia, que garantice un exitoso proceso de producción, donde esté implícita la reducción de gastos y costos, y se priorice la calidad del producto, todo esto gracias a los conocimientos adquiridos mediante la aplicación de modelos matemáticos, como los estudiados en esta unidad.

125

Página 129

Solucionario

Ejercicio1. El intervalo correspondiente a la unión A U B es (–∞; +∞)

Ejercicio2. El resultado de $\sqrt[4]{4}\,.\,\sqrt{7^3}\,.\,\sqrt[6]{2}$ es la opción a) $7\sqrt[6]{2^5}.\sqrt{7}$

Ejercicio 3. El resultado es: $\frac{2+\sqrt{5}}{-3}$

Ejercicio 4. La representación corresponde al intervalo (–1, 2)

Ejercicio 5. a) $\sqrt[3]{5}\,.\,\sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{5^3} = 5$

b) $\frac{\sqrt[3]{x^2\,y^3}}{\sqrt[3]{xy}} = \sqrt[3]{\frac{x^2y^3}{xy}} = \sqrt[3]{x.y^2}$

c) $\left(\sqrt[3]{5^2}\right)^4 = 25\sqrt[3]{25}$ d) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^5}} = \sqrt[20]{x^3}$

Ejercicio 6. a) $\sqrt[3]{5}\,.\,\sqrt[3]{5^2} = \sqrt[4]{5}$ b) $3\sqrt{5}\,.\,2\sqrt[3]{25}$

c) $\sqrt[3]{a^3b}.\sqrt[6]{ab^4} = ab\sqrt[6]{a}$ d) $3\sqrt[4]{2}\,.\,\sqrt{8} = 6.\sqrt{5}$

e) $\frac{\sqrt[4]{x^3y^3}}{\sqrt[3]{xy}}$ f) $\frac{4\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$

g) $\frac{6\sqrt[3]{5}}{2\sqrt{10}}$ h) $\frac{\sqrt[5]{(a+b)^3}}{\sqrt{a+b}}$

i) $\sqrt[3]{x^2}.\frac{\sqrt[4]{xy}}{\sqrt{xy^3}}$

Ejercicio 7. a) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[12]{a}$ b) $\sqrt{\sqrt[3]{x^2\sqrt[5]{x^3}}}$

c) $\sqrt{n\sqrt[5]{n\sqrt[6]{n}}}$

Ejercicio 8. a) $\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ b) $\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = -2-\sqrt{3}$

c) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{2} = 2\sqrt[3]{4}$ d) $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt[4]{2^3}}{2}$

e) $\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{-1} = -2(\sqrt{2}-\sqrt{3})$

f) $\frac{x}{\sqrt[5]{x^2}} = \frac{x\sqrt[5]{x^3}}{x} = \sqrt[5]{x^3}$

Ejercicio 9. $\frac{2-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{3}{2-\sqrt{3}} = \frac{(2-\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{-2} - \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{3(2+\sqrt{3})}{-1} = \frac{(2-\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{-2} - \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{3(2+\sqrt{3})}{-1} = \frac{-51-26\sqrt{3}}{6}$

Ejercicio 10. a) [–3; +∞) b) [1/2; +∞)
c) (–∞; 2] d) [–2; +∞)

Ejercicio 11. $l = \frac{\sqrt{3}}{6}$; A = 5/12

Página 130

Solucionario

Ejercicio 14. a) $(2x^4 - 4x^3 - 5x + 3) : (x - 2)$

	2	–4	0	–5	3
2		4	0	0	–10
	2	0	0	–5	–7

$C(x) = 2x^3 - 5$ $R(x) = -7$

b) $\left(-x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - 4\right) : \left(x - \frac{5}{2}\right)$

	–1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	–4
$\frac{5}{2}$		$-\frac{5}{2}$	$-\frac{55}{12}$	$-\frac{295}{24}$
	–1	$-\frac{11}{6}$	$-\frac{59}{12}$	$-\frac{391}{24}$

$C(x) = -x^2 - \frac{11}{6}x - \frac{59}{12}$ $R(x) = -\frac{391}{24}$

Ejercicio 15. a) x ≤ 2/13 b) x ≥ 4 c) x ≤ 0 d) No tiene solución.

Ejercicio 17. a) (5, +∞) es solución.
Los extremos de los intervalos son solución, pues la desigualdad no es estricta, luego: *S* = (−∞, −4] U [5, +∞)
b) $9x^2 - 6x + 1 \leq 0$
El punto x = 1/3 es solución, puesto que la desigualdad no es estricta, luego:
S = {1/3}
c) $x^2 + x + 1 < 0$
S=Ø, o S= |R: 0 ∈ |R ⟶ $0^2 + 0 + 1 \not< 0$ ⟹ S=Ø
d) $\frac{x-3}{4} > (x-2)(x+7) + 17$ $S = \left(-\frac{15}{4}, -1\right)$

Ejercicio 18. En la tercera prueba pudo haber obtenido entre 8 y 9.

Ejercicio 19. $2x^2 > 1{,}28 \rightarrow x > 0{,}8$ m

Ejercicio 20. El número máximo de aprobados es de 14 estudiantes.

Ejercicio 21. a) 21 <x> 30 km/h
b) 31< x > 40 km/h c) x ≥ 40 km/h
d) x ≥ 90 km/h

Ejercicio 22. $\log(\sqrt{8+3\sqrt{7}} + \sqrt{8+3\sqrt{7}}) + \log(\sqrt{8+3\sqrt{7}} - \sqrt{8+3\sqrt{7}}) = \log\left(\sqrt{8+3\sqrt{7}}\right)^2 - (\sqrt{8+3\sqrt{7}}) = 1$

Solucionario

Ejercicio 23. $A_{cuadrado} = a^2$, $A_{triángulo} = \frac{b.h}{2}$

$h > \frac{2.a^2}{b}$

Ejercicio 24. De la venta de refresco han obtenido entre $ 450 y $ 525.

Ejercicio 25. x: longitud de un cateto, y 16 longitud del otro cateto

$A = \frac{16x}{2} = 8x$, luego $80\ cm^2 < 8x < 96\ cm^2 \rightarrow 10 < x < 12$

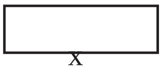
El otro cateto puede medir entre 10 y 12 cm.

Ejercicio 26. x: número de aprobados

35 – x: número de desaprobados

$3x < 2(35 - x)$ c$\rightarrow x < 14$

Ejercicio 27.



$x(x + 2) < 35 \rightarrow x^2 + 2x - 35 < 0$

$(x + 7)(x - 5) < 0 \rightarrow x < 5$

La altura del rectángulo puede ser 5 cm o menos.

Ejercicio 28. a) $\sqrt{5x^2} - \sqrt{80} = 0$

$5x^2 = 80 \rightarrow x = \pm 4$

b) $\sqrt{5x^2} = 2x \rightarrow 5x^2 = 4x^2$

$x^2 = 0 \rightarrow x = 0$

c) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0 \rightarrow$ aplicando la fórmula cuadrática se obtiene $x = \sqrt{2}$

Ejercicio 29. a) Redondeando a las milésimas los valores, tenemos que:

$A = (\sqrt{3 + \sqrt{5}})\ (\sqrt{4 - \sqrt{5}}) = 2{,}288 \cdot 1{,}328 = 3{,}038\ cm^2$

b) Desarrollamos el producto de radicales y redondeamos $\sqrt{5}$ a las milésimas:

$A = = (\sqrt{3 + \sqrt{5}})\ (\sqrt{4 - \sqrt{5}}) - \sqrt{(3 + \sqrt{5})(4 - \sqrt{5})} = \sqrt{7 + \sqrt{5}}$

$\sqrt{5} = 2{,}236\ 067... \approx 2{,}236 \Rightarrow A = \sqrt{7 + 2{,}236} = 3{,}039\ cm^2$

– Calculamos los errores absolutos para cada caso:

$\varepsilon_{a1} = \left|\sqrt{7 + \sqrt{5}} - 3{,}038\right| = 0{,}001\ 089\ 9\ ...$

$\varepsilon_{a2} = \left|\sqrt{7 + \sqrt{5}} - 3{,}039\right| = 0{,}000\ 089\ 9916$

$\Rightarrow \varepsilon_{a1} > \varepsilon_{a2}$

Por tanto, en el caso a) se comete un error absoluto más grande que en el caso b). Esto se debe a que, al simplificarse en el cálculo del apartado b) $3\sqrt{5}$, se ha reducido el error global.

Ejercicio 30. Aplicamos el teorema del resto, y que sabemos que $R(x) = 0$

$P(2) = 2^5 - 3 \cdot 2^3 + a \cdot 2^2 - 4 = 0 \rightarrow a = -1$

Ejercicio 31. a) La producción total es la suma de los centros *A* y *B*:

$(-4t^2 + 64t) + (-t^3 + 15t^2 + 2t) = -t^3 + 11t^2 + 66t$

b) $P(1) = -13 + 11 \cdot 12 + 66 \cdot 1 = 76$

c) $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = 76 + 168 + 270 + 376 = 890$

d) En la segunda, ya que $P(2) > P(1)$

Ejercicio 32

a) $P(t = 1\ s) = \frac{1 \cdot 9{,}8 \cdot 1^2}{2} = 4{,}9\ m$

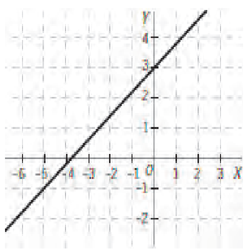
b) $P\left(t = \frac{1}{2}s\right) = \frac{1 \cdot 9{,}8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} = 1{,}225\ m$

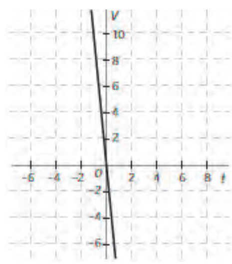
c) $P = 3800 - 1500 = 2300$

$P(t) = \frac{gt^2}{2} \rightarrow t = \sqrt{\frac{2P}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2300}{9{,}8}} = 21{,}67$

Ejercicio 33. a) $f(x) = 3 + 0{,}8x$

c) $V(t) = -9{,}8 \cdot t$





b)

No es una función.

Solucionario

Ejercicio 34 a) $f(x) = \frac{5}{x-3}$

Buscamos el punto donde se anula el denominador: $x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$

Por tanto: $D(f) = R - \{3\}$

Debido a que el numerador nunca puede ser 0, tampoco lo podrá ser $f(x)$. Por tanto:

$R(f) = R - \{0\}$

b) $f(x) = \sqrt{x - 2}$

El radicando siempre no puede ser negativo. Por lo tanto:

$x - 2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2$

$D(f) = [2,+\infty)$

Debido a que es una raíz, $f(x)$ solo puede tomar como valores 0 o valores positivos, $R(f) = [0, +\infty)$.

Ejercicio 35. *a)* Cualquier recta vertical $x = a$ que consideremos corta a la gráfica. Por tanto, el dominio de la función es $D(f) = |R$.

Una recta horizontal $y=b$ corta a la gráfica si $b \leq 2$. Por tanto, el recorrido de la función es $R(f) = (-\infty, 2]$

b) Una recta vertical $x = a$ corta a la gráfica si $-2 \leq a \leq 3$

Por tanto, el dominio de la función es $D(g) = [-2, 3]$

Una recta horizontal $y = b$ corta a la gráfica si $-3 \leq b \leq 2$. Por tanto, el recorrido de la función es $R(g) = [-3, 1]$.

c) Una recta vertical $x = a$ corta a la gráfica si $a < 0$, o bien, si $a \geq 2$. Por tanto, el dominio de la función es $D(h) = (-\infty, 0)$ _ $[2, +\infty)$.

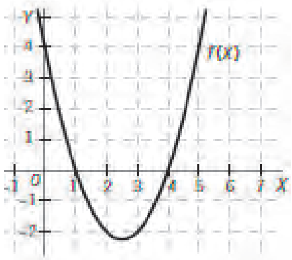
Cualquier recta horizontal $y = b$ que consideremos corta a la gráfica. Por tanto, el recorrido de la función es $R(h) = |R$.

d) Cualquier recta vertical $x = a$ que consideremos corta a la gráfica. Por tanto, el dominio de la función es $D(i) = |R$.

Una recta horizontal $y = b$ corta a la gráfica si $-2 \leq b \leq 2$. Por tanto, el recorrido de la función es $R(i) =[-2, 2]$.

Ejercicio 36. a) $f(x) = x^2 - 5x + 4$

Al ser una función polinómica $D(f) = R$. El vértice de la parábola se halla en $xv = x = \frac{-b}{2a} = \frac{5}{2}$ y corresponde a un mínimo absoluto, ya que $a > 0$. La función decrece en $(-\infty, 2{,}5)$ y crece en $(2{,}5, +\infty)$. La función corta los ejes en (0, 4), (1, 0), (4, 0).

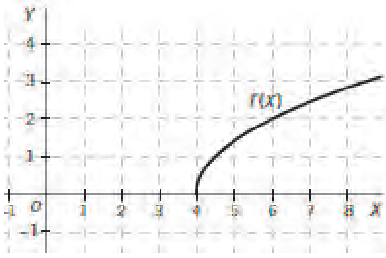


b) $f(x) = \sqrt{2x - 8}$

El radicando tiene que ser positivo o nulo: $2x - 8 \geq 0 \rightarrow x \geq 4$

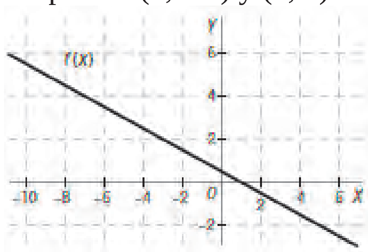
Por tanto, $D(f) = [4,+\infty)$. El recorrido de una raíz cuadrada simple es: $R(f) = [0,+\infty)$.

La función no presenta extremos relativos ni absolutos, y tiene puntos de corte en (4,0).



c) $f(x) = \frac{-x+1}{2}$

Debido a que es una función polinómica, sabemos que $D(f) = |R$ y $R(f) = |R$. La función es decreciente en todo su dominio y no presenta extremos absolutos ni relativos; corta los ejes en los puntos (0, 1/2) y (1, 0).

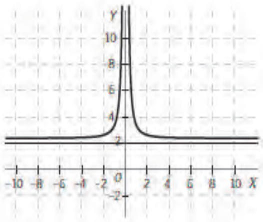


Solucionario

Ejercicio 37. Se dibuja un ángulo cualquiera. Se marcan divisiones iguales en cada uno de los dos lados, numeradas empezando en ambos casos por el vértice. Se unen los puntos cuyos valores suma una constante, por ejemplo 11, (se puede hacer con cualquier otro número).

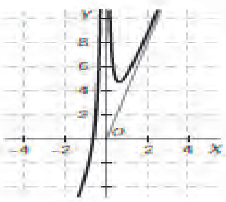
Ejercicio 38

a) $f(x) = 2 + \frac{1}{x^2}$



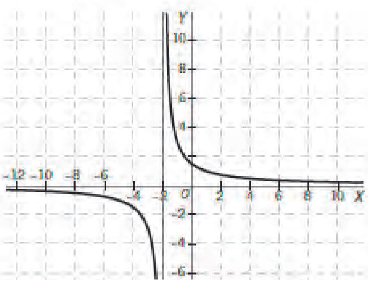
Asíntotas: $x = 0$, $y = 2$;

b) $f(x) = \frac{4x^3 + 1}{x^2}$



Asíntotas: $x = 0$, $y = 4x$;

c) $f(x) = \frac{3}{x+2}$



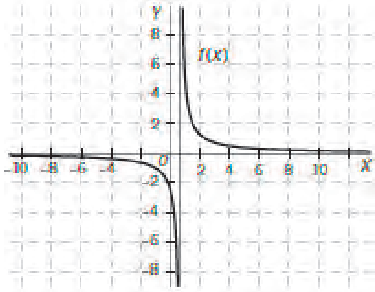
Asíntotas: $x = -2$, $y = 0$

Ejercicio 39. $f(x) = \frac{5}{3x-2}$

a) $f(-2) = -0{,}625$; $f(1) = 5$; $f(2) = 1{,}25$

b) $D(f) = \mathbb{R} - \{2/3\}$ $R(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

c)



d) La función decrece en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos. Tiene un punto de corte con el eje en (0, –2,5). No presenta periodicidad ni simetría.

Ejercicio 40

a) $f(2) = 0$ $f(4) = 1{,}41$ $g(2) = 1{,}098$ $g(5) = 1{,}609$

b) Estudio de $f(x)$: $D(g) = [2, +\infty)$ $R(g) = [0, +\infty)$
Creciente en todo su dominio y no presenta extremos. Corta los ejes en (2, 0).
No tiene simetría ni periodicidad.
Estudio de $g(x)$:
$D(g) = (-1, +\infty)$ $R(g) = \mathbb{R}$
Creciente en todo su dominio y no presenta extremos. Corta los ejes en (0, 0). No tiene simetría ni periodicidad.

d) $\sqrt{x-2} = \ln(x+1) \rightarrow x = 5{,}51 \rightarrow (5{,}51;\ 1{,}87)$

e) $(f \circ g) = \sqrt{\ln(x+1) - 2}$

Ejercicio 41.

a) $f(x) + g(x) = x^2 - 1 + 2x + 3 = x^2 + 2x + 2$

b) $f(x) + h(x) = x^2 + 2x$

c) $h(x) - g(x) = 2x + 1 - (2x + 3) = x^2 - 1$

d) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2-1}{2x+3}$

e) $g(x) - h(x) = 4$ f) $f(x) \cdot g(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$

g) $g(x) \cdot h(x) = (2x + 3)(2x + 1) = 4x^2 + 8x + 3$

h) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x+3}{x^2-1}$

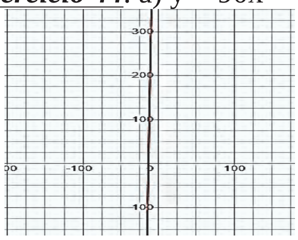
Ejercicio 42. a) La función es creciente en todo su dominio. Los puntos de corte son (0, 0), (π, 0), (2π, 0); no tiene máximos ni mínimos.

b) La función crece entre $(-2\pi, -\frac{3\pi}{2})$ U $(-\frac{3\pi}{2}, 0)$ U (0,2) y decrece en $(-\frac{3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2})$ U (2,+∞). Los puntos de corte son (–2π, 0), (–π, 0), (0, 1) y (5, 0).

Ejercicio 43. a) Dominio: [0, +∞), Recorrido: y ≤ 0

Solucionario

Ejercicio 44. a) $y = 90x + 1200$

b) 

c) dominio: |R; recorrido |R

Ejercicio 45. $y = x^2 - 4$

Ejercicio 46. Dado que la parábola pasa por el punto (0, 4), c = 4. Luego formamos un sistema de ecuaciones a partir de los otros pares de puntos dados y de la forma general de la ecuación de segundo grado: $y = ax^2 + bx + c$

Para (–1, 1): $1 = a - b + 4$

Para (2; –2): $-2 = 4^a + 2b + 4$

De ahí que: a = –2, b = 1 y c = 4. Por tanto, la ecuación de parábola que contiene dichos puntos es $y = -2x^2 + x + 4$

Ejercicio 47. a) $y = 3x^2 - x + 1$ Vértice $= \frac{-b}{2a}$

$x=\frac{1}{6} \longrightarrow y=\frac{11}{12}$ V $(\frac{1}{6}; \frac{11}{12})$

b) $y = 6x^2 - 2x + 9$

$x=\frac{1}{6} \longrightarrow y=\frac{53}{6}$ V$(\frac{1}{6}; \frac{53}{6})$

c) $y = -10x^2 - 5x + 7$

$x=\frac{-1}{4} \longrightarrow y=\frac{61}{8}$ V$(\frac{1}{6}; \frac{53}{6})$

d) $y = 8x^2 + 8x - 11$

$x = \frac{-1}{2} \longrightarrow y = 13$ V $(\frac{-1}{2}; 13)$

Ejercicio 48. $A = \frac{4x-x^2}{2}$.

Ejercicio 49. a) $f(x) = 5x - 1$, dominio: $x \in R$

b) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2$, dominio: $x \in R$

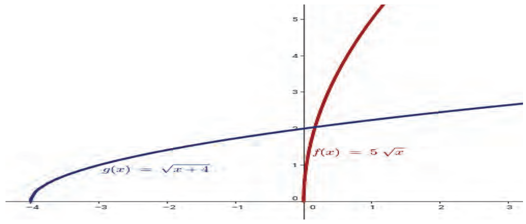
c) $f(x) = \frac{2}{x}$, dominio: $x \in R$, $x \neq 0$

d) $f(x) = \frac{x-1}{x+5}$, dominio: $x \in R$, $x \neq -5$

e) $f(x) = \sqrt{x+3}$, dominio: $x \in R$, $x \geq -3$

f) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-2}}$, dominio: $x \in R$, $x \neq 2$

Ejercicio 50



Ejercicio 51

a) $(g \circ f)(x) = \frac{x^2-15-2}{x^2-15+5} = \frac{x^2-17}{x^2-20}$

b) $(f \circ g)(x) = \left(\frac{x-2}{x+5}\right)^2 - 15 = \frac{-7(2x^2+22x+53)}{(x+5)^2}$

c) $(h \circ g \circ f)(x) = \sqrt{\frac{x^2-17}{x^2-20}}$

d) $(h \circ g)(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+5}}$

e) $(f \circ h)(x) = (\sqrt{x})^2 - 15 = x - 15$

f) $(g \circ h \circ f)(x) = \frac{\sqrt{x^2-15-2}}{\sqrt{x^2-15+5}}$

Ejercicio 52. La composición de las funciones $f(x) = x^3$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$, es conmutativa, porque:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x}) = (\sqrt[3]{x})^3 = x$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x)^3 = \sqrt[3]{(x)^3} = x$$

Ejercicio 53. a) No existe. b) –1 c) 4
d) 1 e) 0 f) 2

Ejercicio 54. La función $q(y) = \sqrt{(2y-3)}$, se puede escribir como la composición de las funciones $f \circ g$, siendo $f(y) = \sqrt{x}$ y la función $g(y) = 2y - 3$

Ejercicio 55. La función $t(x) = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ se puede escribir como la composición de las funciones $f \circ g$, siendo $f(x) = x^2$ y la función $g(x) = x + 2$

Ejercicio 56. La función $s(x) = x^2 + 3x + 2$ como
(a) El producto de dos funciones: $(x + 2) . (x + 1)$
(b) la suma de dos funciones: $x^2 + (3x + 2)$

Solucionario

Ejercicio 57. $f(x) = -2x + 5$,

$$\text{TVM } [-5, -3] = \frac{f(-3) - f(-5)}{-3 - (-5)} =$$

$$= \frac{(-2(-3) + \cancel{5}) - (-2(-5) + \cancel{5})}{2} =$$

$$= \frac{6 - 10}{2} = -2$$

$$\text{TVM } [3, 5] = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} =$$

$$= \frac{(-2 \cdot 5 + \cancel{5}) - (-2 \cdot 3 + \cancel{5})}{2} = \frac{-10 + 6}{2} = -2$$

$$\text{TVM } [10, 20] = \frac{f(20) - f(10)}{20 - 10} =$$

$$= \frac{(-2 \cdot 20 + \cancel{5}) - (-2 \cdot 10 + \cancel{5})}{10} =$$

$$= \frac{-40 + 20}{10} = -2$$

Ejercicio 58. ***a)*** $\boldsymbol{f(x) = 4x^3 - 1}$ es una función polinómica cuyo coeficiente del término de mayor grado es $4 > 0$.
Por tanto:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Por otra parte, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(-x)$. Así pues:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (4(-x)^3 - 1) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (-4x^3 - 1) = -\infty$$

Puesto que $f(-x) = -4x^3 - 1$ es una función polinómica cuyo coeficiente del término de mayor grado es $-4 < 0$.

b) $\boldsymbol{f(x) = 3x^2 + 6}$ es una función polinómica cuyo coeficiente del término de mayor grado es $3 > 0$.
Por tanto:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Por otra parte, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(-x)$. Así pues:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (3(-x)^2 + 6) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 3x^2 + 6 = +\infty$$

Puesto que $f(-x) = 3x^2 + 6$ es una función polinómica cuyo coeficiente del término de mayor grado es $3>0$.

c) $\boldsymbol{f(x) = -3x^5 + 5}$ es una función polinómica cuyo coeficiente del término de mayor grado es $-3 < 0$. Por tanto:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

Por otra parte, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(-x)$. Así pues:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-3(-x)^5 + 5) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} f(x) = 3x^5 + 5 = +\infty$$

Puesto que $f(-x) = 3x^5 + 5$ es una función polinómica cuyo coeficiente del término de mayor grado es $3>0$.

d) $\boldsymbol{f(x) = -x^4 - x^3 + 2x - 2}$ es una función polinómica cuyo coeficiente del término de mayor grado es $-1 < 0$. Por tanto:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

Por otra parte, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(-x)$. Así pues:

$$\lim_{x \to -\infty} f(-x) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (-(-x^4) - (-x^3) + 2(-x) - 2) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (-x^4 + x^3 - 2x - 2) = -\infty$$

Página 135

Solucionario

Puesto que $f(-x) = -x^4 + x^3 - 2x - 2$ es una función polinómica cuyo coeficiente del término de mayor grado es $-1 < 0$.

e) f(x) = 5 es una función polinómica de grado cero. Por tanto:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 5$$

Por otra parte, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(-x)$. Así pues:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 5 = 5$$

Puesto que $f(-x) = 5$ es también una función polinómica de grado cero.

f) f(x) = −3 es una función polinómica de grado cero. Por tanto:

Puesto que $f(-x) = -3$ es también una función polinómica de grado cero.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -3$$

Por otra parte, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(-x)$. Así pues:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -3 = -3$$

<u>Ejercicio 59</u>. f(x) = x³

TVM [0, h], para h = 1

TVM $[0, 1] = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{1-0}{1} = \boldsymbol{1}$

TVM [0, h], para h = 0,1

TVM $[0; 0,1] = \frac{f(0,1)-f(0)}{0,1-0} = \frac{0,001-0}{0,1} = \boldsymbol{0,01}$

TVM [0, h], para h = 0,01

TVM $[0; 0,01] = \frac{f(0,01)-f(0)}{0,01-0} = \frac{0,000001-0}{0,1} =$

0,0001

Conforme h se hace cada vez más pequeña la tasa de variación media tiende a 0.

<u>Ejercicio 60</u>

a) La imagen de cualquier número real, x, es otro número real, excepto para aquellas x tales que $x + 2 = 0$ o $x - 3 = 0$, es decir, $x = -2$ y $x = 3$.

Así pues, el dominio de la función es

D(f) = |R− {− 2, 3}

b) La imagen de cualquier número real, x, es otro número real, x, excepto para aquellas x tales que: $x^2 - 6x + 5 = 0$

Resolvemos la ecuación anterior:

$x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = 5$

Así pues, el dominio de la función es

D(g) = |R − { 1, 5}

c) La imagen de cualquier número real, x, es otro número real para aquellas x pertenecientes al conjunto solución de la inecuación $x + 1 \geq 0$.

Resolvemos la inecuación anterior:

$x + 1 \geq 0 \qquad x \geq -1$

El conjunto solución es, por tanto, $S = [-1, +\infty)$.

Así pues, el dominio de la función es

D(h) = [−1, +∞)

d) La imagen de cualquier número real, x, es otro número real para aquellas x pertenecientes al conjunto solución de la inecuación $2 - x^2 \geq 0$.

Hallamos las soluciones de la ecuación $2 - x^2 = 0$ o, equivalentemente, $x^2 - 2 = 0$:

$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{2};\ x_2 = \sqrt{2}$

Estas soluciones definen tres intervalos:

$(-\infty, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y $(\sqrt{2}, +\infty)$

Tomamos un valor cualquiera de x en cada intervalo y probamos si se verifica la inecuación:

Intervalo	x	¿Es solución?
$(-\infty, -\sqrt{2})$	-2	$-2 \ngeq 0 \rightarrow$ No
$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$	0	$2 \geq 0 \rightarrow$ Sí
$(\sqrt{2}, +\infty)$	2	$-2 \ngeq 0 \rightarrow$ No

Tenemos que $x = -\sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2}$ pertenecen al conjunto solución, ya que la inecuación contiene el signo $\geq$.

Por tanto, el conjunto solución es

$CS = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

Así pues, el dominio de la función es

D(i) = [−√2, √2]

e) La imagen de cualquier número real, x, es otro número real para aquellas $x > 0$.

Así pues, el dominio de la función es

D(j) = (0, +∞)

f) ***D(k) = |R – (–∞, 0)***

Solucionario

Ejercicio 61. $f(t) = 50 + 150\sqrt{t}$ Como la velocidad media del móvil en un intervalo coincide con la TVM de f en dicho intervalo, para responder buscaremos los valores: TMV[2, 4] y TMV[7, 11].

$$TMV\ (2,4) = \frac{f(4)-f(2)}{4-2} =$$

$$= \frac{\cancel{50} + 150\sqrt{4} - \left(\cancel{50} + 150\sqrt{2}\right)}{2} =$$

$$= \frac{150 \cdot 2 - 150\sqrt{2}}{2} = \frac{150\left(2-\sqrt{2}\right)}{2} =$$

$$= 75\left(2-\sqrt{2}\right) = 43{,}93$$

$$TMV\ [7,11] = \frac{f(11)-f(7)}{11-7} =$$

$$= \frac{150-\sqrt{11}-150\sqrt{7}}{4} = \frac{150}{4}\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right) = 25{,}16$$

Ejercicio 62

a) $f'(x) = 72x^8$ b) $f'(x) = \frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}} = \frac{4}{5\sqrt[5]{x^4}}$

c) $f'(x) = -\frac{5}{7}x^{-\frac{12}{7}} = \frac{-5}{7\sqrt[7]{x^5}}$

d) $f'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 7$

e) $f(x) = \cos x \cdot e^x$; $f'(x) = (\cos x)' \cdot e^x + \cos x \cdot (e^x)' = (-\text{sen } x) \cdot e^x + \cos x\ (e^x) = e^x(\cos x - \text{sen } x)$

f) $f(x) = 4x^3 - \ln x$ $f'(x) =$
$= (4x^3)' \cdot \ln x + 4x^3 \cdot (\ln x)' = 12x^2 \ln x + 4x^2 =$
$= x^2(12\ln x + 4)$

g) $f(x) = (5x^6 - 3x^2) \cdot (7x^6 - 3x^2) = 35x^{12} - 36x^8 + 9x^4$ $f'(x) = 420x^{11} - 288x^7 + 36x^3$

h) $f(x) = \frac{2x^3 + 7x^2 - 8x + 9}{\cos x}$

$f'(x)$
$$= \frac{(2x^3 + 7x^2 - 8x + 9).\cos x - (2x^3 + 7x^2 - 8x + 9).(\cos x)'}{\cos x}$$

$$= = \frac{(6x^2 + 14x - 8).\cos x + (2x^3 + 7x^2 - 8x + 9).\text{sen } x}{\cos^2 x}$$

$h(x) = \frac{4x \cdot \text{sen } x}{\cos x}$

$$h'(x) = \frac{(4x \cdot \text{sen } x)'.\cos x - (4x.\text{sen } x).(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{(4.\text{sen } x + 4x.\cos x).\cos x - (4x.\text{sen } x).(-\text{sen } x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{4\text{sen } x.\cos x + 4x.\cos^2 x + 4x\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{4(x + \text{sen}x.\cos x)}{\cos^2 x}$$

Ejercicio 63. ***a) $f(x) = (2x^2 - 4x + 3)^3$***

$f(x)$ es composición de $g(x) = x^3$ y $h(x) = 2x^2 - 4x + 3$ pues:

$f(x) = g(h(x)) = g(2x^2 - 4x + 3) = (2x^2 - 4x + 3)^3$

Como $g'(x) = 3x^2$ y $h'(x) = 4x - 4$, aplicando la regla de la cadena:

$f'(x) = 3(4x - 4)(2x^2 - 4x + 3)^2$

b) $f(x) = \ln(\cos x)$

$f(x)$ es composición de $g(x) = \ln x$ y $h(x) = \cos x$ pues: $f(x) = g(h(x)) = g(\cos x) = \ln(\cos x)$

Como $g'(x) = \frac{1}{x}$ y $h'(x) = -\text{sen } x$, aplicando la regla de la cadena: $f'(x) = \frac{1}{\cos x}(-\text{sen } x) = -\text{tg } x$

c) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 6x}$

$f(x)$ es composición de $g(x) = \sqrt{x}$ y $h(x) = 3x^2 + 6x$ pues: $f(x) = g(h(x)) = g(3x^2 + 6x) = \sqrt{3x^2 + 6x}$ Como $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ y $h'(x) = 6x + 6$, aplicando la regla de la cadena:

$$f'(x) = \frac{6x+6}{2\sqrt{3x^2+6x}} = \frac{3x+3}{\sqrt{3x^2+6x}}$$

d) $f(x) = e^{x^3 + 2x}$

$f(x)$ es composición de $g(x) = e^x$ y $h(x) = x^3 + 2x$ pues: $f(x) = g(h(x)) = g(x^3 + 2x) = e^{x^3 + 2x}$

Como $g'(x) = e^x$ y $h'(x) = 3x^2 + 2$, aplicando la regla de la cadena:

$f'(x) = e^{x^3 + 2x}(2x + 2)$

e) $f(x) = \sqrt{e^x}$ $f(x)$ es composición de $g(x) = \sqrt{x}$ y $h(x) = e^x$ pues: $f(x) = g(h(x)) = g(e^x) = \sqrt{e^x}$

Como $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ y $h'(x) = e\ x$, aplicando la regla de la cadena: $f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x}}$

Solucionario

f) f(x) = sen (cos x)
f(x) es composición de *g(x)* = sen *x* y *h(x)* = cos *x* pues:
f(x) = *g* (*h(x)*) = *g* (cos *x*) = sen(cos *x*)
Como *g'(x)* = cos *x* y *h'(x)* = –sen *x*, aplicando la regla de la cadena: *f'(x)* = –sen *x*·cos(cos *x*)
g) f(x) = cos(ln x)
$f'(x) = \frac{-\text{sen}(\ln x)}{x}$
h) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$ *f(x)* = es composición de
$g(x) = \sqrt{x}$ y $h(x) = \frac{x+1}{x}$ pues:
$f(x) = g(h(x)) = g\left(\frac{x+1}{x}\right) = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$ Como $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ y $h'(x) = \frac{-1}{x^2}$, aplicando la regla de la cadena:
$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x}}\,.x^2}$
Ejercicio 64. a) $f(x) = (2x^4 - 3x^2 - 7x + 3)^3$
f(x) = (h o g) *(x)* donde
$h(x) = x^3$ y $g(x) = 2x^4 - 3x^2 - 7x + 3$
Así, $h'(x) = 3x^2$ y $g'(x) = \boldsymbol{8x^3 - 6x - 7}$
Por tanto, $f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = 3(2x^4 - 3x^2 - 7x + 3)^2 \cdot (8x^3 - 6x - 7)$
b) $f(x) = \text{sen}(x^2 + 5)$; *f(x)* = h o *g(x)* donde *h(x)* = sen x y $g(x) = (x^2 + 5)$.
Así, $f'(x) = h'(g(x)).\ g'(x) = [\cos(x^2 + 5)]\ .2x$
c) *f(x)* = ln (sen x) = h o *g(x)* donde h = ln x y *g(x)* = sen x.
$f'(x) = h'(g(x)).\ g'(x) = \frac{1}{\text{sen}\,x}\ .\ \cos x = \frac{\cos x}{\text{sen}\,x} =$
cot gx
d) $f(x) = \cos^2(x^3 + 2x^2) = f_1 \text{ o } f^2 \text{ o } f^3(x)$ donde
$f_3(x) = x^3 + 2x^2$, $f2(x) = \cos x$ y $f_1(x) = x^2$.
Así, $f'(x) = f'_1(f_2 \text{ o } f_3)(x)) \cdot (f_2 \text{ o } f_3)'(x) =$
$= [2\cos(x^3 + 2x^2)]\cdot[-\text{sen}(x^2 + 2x^2)] \cdot [3x^2 + 4x] =$
$= \boldsymbol{-2(3x^2 + 4x)\cos(x^3 + 2x^2)\,\text{sen}(x^2 + 2x^2)}$
Ejercicio 65
a) $f(x) = 2x + 5$; $f'(x) = 2 > 0\ \forall\, x \in |\text{R}$.

Así, *f(x)* creciente en |R, y por tanto, para *x* = 3, 5, 7, 9.
b) $g(x) = x^2 - 3x + 5$; $g'(x) = 2x - 3$
$g'(3) = 2 \cdot 3 - 3 = 6 - 3 = 3 > 0$
Así, *g(x)* es creciente en x = 3
$g'(5) = 2 \cdot 5 - 3 = 10 - 3 = 7 > 0$
Así, *g(x)* es creciente en x = 5
$g'(7) = 2 \cdot 7 - 3 = 14 - 3 = 11 > 0$
Así, *g(x)* es creciente en x = 7
$g'(9) = 2 \cdot 9 - 3 = 18 - 3 = 15 > 0$
Así, *g(x)* es creciente en x = 9
c) $h(x) = \frac{3}{x-1}$; $g'(x) = \frac{-3(1)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$
Observamos que $h'(x) < 0\ \forall\, x \in D(h) = \mathbb{R} - \{1\}$.
Así, *h*(x) es decreciente en todo punto del dominio y, por tanto, en *x* = 3, 5, 7 y 9.
Ejercicio 66
1. $\left.\begin{array}{l} f(x) = 800 - x^2 \\ [a, b] = [3, 5] \end{array}\right\} \Rightarrow \text{TVM } [3, 5] =$
$= \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{(\cancel{800} - 25) - (\cancel{800} - 9)}{2} =$
$= \frac{-25 + 9}{2} = \frac{-16}{2} = -8$
$\left.\begin{array}{l} f(x) = 800 - x^2 \\ [a, b] = [13, 15] \end{array}\right\} \Rightarrow \text{TVM } [13, 15] =$
$= \frac{f(15) - f(13)}{15 - 13} = \frac{(\cancel{800} - 15^2) - (\cancel{800} - 13^2)}{2} =$
$= \frac{-15^2 + 13^2}{2} = \frac{-56}{2} = -28$
$\left.\begin{array}{l} f(x) = 800 - x^2 \\ [a, b] = [10, 20] \end{array}\right\} \Rightarrow \text{TVM } [10, 20] =$
$= \frac{f(20) - f(10)}{20 - 10} = \frac{(\cancel{800} - 20^2) - (\cancel{800} - 10^2)}{10} =$
$= \frac{-20^2 + 10^2}{10} = \frac{-400 + 100}{10} = -30$
En el intervalo [10, 20] ha disminuido más rápidamente el número de enfermos, pues es donde hay menor tasa de variación media.

Ejercicio 67
$f(x) = x^2 - 2x \rightarrow f'(x) = 2x - 2 \rightarrow f'(-1) = -4$

Solucionario

Ejercicio 68. Calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos de abscisa indicados:

a. $f(x) = 3x - 5$, en $x = 4$

$$f'(4) = \lim_{h\to 0} \frac{f(4+4) - f(4)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3(4+h) - 5 - (3\cdot 4 - 5)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{12 + 3h - 5 - 7}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3\cancel{h}}{\cancel{h}} = 3$$

b. $h(x) = x^2 + 5x - 3$, en $x = 3$

$$h'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{h(3+h) - h(3)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[(3+h)^2 + 5(3+h) - 3] - 21}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{9 + 6h + h^2 + 15 + 5h - 24}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^{\cancel{2}} + 11\cancel{h}}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} h + 11 = 11$$

Ejercicio 69. La pendiente de la recta tangente en estos puntos ha de ser la misma que la del eje de abscisas, es decir, 0. Así, debemos buscar los puntos $(x, f(x))$ y $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12 \Rightarrow x^2 = 12/3 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Calculemos $f(2)$ y $f(-2)$:

$f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 = 8 - 24 = -16$; $f(-2) = (-2)^3 - 12 \cdot (-2) = -8 + 24 = 16$

Luego los puntos buscados son $(2, -16)$ y $(-2, 16)$.

– Estudio del crecimiento de $f(x)$.

• Buscamos los ceros de $f'(x)$: $f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

• Intervalos de crecimiento y decrecimiento: $f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2)$ U $(2, +\infty)$.

Ejercicio 70. Para que sea horizontal la pendiente debe ser nula; es decir, $f'(x) = 0$; por tanto, $f'(x) = 3x^2 - 8x + 4 = 0 \rightarrow x_1 = 2/3$; $x_2 = 2$

Por tanto, calculamos el valor de $f(x)$ en esos puntos:

$f(2) = -10$; $f(2/3) = -238/27$

Los puntos son $(2/3; -238/27)$ y $(2; -10)$

Ejercicio 71

a) $f(x) = x^3 + 2x + 10$, en $x = -2$:

$f'(x) = 3x^2 + 2 \Rightarrow f'(-2) = 3(-2)^2 + 2 = 3 \cdot 4 + 2 = 14$

$f(-2) = -8 - 4 + 10 = -12 + 10 = -2$

Así, la recta tangente tiene por ecuación

$y + 2 = 14(x + 2) \Leftrightarrow y = 14x + 28 - 2 \Leftrightarrow y = 14x + 26$

b) $f(x) = e$, en $x = 0$:

$$\left.\begin{matrix} f'(x) = e^x \\ f(0) = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f'(0) = 1$$

La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 0$ es: $y - 1 = 1(x - 0) \Leftrightarrow y = x + 1$

c) Busquemos primero el punto en que la gráfica de $f(x)$ corta al eje de abscisas:

$$\left.\begin{matrix} f(x) = \ln x \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\left.\begin{matrix} f'(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 1 \\ f(1) = \ln 1 = 0 \end{matrix}\right\}$$

La ecuación de la recta tangente a $f(x) = \ln x$ en $x = 1$ es: $y - 0 = 1.(x - 1) \Leftrightarrow y = x - 1$

Ejercicio 72

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - x^2(2x)}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2x(\cancel{x^2} + 1 - \cancel{x^2})}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$\left.\begin{matrix} f'(1) = \dfrac{2}{(1+1)^2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \\ f(1) = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2} \end{matrix}\right\}$$

La ecuación de la recta buscada es:

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x - 1)$$

Veamos en qué punto la tangente es paralela al eje de abscisas. Para ello buscaremos $(x, f(x))$ y $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Así, el punto buscado es $(0, f(0)) = (0, 0)$.

Ejercicio 73. a) $f(x) = \text{sen } x$

$f(x)$ es composición de $g(x) = \sqrt{x}$ y $h(x) = \text{sen } x$ pues:

$f(x) = g(h(x)) = g(\text{sen } x) = \sqrt{\text{sen } x}$

Como $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ y $h'(x) = \cos x$, aplicando la regla de la cadena: $f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\text{sen } x}}$

b) $f(x) = \ln(\cos \sqrt{x})$

$f(x)$ es composición de $g(x) = \ln x$ y $h(x) = \cos\sqrt{x}$, y a su vez $h(x)$ es composición de $i(x) = \cos x$ y $j(x) = \sqrt{x}$

Como $g'(x) = \frac{1}{x}$, $i'(x) = \text{sen } x$ y $j''(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}x$, aplicando la regla de la cadena:

$$f'(x) = \frac{-\text{sen}\sqrt{x}}{2 \cdot \cos\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = -\frac{\text{tg}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

c) $f(x) = a^{\text{tg } x}$

$f(x)$ es composición de $g(x) = a^x$ y $h(x) = \text{tg } x$

Como $g'(x) = \ln(a) \cdot a$ x y $h'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$,

aplicando la regla de la cadena: $f'(x) = \frac{\ln a \, . a^{\text{tg } x}}{\cos^2 x}$

d) $f(x) = \cos(x^2)$

$f(x)$ es composición de $g(x) = \cos x$ y $h(x) = x^2$:

$f(x) = g(h(x)) = g(x^2) = \cos(x^2)$

Como $g'(x) = -\text{sen } x$ y $h'(x) = 2x$, aplicando la regla de la cadena: $f'(x) = -2x \text{ sen}(x^2)$

e) $f(x) = \ln\left(\frac{\text{sen } x}{x}\right)$

$f(x)$ es composición de $g(x) = \ln x$ y $h(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$, pues:

$$f(x) = g(h(x)) = g\left(\frac{\text{sen } x}{x}\right) = \ln\left(\frac{\text{sen } x}{x}\right)$$

Como $g'(x) = \frac{1}{x}$ y $h'(x) = \frac{x\cos x - \text{sen } x}{x^2}$, aplicando la regla de la cadena:

$$f'(x) = \frac{\frac{x\cos x - \text{sen } x}{x^2}}{\frac{\text{sen } x}{x}} = \frac{x\cos x - \text{sen } x}{x \text{ sen } x} = \text{cotg}(x) - \frac{1}{x}$$

f) $f(x) = \text{sen}(\ln x)$

$f(x)$ es composición de $g(x) = \text{sen } x$ y $h(x) = \ln x$, pues:

$f(x) = g(h(x)) = g(\ln x) = \text{sen}(\ln x)$

Como $g'(x) = \cos x$ y $h'(x) = 1/x$, aplicando la regla de la cadena:

$f'(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x}$

Ejercicio 74

a) $f(x) = (2x^4 - 4x^2 + 3)^5$

$f'(x) = 5(8x^3 - 8x)(2x^4 - 4x^2 + 3)^4$

b) $f(x) = \ln(\cos(\text{sen } x))$; $f'(x) = \frac{-\text{sen}(\text{sen } x) \cdot \cos x}{\cos(\text{sen } x)}$

c) $f(x) = \ln(\text{arc} \cos^2 x)$;$\rightarrow$ $f'(x) = \frac{-2}{\text{arcos } x \, . \sqrt{1-x^2}}$

d) $f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + 1}{3x^4 - 2}$

$$f'(x) = \frac{-6x^6 + 6x^5 - 12x^3 - 12x^2 + 4x}{(3x^4 - 2)^2}$$

e) $f(x) = \frac{\cos x^{-2} + \text{sen } x}{e^x}$

$$f'(x) = \frac{2x^{-3} \cdot \text{sen } x^{-2} + \cos x - \cos x^{-2} - \text{sen } x}{e^x}$$

f) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{3 - \sqrt{x}}$

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x} \cdot (3 - \sqrt{x})^2}$$

g) $f(x) = e^{\cos(3x)}$

$f'(x) = -3 \text{ sen}(3x) \cdot e^{\cos(3x)}$

h) $f(x) = \sqrt{\text{tg } x}$

$f'(x) = 1/(2 \cos^2 x \sqrt{tg\ x})$

i) $f(x) = \text{tg } \sqrt{2x}$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2\sqrt{2x} \cdot \sqrt{2x}}$$

j) $f(x) = \text{sen}(\cos\frac{1}{x})$

$$f'(x) = \frac{\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{x^2}$$

k) $f(x) = \frac{\text{tg } x}{\sqrt{x}}$; $\rightarrow$ $f'(x) = \frac{\sqrt{x}\left(1 - \frac{\text{tg } x}{2x}\right)}{\cos^2 x \cdot x}$

l) $f(x) = \sqrt{7^{1+x^2}}$; $\rightarrow$ $f'(x) = \frac{2x \cdot \ln 7 \cdot 7^{1+x^2}}{2\sqrt{7^{1+x^2}}}$

Solucionario

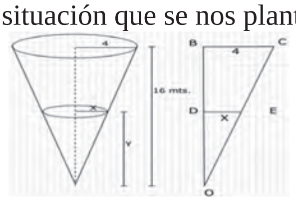
Ejercicio 75. a. $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 3x - 80 \rightarrow$
$f'(x) = 12x^2 + 4x - 3$
b. $f(x) = e^x \quad \rightarrow \quad f'(x) = e^x$
c. $f(x) = \ln x \quad \rightarrow \quad f'(x) = 1/x$
d. $f(x) = \operatorname{sen} x \rightarrow \quad f'(x) = \cos x$
e. $f(x) = \cos x \rightarrow \quad f'(x) = -\operatorname{sen} x$
f. $f(x) = \frac{1}{x-2} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}$
g. $f(x) = \cos(2x) \quad \rightarrow f'(x) = -2 \operatorname{sen} 2x$
h. $f(x) = 3x^4 + 70x \quad \rightarrow f'(x) = 12x^3 + 70$
i. $f(x) = \sqrt{(2x^3)} \quad \rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{2x}$
j. $f(x) = 40x^3 + 2x^2 \quad \rightarrow f'(x) = 120x^2 + 4x$

Ejercicio 76
a) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$
$f'(x) = 3x^2 + 4x + 1$
La función $f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1) \cup (-1/3, +\infty)$ y decreciente en $(-1, -1/3)$, y presenta un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = -1/3$.
b) $f(x) = \operatorname{sen} x\,(2x),\ x \in [0, \pi]$
$f'(x) = 2\cos(2x) \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow$
La función $f(x)$ es creciente en $(0, \pi/4) \cup (3\pi/4, \pi)$ y decreciente en $(\pi/4, 3\pi/4)$, y presenta un máximo en $x = \pi/4$ y un mínimo en $x = 3\pi/4$.
c) $f(x) = e^{x^2-1} \quad f'(x) = 2x \cdot e^{x^2-1}$
La función $f(x)$ es creciente en $(0,+\infty)$ y decreciente en $(-\infty, 0)$, y presenta un mínimo en $x = 0$.
d) $f(x) = (x-2)^3$
$f'(x) = 3(x-2)^2$
$f'(x) > 0$ para cualquier valor de x; por tanto, la función es creciente en todo $D(f)$. A pesar de que la derivada de $f(x)$ vale 0 para $x = 2$, no presenta ningún máximo ni mínimo en este punto, sino un punto de inflexión.
e) $f(x) = 0{,}5x^2 + 2 \quad f'(x) = x$
La función $f(x)$ es creciente en $(0, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, 0)$, y presenta un mínimo en $x = 0$.
f) $f(x) = \ln(x^2 + 1) \quad f'(x) = \frac{2}{x^2+1}$

La función $f(x)$ es creciente en $(0,+\infty)$ y decreciente en $(-\infty,0)$, y presenta un mínimo en $x = 0$.

Ejercicio 77. a) $f(x) = \frac{2}{x}$ en $x = 1$
$f'(x) = -\frac{2}{x^2} \quad f(1) = 2 \quad f'(1) = -2$
Por tanto, la ecuación de la recta tangente en $x = 1$ de $f(x)$ es: $\boldsymbol{y - 2 = -2(x - 1) \rightarrow y = -2x + 4}$
b) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ en $x = 3$
$f'(x) = 2x - 2 \quad f(3) = 6 \quad f'(3) = 4$
Por tanto, la ecuación de la recta tangente en $x = 3$ de $f(x)$ es: $\boldsymbol{y - 6 = 4(x + 1) \rightarrow y = 4x + 10}$
c) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ en $x = -1$
$f'(x) = 2x - 2 \quad f(-1) = 2 \quad f'(-1) = -4$
Por tanto, la ecuación de la recta tangente en $x = -1$ de $f(x)$ es: $\boldsymbol{y - 2 = -4(x + 1) \rightarrow y = -4x - 2}$
d) $f(x) = \ln x$ en $x = 1$
$f'(x) = 1/x \quad f(1) = 0 \quad f'(1) = 1$
Por tanto, la ecuación de la recta tangente en $x = 1$ de $f(x)$ es: $\boldsymbol{y - 0 = 1(x - 1) \rightarrow y = x - 1}$
e) $f(x) = \cos x$ en $x = \pi$
$f'(x) = -\operatorname{sen} x \ f(\pi) = -1 \ f''(\pi) = 0$
Por tanto, la ecuación de la recta tangente en $x=\pi$ de $f(x)$ es: $y + 1 = 0 \rightarrow y = -1$

Ejercicio 78. Primero hacemos un dibujo de la situación que se nos plantea:



Luego nombramos las variables que intervienen en el problema de la siguiente forma:
V: volumen (en cm^3) de agua en el tanque en el instante t (seg).
x: radio (en cm) de la sección del cono al nivel del líquido.
y: altura del agua (en cm) .
El volumen del agua en el instante t viene dado por: $V = \frac{\pi . x^2 . y}{3}$
a) cuando el nivel del agua se encuentra a 4 m de altura la velocidad con la que crece es $\frac{1}{200\pi}$ cm/seg

Página 137

Solucionario

Ejercicio 79. Un fabricante de bolígrafos sabe que el coste de producción de x bolígrafos en una semana es de $C(x) = 180 + 10x + x^2$. Si vende cada bolígrafo a 100 centavos:

a. $B(x) = 100x - 180 - 10x - x^2 = -x^2 + 90x - 180$

b. $x=\frac{-90}{2(-1)} = 45$, y= 1845

Debe vender 45 bolígrafos para obtener el máximo beneficio, que se $ 18,45

Ejercicio 80. $r(t) = 300t(1 - t) = 300t - 300t^2$

a) Calculamos $r'(t) = 300 - 600t$ e igualamos a cero: $300 - 600t = 0 \Rightarrow t = 1/2$

Analizamos los signos en los intervalos (0; 1/2) y (1/2; 1), de donde concluimos que el rendimiento es creciente en el intervalo (0; 1/2) y decreciente de (1/2; 1).

b) $300t(1 - t) = 0$ $t = 0$ $t = 1$

El rendimiento es nulo al empezar el examen, es decir, cuando r (t) = 0, y al acabar el examen (t = 1).

c) En t = 1/2 hay un punto crítico. En t = 1/2 se tiene el máximo rendimiento y es: r(1/2) = 300 . $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = 75$

Ejercicio 81. a. $f(x) = 4x^2 - 2x + 12$ es continua $\forall x \in |R$, pues es polinómica.

b. $f(x) = \frac{8}{x-2}$, es continua allí donde no se anula el denominador, es decir, $\forall x \in |R - \{2\}$.

c. $g(x) = \frac{3x^2}{x-2}$, es continua allí donde no se anula el denominador, es decir, $\forall x \in |R - \{2\}$.

d. $g(x) = \sqrt{x - 1}$, es continua $\forall x \in |R$

e. $h(x) = \sqrt{x - 3}$, es continua $\forall x \in |R$

f. $h(x) = |3 - 5x^2|$, es continua

g. $h(t) = \frac{t^3 - 8}{t-2}$ es continua $\forall x \in |R$, pues es polinómica, porque $(t^3 - 8) = (t - 2)(t^2 + 4t + 4)$,y esta se simplifica con el binomio del denominador, quedando una función cuadrática.

h. $h(t) = \frac{4t - 8}{t-2}$, es continua $\forall x \in |R$, porque es una recta.

Buscamos x para que $f(x)$ sea máxima: $f'(x) = -30x + 240$ $f'(x) = 0 \rightarrow -30x + 240 = 0 \rightarrow x = 8$

En x = 8 hay máximo. (Como $f(x)$ corresponde a una parábola con las ramas hacia abajo, en x = 8 está el máximo absoluto).

Ejercicio 82. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

$y - f(a) = f'(a)(x - a)$

Si la recta tangente de $f(x)$ tiene que ser paralela a la recta $2x + 3y - 1 = 0.\rightarrow y=\frac{2x-1}{3}$, la condición para que sean paralelas es que tengan la misma pendiente; por tanto, se debe cumplir que: $f'(x) = \frac{2}{3}\rightarrow$ $4x - 3 = \frac{2}{3}\rightarrow x = \frac{11}{12}$

Así pues, buscamos la ecuación de la recta tangente de $f(x)$ en $x = \frac{2}{3}$: $\rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{13}{24}$

Ejercicio 83. $y = \frac{x-2}{x+1}$ en el punto de corte con el eje de las abscisas (2,0)

La ecuación de la recta tangente viene dada por:

$y - f(a) = f'(a)(x - a)$

Calculamos la derivada de la función:

$f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$ $f'(2) = 1/3$ $f(2) = 0$

La ecuación de la recta tangente será:

$y - 0 = \frac{1}{3}(x - 2) \rightarrow y = \frac{x-2}{3}$

Ejercicio 84. $f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 1$

$f'(x) = 6x^2 + 18x + 12 \rightarrow f'(x) = 0\rightarrow x=$ $\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

La función $f(x)$ es creciente de $(-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$ y decrece de $(-2, -1)$.

La función pasa de crecer a decrecer en $x = -2$ y, por tanto, es un máximo, y de decrecer a crecer en $x = -1$, que es un mínimo.

Ejercicio 85. $f(x) = 4x^3 - 2x + 1$ que son paralelas a $y = 10x + 2$.

Ejercicio 86. Crece:$(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$, decrece (0; 2). Punto máximo (0, 4) y punto mínimo (2, 0)

Ejercicio 87. (21,5324)

Ejercicio 88. El número de árboles que se plantan es x. Por tanto, el número de frutos sería:

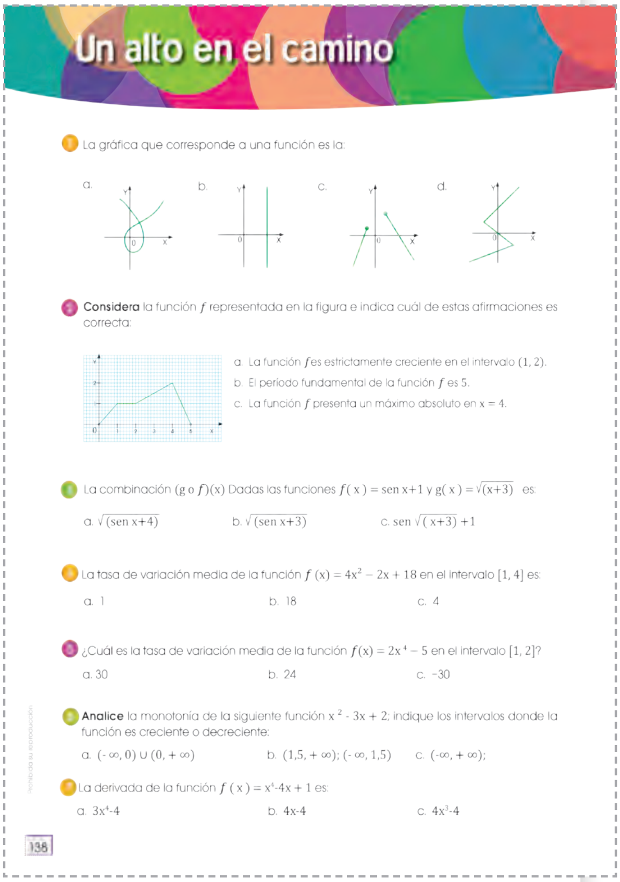
$f(x) = (24 + x)(600 - 15x) = -15x^2 + 240x + 14\,400$

Por tanto, se deben plantar 8 árboles. Así, habrá un total de 24 + 8 = 32 árboles, que producirán 15 360 frutos.

Solucionario

Un alto en el camino...

1. La gráfica que corresponde a una función es la c.
2. c) La función *f* presenta un máximo absoluto en x = 4.
3. La combinación $(g\ o\ f)(x)$ de las funciones $f(x) = \text{sen}\ x + 1$ y $g(x) = \sqrt{x+3}$ es: a) $\sqrt{sen\ x + 4}$
4. La tasa de variación media de la función $f(x) = 4x^2 - 2x + 18$ en el intervalo [1, 4] es: b) 18
5. La tasa de variación media de la función $f(x) = 2x^4 - 5$ en el intervalo [1, 2] es a) 30
6. La monotonía de la función $x^2 - 3x + 2$ es: b. crece (1,5, + ∞); decrece (– ∞, 1,5)
7. La derivada de la función $f(x) = x^4 - 4x + 1$ es: c) $4x^3 - 4$



Un alto en el camino

1. La gráfica que corresponde a una función es la:

a. b. c. d.

2. **Considera** la función f representada en la figura e indica cuál de estas afirmaciones es correcta:

a. La función f es estrictamente creciente en el intervalo (1, 2).
b. El período fundamental de la función f es 5.
c. La función f presenta un máximo absoluto en x = 4.

3. La combinación $(g\ o\ f)(x)$ Dadas las funciones $f(x) = \text{sen}\ x+1$ y $g(x) = \sqrt{(x+3)}$ es:

a. $\sqrt{(\text{sen}\ x+4)}$ b. $\sqrt{(\text{sen}\ x+3)}$ c. $\text{sen}\sqrt{(x+3)}+1$

4. La tasa de variación media de la función $f(x) = 4x^2 - 2x + 18$ en el intervalo [1, 4] es:

a. 1 b. 18 c. 4

5. ¿Cuál es la tasa de variación media de la función $f(x) = 2x^4 - 5$ en el intervalo [1, 2]?

a. 30 b. 24 c. −30

6. **Analice** la monotonía de la siguiente función $x^2 - 3x + 2$; indique los intervalos donde la función es creciente o decreciente:

a. (- ∞, 0) ∪ (0, + ∞) b. (1,5, + ∞); (- ∞, 1,5) c. (-∞, + ∞);

7. La derivada de la función $f(x) = x^4 - 4x + 1$ es:

a. $3x^4$-4 b. 4x-4 c. $4x^3$-4

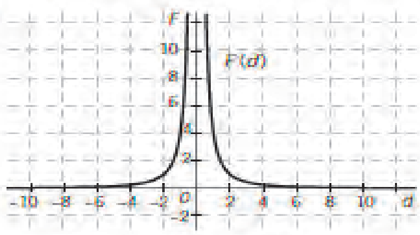
138

8.

$$F = \frac{4}{d^2}$$

a) $D(f) = \mathbb{R} - \{0\} \quad R(f) = (0, +\infty)$

b)



c) $F(d) = 1 \rightarrow \frac{4}{d^2} = 1 \rightarrow d = \pm 2$

9. Una parábola corta al eje de abscisas en $x = 3$ y en $x = 9$, y al eje de ordenadas en $y = 10$.
   a) Calcula la ecuación de dicha parábola.

$$\text{a)}\ \left.\begin{array}{l} y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \\ y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 10 = c \\ 0 = 9a + 3b + c \\ 0 = 81a + 9b + c \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{10}{27}x^2 - \frac{40}{9}x + 10$$

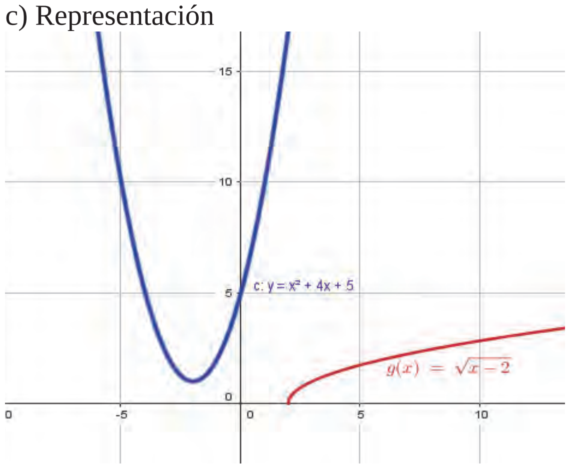
10. a) $f(x) = \sqrt{x - 2}$ y $g(x) = x^2 + 4x + 5$

a) $f(2) = \sqrt{2 - 2} = 0$ y $g(2) = 2^2 + 4.2 + 5 = 17$

$f(4) = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2}$ y $g(4) = 4^2 + 4.4 + 5 = 37$

b) $f(x)$: D(f) =[2,+∞)⟶ |R, *R (f)* =[0, +∞).

c) Representación



d) Calcula (g o f) $= \left[(\sqrt{x-2})^2 + 4\sqrt{x-2} + 5 = x + 3 + 4\sqrt{x-2}\right.$

11. Al tratarse de funciones polinómicas podemos reducir el estudio a los puntos $x = 1$ y

Solucionario

$x = 3$. Comprobamos si la función *f(x)* es continua en $x = 1$ y en $x = 3$.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 2x - 1 = 1$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2 = 1$$
$$f(1) = 1$$

Al coincidir los valores la función es continua en $x = 1$.

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} x^2 = 9$$
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} x^3 + 2x - 1 = 32$$
$$f(3) = 9$$

Al no coincidir los valores la función no es continua en $x = 3$, como la función no es continua tampoco será derivable en $x = 3$.

Derivamos la función:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \le 1 \\ 2x & \text{si } 1 < x \le 3 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Veamos cómo se comporta la derivada en el entorno de $x = 1$:

$f'(1-) = \lim_{x\to 1-} 2 = 2$ $\quad\quad$ $f'(1+) = \lim_{x\to 1+} 2x = 2$

Coinciden y, por tanto, la función es derivable en $x = 1$.

12.

$$f(x) = x + 2 \quad g(x) = \frac{x}{x^2 - 8} \quad x = 4$$

a) $g(x) - f(x) = 0{,}5 - 6 = -5{,}5$

b) $f(x) \cdot g(x) = 6 \cdot 0{,}5 = 3$

c) $(f \circ g)(x) = \dfrac{4}{4^2 - 8} + 2 = 2{,}5$

d) $(g \circ f)(x) = \dfrac{6}{6^2 - 8} = 0{,}21$

13. a) La función presenta una discontinuidad de salto finito en el kilómetro 300.

b) No tendría sentido, ya que no sería lógico tener un precio infinito.

1
4.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6 - 4n^2}{2n^2} = \dfrac{-4}{2} = -2$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4n^2 + 3n - 2}{2n^3 - 4n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$

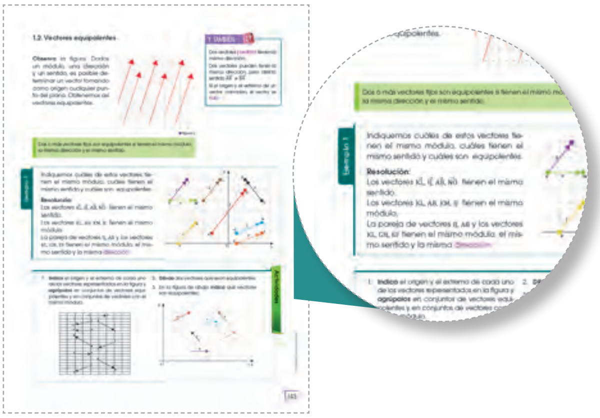
c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^3 - 4n}{4n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{2} = +\infty$

15. *a)* Veamos cuál es el comportamiento de la función en cada intervalo:

– Entre las 0 y las 1,5 h, el volumen de gasolina disminuye desde 15 hasta 5 l.

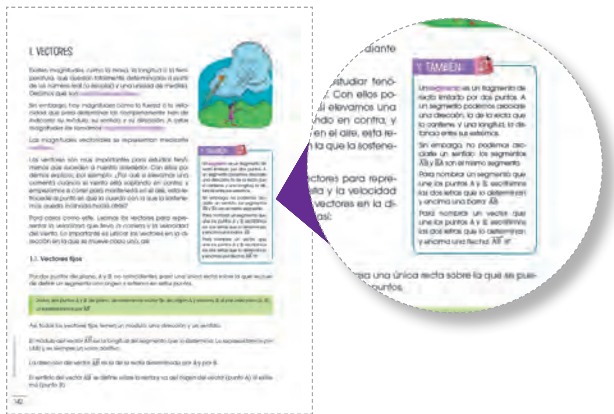
– Entre las 1,5 y las 1,6 h, el volumen de gasolina aumenta desde 5 hasta 30 l.

Vectores




Problemas resueltos


TIC
Si accedes a la página:
http://goo.gl/XYA1m9
podrás dibujar vectores (eligiendo dirección, sentido y módulo) y observarás cuáles son sus componentes en dos bases diferentes.


I. VECTORES


Ejercicios y problemas propuestos


Resumen


Para finalizar
EVALUACIÓN


ZONA

UNIDAD 4


4 Vectores

Noticia:

Los límites, su estudio y su relación con las ciencias y la filosofía son temas que se abordan en numerosas publicaciones, como por ejemplo:

- John D. Barrow. *Imposibilidad: los límites de la ciencia y la ciencia de los límites.* Gedisa, 1999.
- Martin Bojowald. *Antes del big bang.* Debate, 2011.

Web:

En esta página de Internet encontrarás las aplicaciones de vectores en aspectos diarios. http://www.eduteka.org/proyectos.php/1/6039. y en este link puedes profundizar en las magnitudes vectoriales: https://www.youtube.com/watch?v=u3U5R8Ktwlc

EN CONTEXTO:

Existen magnitudes, como la masa y el tiempo, que quedan definidas con una cantidad y una unidad.

Son algunas magnitudes escalares.

En cambio, para definir otras magnitudes, como las fuerzas, necesitamos además una dirección y un sentido.

A estas magnitudes las denominamos vectoriales.

Busca información y **cita** otras tres magnitudes vectoriales.

CONTENIDOS:

1. **Vectores**
   1.1. Vectores fijos
   1.2. Vectores equipolentes
   1.3. Vectores libres
   1.4. Operaciones con vectores
   1.5. Base de V_2
   1.6. Dependencia de vectores
   1.7. Componentes de un vector en una base
   1.8. Componentes de un vector determinado por dos puntos
   1.9. Operaciones con vectores expresados por sus componentes
   1.10. Ángulo entre dos vectores
   1.11. Vector unitario
   1.12. Coordenadas de un punto en el plano

140 141

Eje temático	
Vectores	

Criterio de evaluación

- Emplea vectores geométricos en el plano y operaciones en R2, con aplicaciones en física y en la ecuación de la recta; utiliza métodos gráficos, analíticos y tecnológicos.

Elementos del perfil de salida a los que se contribuye

- I.2. Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos e información posibles.
- I.3. Sabemos comunicarnos de manera clara en nuestra lengua y en otras, utilizamos varios lenguajes como el numérico, el digital, el artístico y el corporal; asumimos con responsabilidad nuestros discursos.

Destrezas con criterios de desempeño

Álgebra y funciones

- Graficar vectores en el plano (coordenadas) identificando sus características: dirección, sentido y longitud o norma.
- Calcular la longitud o norma (aplicando el teorema de Pitágoras) para establecer la igualdad entre dos vectores.
- Sumar, restar vectores y multiplicar un escalar por un vector de forma geométrica y de forma analítica, aplicando propiedades de los números reales y de los vectores en el plano.
- Resolver y plantear problemas de aplicaciones geométricas y físicas (posición, velocidad, aceleración, fuerza, entre otras) de los vectores en el plano, e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.
- Realizar las operaciones de adición entre elementos de R2 y de producto por un número escalar de manera geométrica y analítica aplicando propiedades de los números reales.
- Reconocer los vectores como elementos geométricos de R2.
- Calcular el producto escalar entre dos vectores y la norma de un vector para determinar la distancia entre dos puntos A y B en R2 como la norma del vector (AB) .
- Reconocer que dos vectores son ortogonales cuando su producto escalar es cero, y aplicar el teorema de Pitágoras para resolver y plantear aplicaciones geométricas con operaciones y elementos de R2, apoyándose en el uso de las TIC (software como Geogebra, calculadora gráfica, applets en Internet).

Indicadores para la evaluación del criterio

- Grafica vectores en el plano; halla su módulo y realiza operaciones de suma, resta y producto por un escalar; resuelve problemas aplicados a la Geometría y a la Física. (I.2.)
- Realiza operaciones en el espacio vectorial R2; calcula la distancia entre dos puntos, el módulo y la dirección de un vector; reconoce cuándo dos vectores son ortogonales; y aplica este conocimiento en problemas físicos, apoyado en las TIC. (I.3.)

Objetivos del área por subnivel

- O.M.5.4. Valorar el empleo de las TIC para realizar cálculos y resolver, de manera razonada y crítica, problemas de la realidad nacional, argumentando la pertinencia de los métodos utilizados y juzgando la validez de los resultados.

Objetivo integrador del área por subnivel

- OI.5.4. Reflexionar sobre los procesos de transformación social, los modelos económicos, la influencia de la diversidad de pensamiento, los aportes tecnológicos, económicos y científicos de diferentes culturas, y su impacto en el desarrollo de un plan de vida basado en El respeto a la diversidad.
- OI.5.9. Asumir su responsabilidad en la construcción de una sociedad equitativa a partir del reconocimiento de la igualdad natural de los seres humanos, del enfoque de derechos y de los mecanismos de participación democrática.

Básicos imprescindibles | Básicos deseables

Eje temático	Destrezas con criterio de desempeño
	Graficar vectores en el plano (coordenadas) identificando sus características: dirección, sentido y longitud o norma.
	Calcular la longitud o norma (aplicando el teorema de Pitágoras) para establecer la igualdad entre dos vectores.
	Sumar, restar vectores y multiplicar un escalar por un vector de forma geométrica y de forma analítica, aplicando propiedades de los números reales y de los vectores en el plano.
	Reconocer los vectores como elementos geométricos de R2.
	Calcular el producto escalar entre dos vectores y la norma de un vector para determinar la distancia entre dos puntos A y B en R2 como la norma del vector (AB) .
	Reconocer que dos vectores son ortogonales cuando su producto escalar es cero, y aplicar el teorema de Pitágoras para resolver y plantear aplicaciones geométricas con operaciones y elementos de R2, apoyándose en el uso de las TIC (software como Geogebra, calculadora gráfica, applets en Internet).
	Aplicar el producto escalar entre dos vectores, la norma de un vector, la distancia entre dos puntos, el ángulo entre dos vectores y la proyección ortogonal de un vector sobre otro, para resolver problemas geométricos, reales o hipotéticos, en R2.
	Aplicar el producto escalar entre dos vectores, la norma de un vector, la distancia entre dos puntos, el ángulo entre dos vectores y la proyección ortogonal de un vector sobre otro, para resolver problemas geométricos, reales o hipotéticos, en R2.
	Realizar las operaciones de adición entre elementos de R2 y de producto por un número escalar de manera geométrica y analítica aplicando propiedades de los números reales.
	Resolver y plantear problemas de aplicaciones geométricas y físicas (posición, velocidad, aceleración, fuerza, entre otras) de los vectores en el plano, e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.
	Calcular la distancia de un punto P a una recta (como la longitud del vector formado por el punto P y la proyección perpendicular del punto en la recta P´, utilizando la condición de ortogonalidad del vector dirección de la recta y el vector) en la resolución de problemas (distancia entre dos rectas paralelas).

<table>
<tr><td>LOGO INSTITUCIONAL</td><td colspan="4">NOMBRE DE LA INSTITUCIÓN</td><td colspan="3">AÑO LECTIVO</td></tr>
<tr><td colspan="8">PLAN DE UNIDAD TEMÁTICA</td></tr>
<tr><td colspan="8">1. DATOS INFORMATIVOS:</td></tr>
<tr><td>Docente:</td><td>Nombre del docente que ingresa la información</td><td>Área/asignatura:</td><td>MATEMÁTICA</td><td>Grado/ Curso:</td><td>1° BACHILLERATO</td><td>Paralelo:</td><td></td></tr>
<tr><td>N.º de unidad de planificación:</td><td>4</td><td>Título de unidad de planificación:</td><td>VECTORES</td><td colspan="2">Objetivos específicos de la unidad de planificación:</td><td colspan="2">Proponer soluciones creativas a situaciones concretas de la realidad</td></tr>
<tr><td>PERÍODOS</td><td colspan="2"></td><td colspan="3">SEMANA DE INICIO:</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="8">2. PLANIFICACIÓN</td></tr>
<tr><td colspan="6">DESTREZAS CON CRITERIOS DE DESEMPEÑO A SER DESARROLLADAS:</td><td colspan="2">CRITERIOS DE EVALUACIÓN</td></tr>
<tr><td colspan="6">
• Graficar vectores en el plano (coordenadas) identificando sus características: dirección, sentido y longitud o norma.
• Sumar, restar vectores y multiplicar un escalar por un vector de forma geométrica y de forma analítica aplicando propiedades de los números reales y de los vectores en el plano.
• Resolver y plantear problemas de aplicaciones geométricas y físicas (posición, velocidad, aceleración, fuerza, entre otras)
• de los vectores en el plano e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.
• Calcular el producto escalar entre dos vectores y la norma de un vector para determinar distancia entre dos puntos A y B en R como la norma del vector AB
• Reconocer que dos vectores son ortogonales cuando su producto escalar es cero y aplicar el teorema de Pitágoras para Resolver y plantear aplicaciones geométricas con operaciones y elementos de R apoyándose en el uso de las TIC (software como Geogebra, calculadora gráfica, applets en internet).
• Escribir y reconocer la ecuación vectorial y paramétrica de una recta a partir de un punto de larecta y un vector dirección o a partir de dos puntos de la recta.
</td><td colspan="2">CE.M.5.6. Emplea vectores geométricos en el plano y operaciones en R, con aplicaciones en física y en la ecuación de la rmétodos gráficos, analíticos y tecnológicos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE</td><td colspan="2">RECURSOS</td><td colspan="2">INDICADORES DE LOGRO</td><td colspan="2">TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN</td></tr>
<tr><td colspan="2">Experiencia

Representación de vectores en el plano a partir de sus coordenadas de otros datos.

Resolución de problemas de aplicación concreta de los vectores en el plano.</td><td colspan="2"></td><td colspan="2">I.M.5.6.1. Grafica vectores en el plano; halla su módulo y realiza opersuma, resta y producto por un escalar; resuelve problemas aplicados a la Geometría y a la Física. (I.2.)</td><td colspan="2">Comprobar el desarrollo de las destrezas necesarias para el manejo de vectores en el plano y sus características, graficación, norma,</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Aplicación
¿Por qué es importante el uso y aplicación de los vectores en el plano?
Planteamiento y resolución de problemas de aplicación de vectores (problemas de desplazamiento, fuerza, etc.)
Conceptualización
Uso de diagramas que resuman los principales conceptos, propiedades y procedimientos con magnitudes vectoriales y escalares.
Uso de softwares que refuercen la aplicación de vectores y sus operaciones.
Reflexión
¿Qué diferencia el conjunto de los números reales del resto de conjuntos estudiados?
Identificación, en ejercicios o problemas, de las elementos de un vector y sus componentes
Reflexión y análisis sobre la aplicación de vectores en el entorno</td><td>- Texto
- Cuaderno
- Videos (sitios web)
- Pizarra
- Calculadora</td><td>I.M.5.6.2. Realiza operaciones en el espacio vectorial R; calcula la distre dos puntos, el módulo y la dirección de un vector; reconoce cuando dos vtores son ortogonales; y aplica este conocimiento en problemas físicen las TIC. (I.3.)
I.M.5.6.3. Determina la ecuación de la recta de forma vectorial y paridentifica su pendiente, la distancia a un punto y la posición relarectas, la ecuación de una recta bisectriz, sus aplicaciones reales, la vsus resultados y el aporte de las TIC. (I.3.)</td><td colspan="2">Operaciones con vectores algebraicas, en forma gráfica y en forma analítica, así como para la resolución de problemas de aplicación. El estudiante debe ser capaz de calcular el producto de un número por un vector, el producto
Escalar entre vectores, la ortogonalidad, la distancia entre dos puntos, el ángulo entre dos vectores; determinar la posición relativa de dos rectas; describir la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola (tanto en su forma cartesiana como en su forma paramétrica), y, en general, resolver aplicaciones geométricas de vectores en R.</td></tr>
<tr><td colspan="5">ELEMENTOS DEL PERFIL DE SALIDA</td></tr>
<tr><td colspan="5">I.2. Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para Resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos e información posibles.
I.3. Sabemos comunicarnos de manera clara en nuestra lengua y en otras, utilizamos varios lenguajes como el numérico, el digital, el artístico y el corporal; asumimos con Responsabilidad nuestros discursos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">ELABORADO</td><td>REVISADO</td><td colspan="2">APROBADO</td></tr>
<tr><td colspan="2">Docente:</td><td>Director del área :</td><td colspan="2">Vicerrector:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Firma:</td><td>Firma:</td><td colspan="2">Firma:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fecha:</td><td>Fecha:</td><td colspan="2">Fecha:</td></tr>
</table>

Vectores en R3 o Vectores tridimensionales

Existen otras magnitudes que necesitan, además del valor numérico asignado, una dirección y un sentido para quedar perfectamente determinadas. Si queremos saber la posición de un estudiante en el interior de una clase respecto de la puerta, no nos bastaría con medir la distancia que existe entre el estudiante y la puerta, sino que además habría que especificar la dirección. La posición de un objeto respecto de otro es una magnitud vectorial, también lo son la velocidad, la aceleración, etc.

Un vector libre, geométricamente puede ser caracterizado por un segmento orientado en el espacio, el cual contiene:

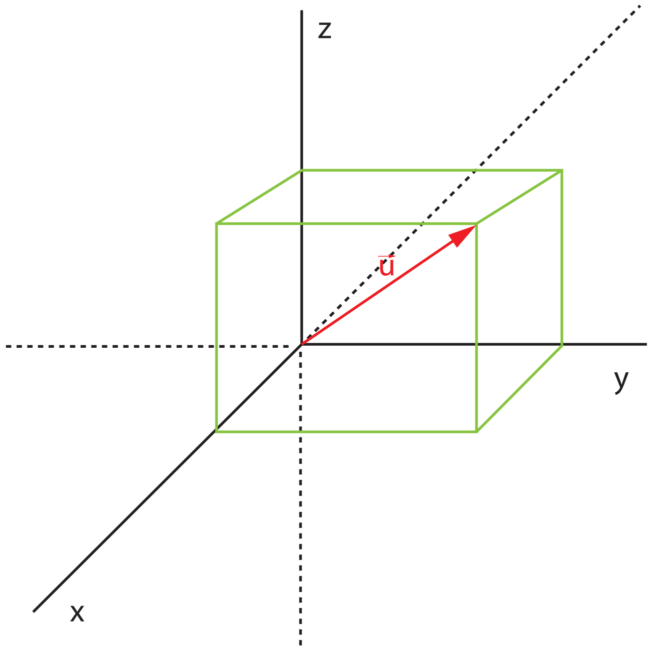
Un origen, a considerar cuando interese conocer el punto de aplicación del vector.

Una dirección o línea de acción, que coincide con la de la recta que la contiene o cualquier otra recta paralela.

Un sentido, que viene determinado por la punta de hecha localizada en el extremo del vector.

La resolución de problemas en tres dimensiones se simplifica si los vectores se representan en forma vectorial cartesiana; por lo tanto, utilizaremos estas expresiones.

Un vector puede tener uno, dos o tres componentes rectangulares a lo largo de los ejes coordenados x, y, z, dependiendo de la forma como el vector se encuentre orientado en relación con sus ejes. Considerando un vector en el primer octante (que tiene las tres componentes positivas) como muestra la figura, se podrán representar las componentes,



Si las coordenadas de A y B son: A(x1, y1, z1) y B(x2, y2, z2), las coordenadas o componentes del vector (AB) son las coordenadas del extremo menos las coordenadas del origen:(AB) = (x2-x1, y2-y1, z2-z1).

Módulo de un vector

El módulo de un vector es la longitud del segmento orientado que lo define.

El módulo de un vector es un número siempre positivo y solamente el vector nulo tiene módulo cero.

Cálculo del módulo conociendo sus componentes

$$\text{Si } |\vec{u}| = (u_1, u_2, u_3), \text{ entonces:}$$

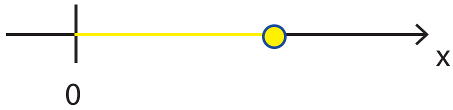
$$|\vec{u}| = \sqrt{u_2^1 + u_2^2 + u_3^2}$$

Cálculo del módulo conociendo las coordenadas de los puntos

$$A(x_1, y_1, z_1) \qquad B(x_2, y_2, z_2)$$

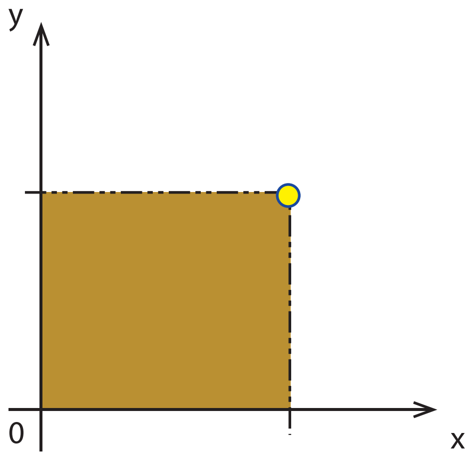
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + (Z_2 - z_1)^2$$

Los vectores y la animación audiovisual



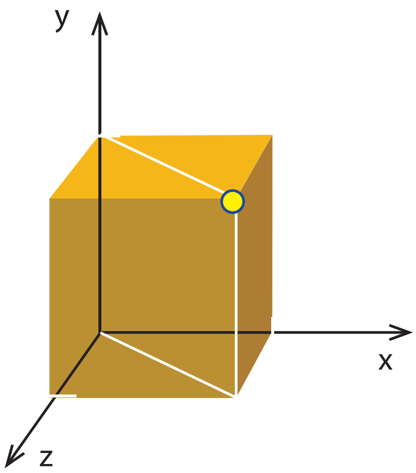
Una de las aplicaciones de los vectores es la creación de animaciones de gráficos vectoriales. A partir de programas informáticos, el usuario crea y edita imágenes con la computadora.

El enlace http://links.edebe.com/i3sz9c te facilitará información sobre los gráficos vectoriales y el tipo de imágenes que produce. ¿Qué diferencia existe respecto a las imágenes creadas a partir de mapas de bits?



Vectores y navegación aérea

Habitualmente, el piloto navega usando los instrumentos de vuelo, mecanismos que permiten una travesía en condiciones seguras sin que sea necesario el contacto visual con el terreno. En áreas con cobertura de radar, el controlador aéreo puede recibir diferentes rumbos y altitudes representadas en forma de vector. Además, con el sistema automático ILS (Instrumental Landing System), un avión es guiado con precisión durante la aproximación a la pista de aterrizaje y, en algunos casos, a lo largo de esta. Para llevar a cabo estas pruebas de navegación aérea, se utilizan simuladores de vuelo doméstico.



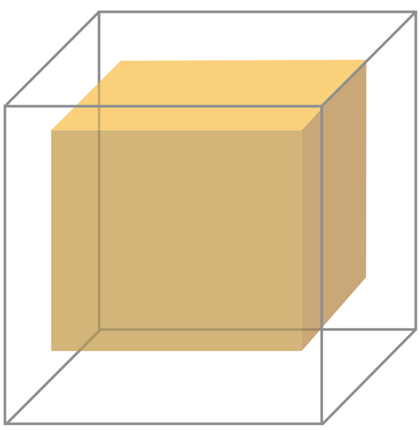
Einstein y la teoría de la relatividad

«Los problemas de espacio y tiempo se piensan durante la infancia; yo lo hice cuando ya había crecido».

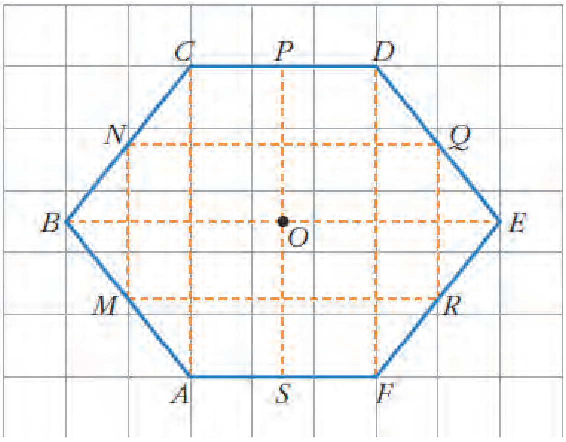
Esta frase pertenece al científico alemán Albert Einstein (1879 - 1955), quien, entre 1905 y 1915, publicó sus teorías de la relatividad sobre la localización de los sucesos físicos. En estos escritos, habló por primera vez del tiempo como una cuarta dimensión indispensable para ubicar un objeto en el espacio en un momento determinado.

Según Einstein: «la cuarta dimensión es la dimensión física en que el tiempo es añadido a la tercera dimensión del espacio».

La cuarta dimensión, por lo tanto, es la dirección en el espacio con ángulo recto a las tres direcciones observables.



1. **Observa** la figura siguiente , que muestra al hexágono ABCDEF, y responde verdadero o falso , según corresponda:



$\overrightarrow{FR} = \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NC}$

$\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{DE}$

$\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{DE}$

2. Si $|\vec{u}| = 3$ y $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = -11$, halla $|\vec{v}|$.

   a) 20 b) $\sqrt{20}$ c) 2 d) $\sqrt{2}$

3. **Indica** si el resultado de las siguientes operaciones es un número o un vector:

   a. $2\vec{a}\cdot\vec{b}$ b. $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$

   c. $(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot\vec{c}$ d. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

4. Las componentes de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en una base ortonormal son $\vec{u} = (1,2)$ y $\vec{v} = (7+k,k)$ Halla el valor de k sabiendo que los vectores $3\vec{u}-\vec{v}$ y $2\vec{u}+\vec{v}$ son ortogonales.

5. **Halla** un vector de módulo 2 de la misma dirección y sentido contrario que $\vec{v} = (-3,4)$

6. Los vectores $[\overrightarrow{AB}]$ y $[\overrightarrow{PA}]$ verifican

   $[\overrightarrow{AB}] = 2.[\overrightarrow{PA}]$

a. **Halla** el valor de r en la siguiente igualdad.

   $[\overrightarrow{PB}] = r.[\overrightarrow{AP}]$

b. **Halla** las coordenadas del punto *P*

   si $A = (-1,4)$ y $B = (-7,8)$.

7. **Calcula** el valor de k para que los vectores $\vec{u} = (-1,k)$ y $\vec{v} = (12+k,k)$ sean perpendiculares.

a. **Halla** un vector v de módulo 2 sabiendo que forma un ángulo de 60° con el vector $\vec{w} = (1,\sqrt{3})$

9. Dados los vectores $\vec{u} = (3,-4)$, $\vec{v} = (5,k)$

   halla el valor de k para que:

   a. $\vec{u},\vec{v}$ sean perpendiculares.

   b. $\vec{u},\vec{v}$ sean paralelos.

   c. $\vec{u},\vec{v}$ formen un ángulo de 180°.

10. Si $\vec{u} = (-2,5)$, $\vec{v}(1,-4)$ son las coordenadas de dos vectores respecto de una base, halla las coordenadas respecto de la misma base de:

    a. $2\vec{u}\cdot\vec{v}$ b. $\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}$

    c. $3\vec{u}-\vec{v}$ d. $-\frac{1}{3}\vec{u}+2\vec{v}$

11. Dados los vectores $\vec{a}(3,-2)$, $\vec{b}(-1,2)$ y $\vec{c}(0,-5)$, calcula m y n de modo que: $\vec{c} = m\vec{a}+n\vec{b}$

12. **Calcula** k para que el producto $\vec{u}\cdot\vec{v}$ sea igual a 0 en los siguientes casos:

    a. $\vec{u}(6,k)$, $\vec{u}(-1,3)$

    b. $\vec{u}\left(\frac{1}{5},-2\right)$, $\vec{v}(k,\ 3)$

    c. $\vec{u}(-3,-2)$, $\vec{v}(5,k)$

13. Tenemos los siguientes puntos en el plano enumerados de modo consecutivo A = (0, 0), B = (-2, 2), C, D = (2, 2). Calcula, sin representarlas, las coordenadas del punto C para que represente un cuadrado.

Nombre: ______________________ Fecha: ______________

14. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores no nulos. **Indica** qué ángulo forman en los siguientes casos:
 a. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|$
 b. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
 c. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}|\,|\vec{b}|$
 d. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0{,}5\,|\vec{a}|\,|\vec{b}$

15. **Halla** el valor de la componente x para que el vector $(5, x)$ sea perpendicular al vector $(-9, 15)$.

16. Queremos dividir en tres partes iguales el segmento que une los puntos A y B cuyas coordenadas son $A = (-4, 7)$ y $B = (11, 13)$. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos en que queda dividido el vector?

17. Las coordenadas de dos vértices consecutivos de un paralelogramo son $A = (1, -2)$ y $B = (6, 1)$. El centro del paralelogramo es $M = (0, 2)$. **Calcula** las coordenadas de los otros dos puntos.

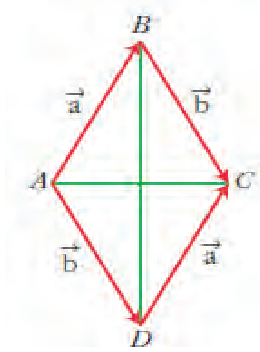
18. Dado el vector $\vec{w} = (x, 12)$:
 a. **Halla** el valor de x para que $\vec{w}$ sea ortogonal al vector $\vec{u} = (-4, -3)$
 b. **Halla** el módulo de ambos vectores.
 c. **Transforma** el vector $\vec{w}$ en un vector unitario con la misma dirección y el mismo sentido.

19. **Halla** las coordenadas de cierto vector $\vec{x}$, sabiendo que forma un ángulo de $60°$ con $\vec{a}\ (2, 4)$ y que los módulos de ambos son iguales.

20. Sean los vectores $\vec{u} = (3, -4)$ y el vector $\vec{v} = (-5, 12)$, calcula:
 a. El producto escalar de ambos vectores.
 b. El módulo de cada vector.
 c. El ángulo que forman ambos vectores.

21. Un auto viaje 20 km. hacia el norte, y a partir de allí 35 km. a 60^0 en dirección noroeste. **Encuentra** el módulo y la dirección del vector desplazamiento total.

22. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ los vectores que definen los lados de un rombo, partiendo de uno de sus vértices (cada vector determina un par de lados paralelos):



 a. **Expresa** las diagonales del rombo en función de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.
 b. **Demuestra** vectorialmente que las diagonales del rombo son perpendiculares.

23. Un jugador de billar quiere lanzar la bola blanca situada en el punto A = $(-18, 12)$ para que golpee directamente a la bola roja, situada en el punto B = $(12, 20)$. ¿Cuál es el ángulo con el que debe situar el taco para conseguirlo? (Considera que el origen de coordenadas se encuentra en el centro de la mesa).

24. Un avión vuela 200 km rumbo al oeste desde la ciudad A hasta la ciudad B y después 300 km en la dirección de 30 grados al noroeste de la ciudad B hasta la ciudad C.
 a. En línea recta, que tan lejos está la ciudad C de la ciudad A.
 b. Respecto de la ciudad A, ¿ en qué dirección está la ciudad C?

25. Un perro que busca un hueso camina 3,5 metros hacia el sur, después 8,2 metros en un ángulo de 30^{o} al Nor-Este y finalmente 15 metros al Oeste. Encuentra el vector de desplazamiento resultante del perro utilizando técnicas gráficas.

1. a. $\overrightarrow{FR}=\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{NC}$ (Verdadero)
   b. $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ tienen igual dirección (falso)
   c. $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{DE}$ (verdadero)
   d. $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{DE}$(falso)
2. Si $|\vec{u}|= 3$ y $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = -11$, $|\vec{v}| =\sqrt{20}$, opción b
3. a. $2\vec{a} \cdot \vec{b}$ Número
   b. $(\vec{a} \cdot \vec{b})\, \vec{c}$ Vector
   c. $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot \vec{c}$ Número
   d. $(\vec{a} +\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ Número
4. $3\vec{u} - \vec{v} = 3. (1, 2) - (7 + k, k) = (-4 - k, 6 - k)$
   $2\vec{u} + \vec{v} = 2. (1, 2) + (7 + k, k) = (2,4) + ((7 + k,k) =$
   $=(9 + k, 4 + k)$
   $(3\vec{u} - \vec{v}). (2\vec{u} + \vec{v}) = 0$
   $(-4 - k, 6 - k). (9 + k, 4 + k) = 0$
   $(-4 - k).(9 + k) + (6 - k).(4 + k) = 0$
   $(-36 - 13k - k^2) + (24 + 2k - k^2) = 0$
   $-2k^2 - 11k - 12 = 0$

$$k = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4\cdot(-2)\cdot(-12)}}{2\cdot(-2)} = \frac{11 \pm \sqrt{25}}{-4} =$$

$$= \frac{11 \pm 5}{-4} = \begin{cases} k_1 = -4 \\ k_2 = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

   Los posibles valores de k son k = -4 y k = -3/2.
5. Hallamos un vector unitario $\vec{u}$ de la misma dirección y sentido contrario que $\vec{v} = (-3, 4)$.

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$$

$$\vec{u} = -\frac{1}{|\vec{u}|}\cdot\vec{u} = -\frac{1}{5}\cdot(-3,\ 4) = \left(\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$$

Si multiplicamos este vector por 2 obtendremos un vector de módulo 2 de la misma dirección y sentido contrario que $\vec{v}$.

$$2.\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = \left(\frac{6}{5}, -\frac{8}{5}\right)$$

Por tanto, hemos hallado un vector de componentes $\left(\frac{6}{5}, -\frac{8}{5}\right)$

6. a. $[PB] = [PA] + [AB] = [PA] + 2.[PA]$
$=3. [PA] = -3. [AP]$
El valor de r es -3.
b. Representamos por las coordenadas del punto P.
$[AB] =(-6, 4)$ $[PA]=(-1, -p_1, 4 - p_2)$
$[AB] = 2.[PA]$
$(-6,4) =2. (-1, -p_1, 4 - p_2)$
$(-6,4) =(-2, -2p_1, 8 - 2p_2)$

$$\begin{cases} -6 = -2 - 2p_1 \\ 4 = 8 - 2p_2 \end{cases}$$

$-6 + 2= -2p_1 \Rightarrow -4 = -2p_1 \Rightarrow p_1 =2$
$4 - 8 = -2p_2 \Rightarrow -4 = -2p_2 \Rightarrow p_2 =2$
Las coordenadas del punto P son $P = (2, 2)$.

7. Dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es cero. Así pues, calculamos el producto escalar de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
$\vec{u} \cdot \vec{v}= (-1,k) \cdot (12 + k, k) = -12 - k + k^2 = 0\Rightarrow$
$\Rightarrow k = -3, k = 4$
8. Representamos por $\vec{v}= (x, y)$ el vector que buscamos.
$|\vec{v}| = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2}= 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$
$\cos 60^0=\dfrac{1x + \sqrt{3}y}{\sqrt{1 + (\sqrt{3})^2}\,.2}\Rightarrow\dfrac{1}{2} = \dfrac{x + \sqrt{3}\,y}{4} \Rightarrow x + \sqrt{3}y = 2$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + \sqrt{3}y = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad x= 2-\sqrt{3}y$$

$(2-\sqrt{3}y)^2 + y^2 = 4$
$4-4\sqrt{3}y + 3y^2 + y^2=4 \Rightarrow 4y^2 - 4\sqrt{3}y =0 \Rightarrow$

$$4y\cdot(y - \sqrt{3}) = 0 \begin{cases} y = 0 \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$y = 0: \quad x = 2 - \sqrt{3}\cdot 0 = 2 \qquad \vec{v}_1 = (2,\ 0)$$

$$y = \sqrt{3}: x = 2 - \sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 2 - 3 = -1 \quad \vec{v}_2 = (-1,\ \sqrt{3})$$

Los vectores v_1 y v_2 verifican las condiciones el enunciado.

9. a. Dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es cero.
$\vec{u} \cdot \vec{v} = (3,-4) \cdot (5,k) = 15-4k = 0 \Rightarrow k = 15/4$
b. Dos vectores son paralelos si se cumple lo siguiente:
$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{-4}{k} \Rightarrow k = -\frac{20}{3}$$
c. Los dos vectores forman un ángulo de 180° si se cumple lo siguiente:
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos 180°$$
$$(3,-4) \cdot (5,k) = \sqrt{25} \cdot \sqrt{5^2 + k^2} \cos 180°$$
$$\Rightarrow 15 - 4k = 5 \cdot \sqrt{25 + k^2} \cdot (-1) \Rightarrow 15 - 4k = -5\sqrt{25 + k^2}$$
$$\Rightarrow (15 - 4k)^2 = 25(25 + k^2) \Rightarrow k = -20/3$$

10. a. $2\vec{u} + \vec{v} = 2(-2,5) + (1,-4) = (-4,10) + (1,-4) = (-3, 6)$
b. $\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} = (-2,5) - \frac{1}{2}(1,-4) = (-2,5) - (\frac{1}{2}, -2) = (-\frac{5}{2}, 7)$
c. $3\vec{u} - \vec{v} = = 3(-2,5) - (1,-4) = (-6,15) - (1,-4) = (-7,19)$
d) $-\frac{1}{3}\vec{u} + 2\vec{v} = -\frac{1}{3}(-2, 5) + 2(1, -4) = (\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}) + (2,-8) = \left(\frac{8}{3}, -\frac{29}{3}\right)$

11. $(0, -5) = m(3, -2) + n(-1, 2) \rightarrow$
$$\begin{cases} 0 = 3m - n \\ -5 = -2m + 2n \end{cases}$$
Resolvemos el sistema:
Despejando en la primera ecuación, n = 3m, y sustituyendo en la segunda:
$-5 = -2m + 6m \rightarrow -5 = 4m \rightarrow m = -\frac{5}{4} \rightarrow n = -\frac{15}{4}$

12. a. $\vec{u} \cdot \vec{v} = (6, k) \cdot (-1, 3) = 0 \rightarrow -6 + 3k = 0 \rightarrow k = 2$
b. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(\frac{1}{5}, -2\right) \cdot (k, 3) = 0 \rightarrow \frac{k}{5} - 6 = 0 \rightarrow k = 30$
c. $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-3, -2) \cdot (5, k) = 0 \rightarrow -15 - 2k = 0 \rightarrow k = -15/2$

13. Un cuadrado es una figura que tiene los lados perpendiculares entre sí y paralelos dos a dos. Cada par de puntos consecutivos representará un lado. Los puntos A, B, C y D definen cuatro lados que deben ser perpendiculares dos a dos y tener el mismo módulo para formar así un cuadrado.
Llamamos (c_1, c_2) a las coordenadas del punto C y definimos los vectores asociados a cada lado.
$\overline{AB} = (-2,2)$, $\overline{BC} = (c_1 + 2, c_2 - 2)$, $\overline{CD} = (2 - c_1, 2 - c_2)$ y $\overline{DA} = (2, 2)$.
Para calcular las coordenadas del punto C hemos de tener presente que $\overline{AB}$ es perpendicular a BC y que $\overline{CD}$ lo es a $\overline{DA}$, y recordar que dos vectores perpendiculares tienen su producto escalar nulo.
$\overline{AB}$ perpendicular a $\overline{BC}$: $-2 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 = 8$
$\overline{CD}$ perpendicular a $\overline{DA}$: $2 \cdot (2 - c_1) + 2 \cdot (2 - c_2) = 0$
Resolvemos el sistema:
$-c_1 + c_2 = 4$ y $c_1 + c_2 = 4$
Obtenemos que las coordenadas del punto C son (0, 4).

14. a. $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 1 \rightarrow (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0°$
b. $\vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 90°$
c. $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = -1 \rightarrow (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 180°$
d. $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0{,}5 \rightarrow (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60°$

15. Dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es cero. Entonces:
$(5, x) \cdot (-9,15) = 0 \Rightarrow 5 \cdot (-9) + x \cdot 15 =$
$= -45 + 15x = 0 \Rightarrow 15x = 45 \Rightarrow x = 3$

16. Calculamos las componentes del vector: $\overrightarrow{AB}$ $(11, 13) - (-4, 7) = (11 + 4, 13 - 7) = (15, 6)$ y dividimos entre 3: $\frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3} \cdot (15, 6) = (\frac{1}{3} \cdot 15, \frac{1}{3} \cdot 6) = (5, 2)$
Sumamos (5, 2) a las coordenadas del punto A: $A1 = (-4, 7) + (5, 2) = (1, 9)$
Para obtener la siguiente división repetimos la operación, pero ahora sobre las coordenadas del punto A_1. El punto resultante es $A_2 = (6, 11)$.
Al repetir la operación, obtenemos las coordenadas del extremo B y ya hemos terminado.

Recurso para la evaluación

17. Sean C = (c_1, c_2) y D = (d_1, d_2) los otros dos vértices del paralelogramo, buscamos el punto medio de las dos diagonales del paralelogramo que son el punto M:
$\Rightarrow d_1 = -6,\ d_2 = 3 \Rightarrow D = (-6, 3)$

18. Dos vectores son ortogonales si su producto escalar es cero. Entonces:
$\vec{w}\cdot\vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{w}\cdot\vec{u} = x\cdot(-4) + 12\cdot(-3) =$
$= -4x - 36 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4x = -36 \Rightarrow x = -9 \Rightarrow \vec{w} = (-9, 12)$

b. Calculamos el módulo de los dos vectores:

$$|\vec{w}| = \sqrt{(-9)^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15$$
$$|\vec{u}| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

c. Para transformar el vector *w* en unitario, calculamos el módulo del vector y dividimos cada componente entre el módulo:

$$|\vec{w}| = 15 \Rightarrow \left(\frac{w_1}{|\vec{w}|}, \frac{w_2}{|\vec{w}|}\right) = \left(-\frac{9}{15}, \frac{12}{15}\right) = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

19. $\left.\begin{array}{l} |\vec{a}| = \sqrt{20} = |\vec{x}| \\ \text{Sea } \vec{x}(m,n) \end{array}\right] \rightarrow \vec{x}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{x}| \cos 60^{o}$

$$\begin{cases} 2m + 4n = \sqrt{20}\cdot\sqrt{20}\cdot\dfrac{1}{2} \rightarrow 2m + 4n = 10 \\ \sqrt{m^2 + n^2} = \sqrt{20} \rightarrow m^2 + n^2 = 20 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene que:
m = 5 - 2n.

$\left.\begin{array}{l} |\vec{a}| = \sqrt{20} = |\vec{x}| \\ \text{Sea } \vec{x}(m, n) \end{array}\right\} \rightarrow \vec{a}\cdot\vec{x} = |\vec{a}|\ |\vec{x}| \cos 60^{o} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} 2m + 4n = \sqrt{20}\cdot\sqrt{20}\cdot\dfrac{1}{2} \rightarrow 2m + 4n = 10 \\ \sqrt{m^2 + n^2} = \sqrt{20} \rightarrow m^2 + n^2 = 20 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema:

$$m = \frac{10 - 4n}{2} = 5 - 2n$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$(5 - 2n)^2 + n^2 = 20 \rightarrow 25 + 4n^2 - 20n + n^2 = 20 \rightarrow n^2 - 4n + 1 = 0$$

$$n = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \begin{cases} n_1 = 0{,}27 \\ n_2 = 3{,}73 \end{cases}$$

- Si $n_1 = 0{,}27 \rightarrow m_1 = 5 - 2\cdot 0{,}27 = 4{,}46 \rightarrow \vec{x}_1 = (4{,}46;\ 0{,}27)$
- Si $n_2 = 3{,}73 \rightarrow m_2 = 5 - 2\cdot 3{,}73 = -2{,}46 \rightarrow \vec{x}_2 = (-2{,}46;\ 3{,}73)$

20. a. $\vec{u}\cdot\vec{v} = (3, -4)\cdot(-5, 12) = 3\cdot(-5) + (-4)\cdot 12 = -63$
b. $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5;$
$|\vec{v}| = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{169} = 13;$

c. $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \dfrac{-63}{5\cdot 13} = \dfrac{-63}{65} \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha = \text{arc cos}\left(\dfrac{-63}{65}\right) = 165{,}75°$

21. Las componentes Rx y Ry del vector resultante por la suma algebraica de las componentes de A y B:
Ax = 0, Ay = 20 km, Bx = 35 cos (180°- 30°) = 35cos 150° = -30.31 km
By = 25 sen (180°- 30°) =35 sen 150°= 17.5 km
La resultante R se calcula como:
$|R| = \sqrt{(-30{,}31)^2\ \text{km}^2 + (17{,}5)^2}$
R = 48,2 km, mientras que la dirección es
La dirección es: α = 120°

22. a) $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ $\quad\overrightarrow{BD} = \vec{b} - \vec{a} = -\vec{a} + \vec{b}$
b. Hay que probar que $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = 0$. Veámoslo:
$AC\cdot BD = (\vec{a} + \vec{b})\cdot(\vec{b} - \vec{a}) = \vec{b}\cdot\vec{b} - \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2$
Como $|\vec{b}| = |\vec{a}|$ por ser la medida de los lados, se cumple que: $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = 0$.

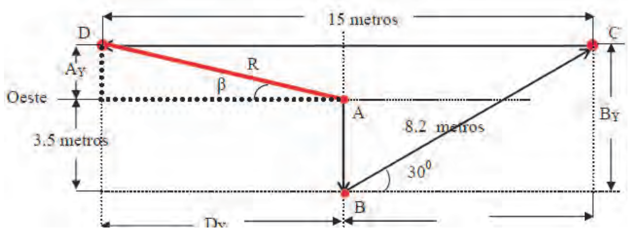
23. Para calcular el ángulo, debemos saber qué vectores lo forman.
Uno de los vectores es $\overrightarrow{AB}$ y el otro es el que tiene como origen el punto A y como extremo el punto C = (0, 12), por ejemplo, ya que este vector es horizontal.
$\overrightarrow{AB} = (12, 20) - (-18, 12) = (30, 8)$
$\overrightarrow{AC} = (0, 12) - (-18, 12) = (18, 0)$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{30\cdot 18 + 8\cdot 0}{\sqrt{30^2 + 8^2}\cdot\sqrt{18^2 + 0^2}} = \frac{30}{\sqrt{964}}$$

$$\alpha = \text{arc cos}\left(\frac{30}{\sqrt{964}}\right) = 14{,}93°$$

24. La ciudad C está a 483,64 km de la ciudad A. La ciudad C está 18,06 grados al noroeste de la ciudad A.

25. El vector desplazamiento es 7,92 m.

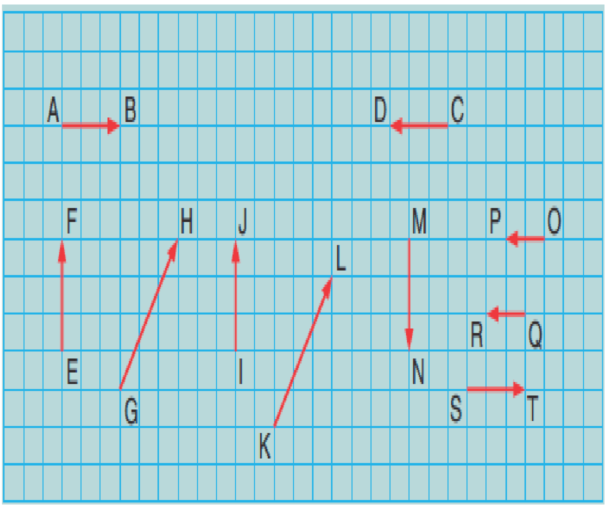


Nombre: ______________________________ Fecha: ____________________

1. **Completa** con las palabras que aparecen en el recuadro de abajo:
Las magnitudes ______________quedan representadas por un ente matemático que recibe el nombre de ____________. Un vector se representa por un segmento________________. Así, un vector queda caracterizado por los siguientes elementos: su_________________, (siempre positivo por definición), su dirección (la de la recta que lo contiene), y su __________ (el que indica la flecha).

sentido	orientado	vector	vectoriales
paralelo	longitud o módulo		

2. **Calcula** el módulo de los vectores representados a la derecha. Para ello, **considera** que el lado de cada uno de los cuadrados equivale a una unidad.
- **Indica** qué vectores tienen la misma dirección.
- **Menciona** dos vectores que tengan la misma dirección y sentido contrario.
- **Indica** qué vectores son equipolentes entre ellos.



3. **Indica** las coordenadas de los puntos *P, Q, R, S* y *T* de la figura 7 en el sistema de referencia R = {O; $\vec{u}$, $\vec{v}$}.

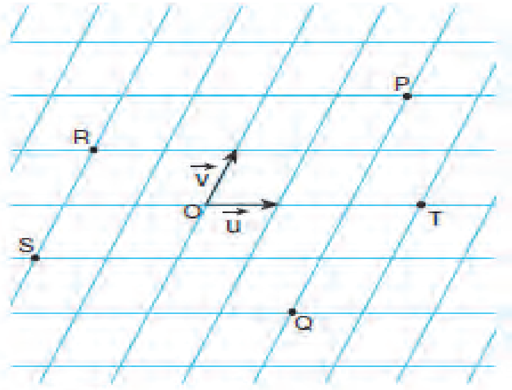
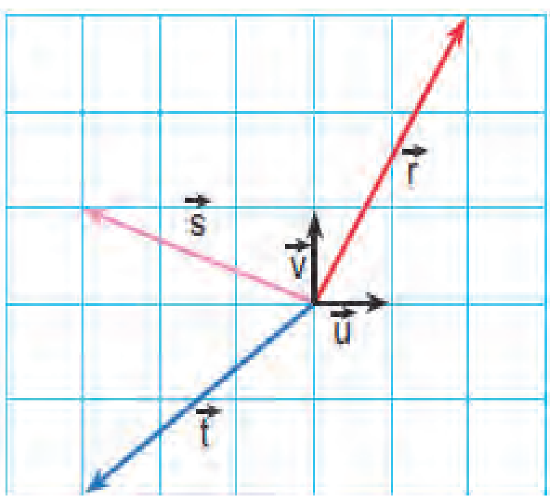


Fig. 7.

4. **Representa** los puntos A (-3,-2), B (3, 2) ,C(2,-3) y los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. **Escribe** las componentes de ambos vectores.

5. **Indica** las componentes de los vectores $\vec{s}$ y $\vec{t}$ de la figura siguiente en la base
$B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$.

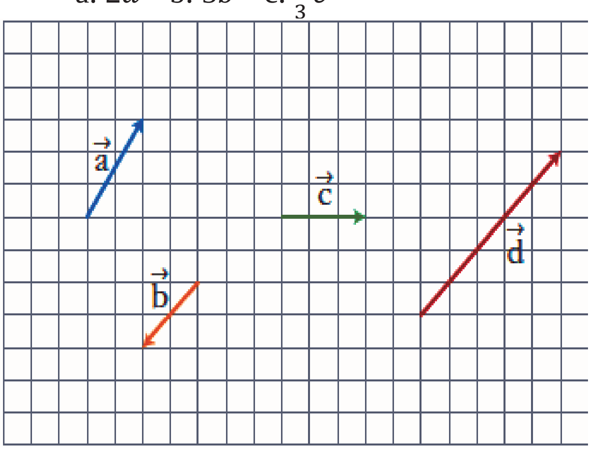
-**Representa** los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ cuyas componentes en la base *B* son (−1,3) y (2, −5), respectivamente.



Nombre: ______________________ Fecha: ______________

6. A partir de la siguiente figura, **representa**:

a. $2\vec{a}$ b. $5\vec{b}$ c. $\frac{1}{3}\vec{c}$

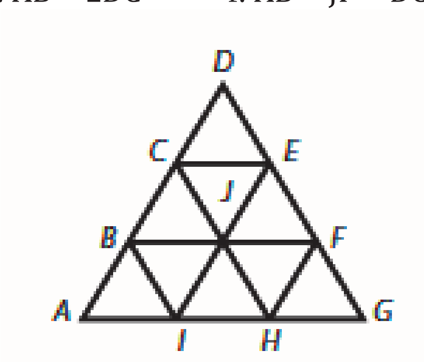


Expresa el vector como producto de uno de los vectores, o por un número.
Designa los vectores anteriores mediante pares de números. Por ejemplo: $\vec{a}$ (2, 3)

7. **Obtén** las coordenadas del extremo del vector $\overrightarrow{AB}$ = (-2, 5) sabiendo que esta aplicado en el punto A (1, -2)

8. A la vista de la siguiente figura, **realiza** las operaciones indicadas.

a. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}$ d. $2\overrightarrow{HI} + 2\overrightarrow{CD}$
b. $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EF}$ e. $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC}$
c. $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{DC}$ f. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{JF} + \overrightarrow{DC}$



9. **Determina** las coordenadas del punto de aplicación del vector $\overrightarrow{AB}$ (2, −3) sabiendo que tiene su extremo en el punto B (-1,2).

10. Dados los vectores $\vec{u} = (3,-2)$ y $\vec{v} = (1,1)$, **calcula** analítica y gráficamente:

a. $\vec{u} + \vec{v}$ b. $\vec{u} - \vec{v}$
c. $2\vec{u}$ d. $-2\vec{v}$

11. **Considera** que *A*, *B*, *C* y *D* son los vértices de un cuadrado de lado 1 cm.
Calcula los siguientes productos escalares.
a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ b. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$ c. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB}$

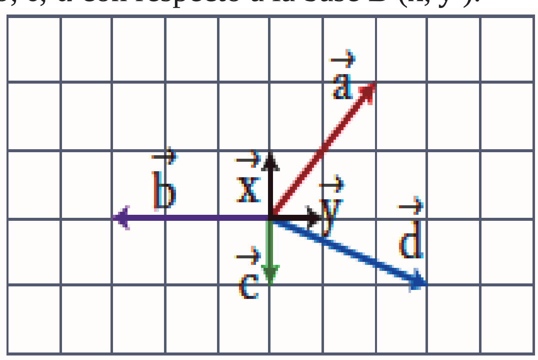
12. Se sabe que las componentes de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en una determinada base son $\vec{u}$+ = (1, −2) y $\vec{v}$= (2, 2), **halla** las componentes de:
a. $\vec{u} + \vec{v}$ b. 3 c. $2\vec{u} - \vec{v}$

13. **Determina** el valor de a, sabiendo que la distancia entre Q(−6, 2) y P(a, 7) es 13.
Escribe también las coordenadas y el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$.

14. **Halla** las coordenadas del punto de aplicación del vector $\overrightarrow{AB}$= (2,-3) sabiendo que tiene su extremo en el punto B(-1,2).

15. Dados los puntos *A* (0, 3), *B* (2, 1), *C* (−2, 2) y *D* (−3, 4), **halla** los vectores.
a. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$
b. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC}$
c. $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CA}$

16. **Escribe** las coordenadas de los vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ con respecto a la base B ($\vec{x}, \vec{y}$).



Trabajo inclusivo

1. Las magnitudes vectoriales quedan representadas por un ente matemático que recibe el nombre de vector. Un vector se representa por un segmento orientado. Así, un vector queda caracterizado por los siguientes elementos: su longitud o módulo, (siempre positivo por definición), su dirección (la de la recta que lo contiene), y su sentido (el que indica la flecha)

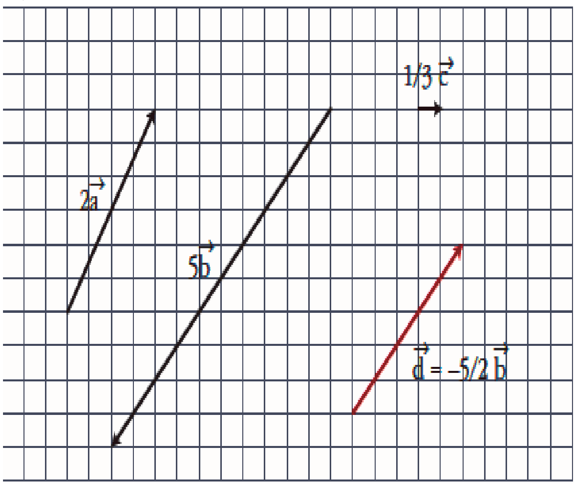
2. Tienen la misma dirección: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PO}$, $\overrightarrow{ST}$ y $\overrightarrow{RQ}$; $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{EF}$ y $\overrightarrow{MN}$.
- Tienen la misma dirección y sentido contrario: $\overrightarrow{EF}$ y $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{QR}$ y $\overrightarrow{ST}$.
- Son equipolentes entre ellos: $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{ST}$, $\overrightarrow{EF}$ y $\overrightarrow{FJ}$, $\overrightarrow{PO}$ y $\overrightarrow{RQ}$, $\overrightarrow{GH}$ y $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{EF}$ y $\overrightarrow{MN}$.

3. $[\overrightarrow{OP}] = 2\vec{u} + 2\vec{v} \Rightarrow P = (2, 2)$
$[\overrightarrow{OQ}] = 2\vec{u} - 2\vec{v} \Rightarrow Q = (2, -2)$
$[\overrightarrow{OR}] = -2\vec{u} + \vec{v} \Rightarrow R = (-2, 1)$
$[\overrightarrow{OS}] = -2\vec{u} - \vec{v} \Rightarrow S = (-2, -1)$
$[\overrightarrow{OT}] = 3\vec{u} \Rightarrow T = (3, 0)$

4. Las componentes de $\overrightarrow{AB}$ son 6 y 4 y de $\overrightarrow{AC}$: 5 y -1

5. $\vec{r} = 2\vec{u} + 3\vec{v} \Rightarrow \vec{r} = (2, 3)$
$\vec{s} = -3\vec{u} + \vec{v} \Rightarrow \vec{s} = (-3, 1)$
$\vec{t} = -3\vec{u} - 2\vec{v} \Rightarrow \vec{t} = (-3, -2)$

6.



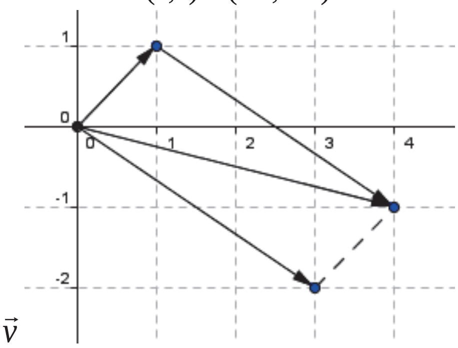
$\vec{d} = -2{,}5\vec{b} = \vec{b}$ $\quad\vec{a}\ (2, 3)$
$\vec{b}\ (-2, -2)$ $\quad\vec{c}\ (3, 0)$
$\vec{d}\ (5, 5)$
- $2\vec{a} = 2\ (2, 3) = (4, 6)$
  $5\vec{b} = 5\ (-2, -2) = (-10, -10)$
  $\frac{1}{3}\vec{c} = \frac{1}{3}(3, 0) = (1, 0)$

7.
$\overrightarrow{AB} = B - A \quad \Rightarrow \quad B = A + \overrightarrow{AB} = (1, -2) + (-2, 5) = (-1, 3)$

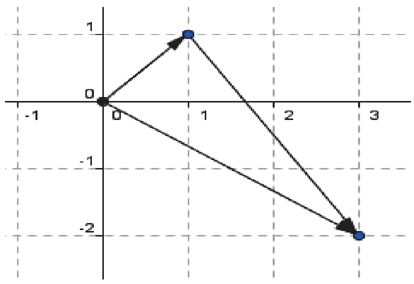
8. a. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AI}$ d. $2\overrightarrow{HI} + 2\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{HC}$
b. $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{IC}$ e. $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CE}$
c. $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC}$ f. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{JF} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AI}$

9.
$\overrightarrow{AB} = B - A \quad \Rightarrow \quad A = B - \overrightarrow{AB} = (-1, 2) - (2, -3) = (-3, 5)$

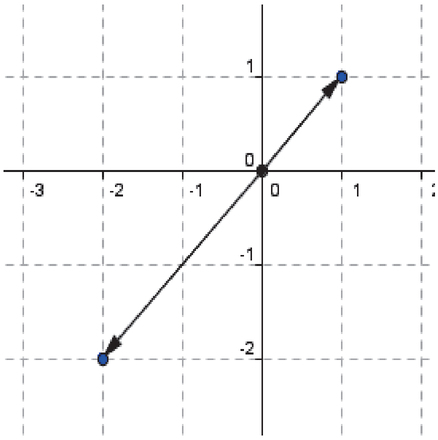
10. a) $\vec{u} + \vec{v} = (3, -2) + (1, 1) = (4, -1)$
b) $\vec{u} - \vec{v} = (3, -2) - (1, 1) = (2, -3)$
c) $2 \cdot \vec{u} = 2 \cdot (3, -2) = (6, -4)$
d) $-2 \cdot \vec{v} = -2 \cdot (1, 1) = (-2, -2)$



$\vec{u} + \vec{v}$



$\vec{u} - \vec{v}$



$-2\vec{v}$

11. Tomamos el punto *A* como origen, por lo que obtenemos las siguientes coordenadas: A(0, 0), B(1, 0), C(1, 1) y D(0, 1).

a. $\overrightarrow{AB} = (1, 0)$, $\overrightarrow{BC} = (0, 1)$

$(1, 0) \cdot (0, 1) = 0$

b. $\overrightarrow{AC} = (1, 1)$, $\overrightarrow{DB} = (1, -1)$

$(1, 1) \cdot (1, -1) = 1 - 1 = 0$

c. $\overrightarrow{AD} = (0, 1)$, $\overrightarrow{CB} = (0, -1)$

$(0, 1) \cdot (0, -1) = -1$

12. a. $\vec{u} + \vec{v} = (1, -2) + (2, 2) = (1 + 2, -2 + 2) = (3, 0)$

b. $3\,u = 3 \cdot (1, -2) = (3, -6)$

c. $2\vec{u} - \vec{v} = 2 \cdot (1, -2) - (2, 2) = (2, -4) - (2, 2) = (2 - 2, -4 - 2) = (0, -6)$

13. $\sqrt{(-6 - a)^2 + (2 - 7)^2} = 13 \rightarrow \sqrt{36 + 12a + a^2 + 25} = 13$

$\rightarrow a^2 + 12a - 108 = 0 \rightarrow a_1 = -18,\ a_2 = 6$

Calculamos las dos soluciones:

$\overrightarrow{PQ} = (-12, -5)$ $\quad \overrightarrow{PQ} = (12, -5)$ $\quad \left|\overrightarrow{PQ}\right| = 13$

14. $\overrightarrow{AB} = B - A \quad \Rightarrow \quad A = B - \overrightarrow{AB} = (-1, 2) - (2, -3) = (-3, 5)$

15. $\overrightarrow{AB} = (2, -2)$; $\overrightarrow{CD} = (-1, 2)$; $\overrightarrow{AC} = (-2, -1)$; $\overrightarrow{DC} = (1, -2)$; $\overrightarrow{BD} = (-5, 3)$; $\overrightarrow{CA} = (2, 1)$

a. (3, -4) b. (-1, -3) c. (-7, 2)

16. $\vec{a} = (2,2)$; $\vec{b} = (0, -3)$; $\vec{c} = (-1,0)$; $\vec{d} = (-1,3)$

CICLO DEL APRENDIZAJE

¿Cómo dinamizo el aula?

Experiencia concreta

Representación de vectores en el plano a partir de sus coordenadas de otros datos.

Resolución de problemas de aplicación concreta de los vectores en el plano.

Observación reflexiva

¿Qué diferencia el conjunto de los números reales del resto de conjuntos estudiados?

Identificación, en ejercicios o problemas, de las elementos de un vector y sus componentes

Reflexión y análisis sobre la aplicación de vectores en el entorno

Conceptualización

Uso de diagramas que resuman los principales conceptos, propiedades y procedimientos con magnitudes vectoriales y escalares.

Uso de softwares que refuercen la aplicación de vectores y sus operaciones.

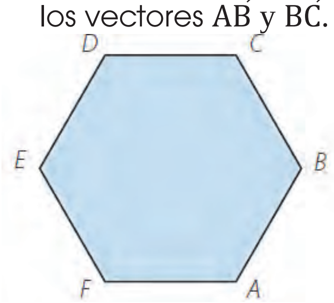
Aplicación

¿Por qué es importante el uso y aplicación de los vectores en el plano?

Planteamiento y resolución de problemas de aplicación de vectores (problemas de desplazamiento, fuerza, etc.)

1. Dados los vectores $\vec{u} = (1, 1)$ y $\vec{v} = (1, -1)$, los valores de a y b que satisfacen la ecuación $a\,\vec{u} + b\,\vec{v} = (3, 5)$ son:
   a. a=2, b=0 b. a=-4, b=1
   c. a=4, b=2 d. a=-2, b=-1
   e. a=4, b=-1

2. **Expresa** los vectores $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{AE}$ y $\overrightarrow{FC}$ de la figura como combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$.



$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{FC} = 2\overrightarrow{AB}$

3. **Halla** m y n para que los vectores $\vec{u}=(3,m)$ y $\vec{v}=(n\ -1)$ sean perpendiculares y se verifique que $\|\vec{u}\|=5$. $m = \pm 4$, $n = \pm 4/3$

4. Determina, sin representarlos, que los puntos A = (1, 2), B = (4, 2) y C = (3, 3) forman un triángulo.

5. Juan y Pedro pasean por una avenida de su ciudad. Empiezan caminando 1 200 m en dirección este y luego giran 1 350 en sentido antihorario y continúan caminando 2 000 m más. Dibuja los vectores que representan los movimientos realizados y averigua el desplazamiento resultante. 3 200 m.

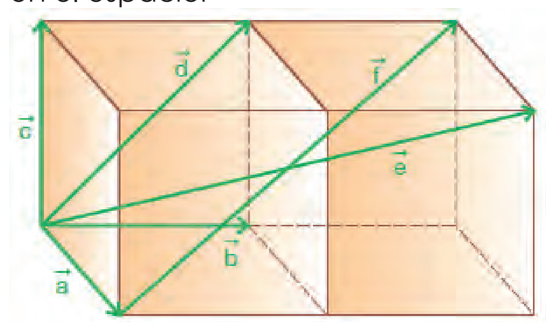
6. Dados los puntos A(3, 0) y B(−3, 0), obtén un punto C sobre el eje de ordenadas, de modo que el triángulo que describan sea equilátero. ¿Hay una solución única? Halla el área de los triángulos que resultan. $A = 9\sqrt{3}\,u^2$

7. Demuestra que el triángulo de vértices A(3, 1), B(9, −1) y C(5, −5) es isósceles. ¿Es equilátero? ¿Cuáles son sus lados iguales? Calcula su área. Es un triángulo isósceles, $\overline{AB} = \overline{AC} = \sqrt{40}$, $A = 16\ u^2$.

8. **Demuestra** que si dos vectores u y v tienen el mismo módulo, entonces u_+ v_ y u_−v_ forman un ángulo recto. **Deduce** de este resultado que las diagonales de un rombo son perpendiculares.

9. **Calcula** m para que $\vec{v} = (7, -2)$ y $\vec{w} = (m, 6)$:
   a. Sean perpendiculares.
   b. Sean paralelos.
   c. Tengan el mismo módulo.
   a. m = -12/7, b. m = -21, c. $m = \sqrt{27}$

10. **Fíjate** en estos seis vectores representados en el espacio:



   a. **Indica** si los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son linealmente independientes.
   b. **Expresa** cada uno de los vectores $\vec{d}$, $\vec{e}$ y $\vec{f}$ en función de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.
   c. Cualquier base del plano tiene dos, y solo dos vectores. ¿Cuántos vectores tendrán una base en el espacio?

11. Queremos arrastrar un barco por el río sabiendo que se aplican los vectores $\vec{v} = (6,8)$ y $\vec{w} = (8,4)$. **Indica** el ángulo que forman ambos vectores, cuáles son las componentes del vector resultante que se aplica al barco y cuál es el módulo de dicho vector. ángulo: 26,57°; resultante: (14, 12); módulo: 18,44

RECURSOS PROPIOS DEL ÁREA

La incorporación de herramientas tecnológicas como recurso didáctico para el aprendizaje de la matemática, especialmente en el caso de que se apliquen estos recursos dentro y fuera del aula.

Así, las principales herramientas TIC disponibles y algunos ejemplos de sus utilidades concretas son:

— Utilización de herramientas simples de algún programa de diseño gráfico.

Como Mathlab, Desmos, Derive, especialmente en esta unidad, para graficar funciones.

—Uso y aplicación de calculadoras gráficas.

— Uso de procesadores de texto para redactar, revisar la ortografía, hacer resúmenes, añadir títulos, imágenes, hipervínculos, gráficos y esquemas sencillos, etc.

— Usos sencillos de las hojas de cálculo para organizar la información (datos) y presentarla, en ocasiones, de forma gráfica.

— Usos simples de bases de datos.

— Utilización de programas de correo electrónico.

— Usos y opciones básicas de los programas navegadores.

- Acceso, entre otras muchas utilidades, a las noticias de prensa (prensa digital) para establecer comparaciones, recabar información actualizada, etc., o para investigaciones bibliográficas.

- Uso de buscadores:
- Extracción de información (enlaces) a partir de los propios directorios de cada buscador principal.
- Uso de los recursos de búsqueda por términos clave en búsquedas simples y avanzadas.
- Usos sencillos de programas de presentación (Powerpoint o similares): trabajos multimedia, presentaciones creativas de contenidos, esquemas, o realización de diapositivas.
- Uso de los recursos de búsqueda por términos clave en búsquedas simples y avanzadas.
- Creación y organización de listas de favoritos, así como seguimiento y actualización de la información de las distintas URL consultadas.

— Uso de enciclopedias virtuales (cd y www).

— Uso de periféricos: escáner, impresoras, etc.

— Puesta en práctica de videoconferencias, chats...

— Usos sencillos de programas de presentación (Powerpoint o similares): trabajos multimedia, presentaciones creativas de textos.

Página 140 - 141

Orientación didáctica

- Para anticipar posibles dificultades en los contenidos de la unidad, proponga en los primeros temas de esta unidad un repaso del concepto de función y las distintas formas en las que se puede expresar una función.
- Una recomendación es que usted aplique la técnica Lluvia de ideas, para que los estudiantes recuerden lo que saben sobre este tema o la técnica Preguntas creativas y aproveche para solucionar todas las dudas que tengan al respecto.

Solucionario de la sección: en contexto

a. Respuesta abierta a modo de reflexión individual que puede servir como introducción a los vectores.

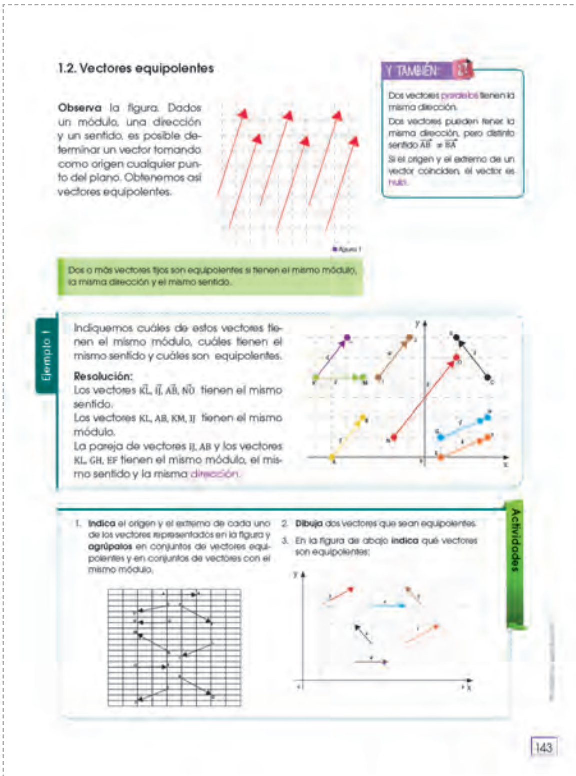
b. En la siguiente página web se puede encontrar alguna información sobre vectores biológicos:

http://links.edebe.com/zfcz3w

Internet

- La equipolencia de dos vectores se demuestra uniendo sus orígenes y sus extremos respectivos. Si el polígono resultante es un paralelogramo, los vectores son equipolentes.

Página 143



Solucionario

Ejercicio 1.

Vector AB: origen A, extremo B

Vector CD: origen C, extremo D

Vector EF: origen E, extremo F

Vector GH: origen G, extremo H

Vector IL: origen I, extremo L

Vector MN: origen M, extremo N

Vector OP: origen O, extremo P

Vector RQ: origen R, extremo Q

Vector ST: origen S, extremo T

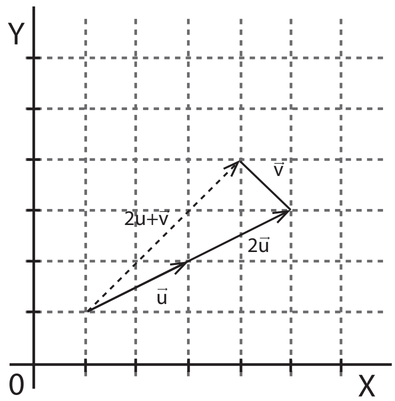
Ejercicio 3

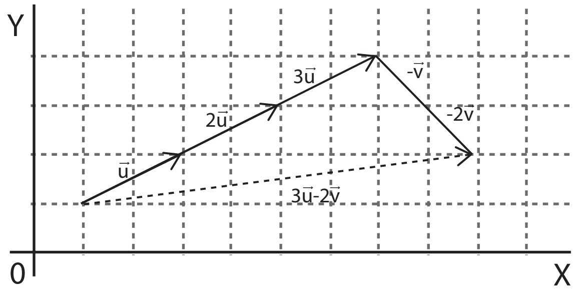
Sabiendo que los vectores equipolentes tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido, tenemos que las parejas de vectores u y t , v y w , (x) y t son equipolentes.

Página 146

Solucionario

Ejercicio 4.





Página 148

Solucionario

Ejercicio 5

Son linealmente independientes los conjuntos a y b.

Página 148

Solucionario

Ejercicio 6

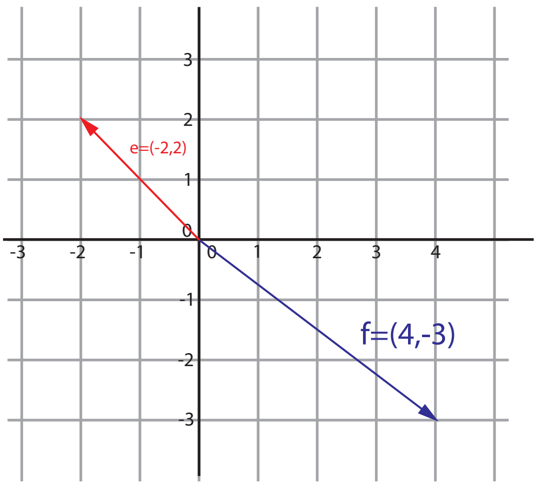
Las componentes de los vectores de la figura son:

Vector a (6,2); vector b (-2,6); vector c (-2,-3);

Vector d (6,-2)

Vector e (6,2)

Vector f (6,2)



Página 150

Solucionario

Ejercicio 7

Las componentes del vector *AB* se obtienen restando las componentes de los puntos A (1, 2) y B (2, -1) *AB* = (2-1) ;(-1-2)= (1,-3)

La distancia entre A y B:

$d = \sqrt{(2-1)^2+(-1-2)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} = 3{,}16$

Página 152

Solucionario

Ejercicio 8

Para calcular las componentes del vector u = (1, 2) yv = (2, -1)

a) $\vec{u} + \vec{v} = (1, 2) + (2, -1) = (3, 1)$

b) $\vec{u} - \vec{v} = (1, 2) - (2, -1) = (-1, 3)$

c) $3\vec{u} - \vec{v} = 3(1, 2) - (2, -1) = (3, 6)-(2, -1) = (1, 7)$

d) $\frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v} = \frac{1}{2}(1,2)+ (2, -1) = (\frac{1}{2}, 1)+ (2, -1) = (\frac{5}{2}, 0)$

Página 156

Solucionario

Ejercicio 9

Para convertir el vector en unitario, calculamos el módulo del vector y dividimos cada componente entre el módulo:

$$|\vec{v}| = \sqrt{8^2+15^2} = \sqrt{289} = \sqrt{17} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \left(\frac{v_1}{|\vec{v}|}, \frac{v_2}{|\vec{v}|}\right) = \left(\frac{8}{17}, \frac{15}{17}\right)$$

Ejercicio 10

Para transformar estos vectores en vectores unitarios, calculamos el módulo del vector y dividimos cada componente entre el módulo:

a) $|(15, -8)| = 15^2 + (-8)^2 = 289 = 17 \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{v} = \left(\frac{15}{17}, \frac{-8}{17}\right)$

b) $|(3, -4)| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow \vec{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$

c) $|(4, 0)| = \sqrt{4^2+0^2} - 4 \Rightarrow \vec{v} - \left(\frac{4}{4}, \frac{0}{4}\right) - (1,0)$

d) $|(2, -3)| = \sqrt{2^2+(-3)^2} = \sqrt{13} \Rightarrow \vec{v} - \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}}\right)$

e) $|(-4, 7)| = \sqrt{(-4)^2+7^2} = \sqrt{65} \Rightarrow \vec{v} - \left(\frac{-4}{\sqrt{65}}, \frac{7}{\sqrt{65}}\right)$

f) $|(-5, -3)| = \sqrt{(-5)^2+(-3)^2} = \sqrt{34} \Rightarrow \vec{v} - \left(\frac{-5}{\sqrt{34}}, \frac{-3}{\sqrt{34}}\right)$

Página 160

Ejercicios y problemas propuestos

1 Vectores en el plano:

1. **Observa** la figura e **indica** cuál de las afirmaciones es cierta.

a. $\vec{w}+\vec{v}=\vec{u}$

b. $\vec{u}+\vec{v}=\vec{w}$

c. $\vec{w}+\vec{u}=\vec{v}$

d. $\vec{w}-\vec{v}=\vec{u}$

2. Dados los puntos $A=(-1,2)$ y $B=(2,0)$ del plano, **determina:**

a. las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$.

b. el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

c. **Representa** gráficamente el vector $\overrightarrow{AB}$.

d. **Determina** un vector unitario en la misma dirección que el vector.

3. **Dibuja** dos vectores cualquiera $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **Demuestra** la propiedad conmutativa de la suma ($\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$). **Utiliza** el programa GeoGebra para demostrar esta propiedad.

TIC

http://goo.gl/U7jP1

4. Dados los vectores $u=(2,-1)$ y $v=(0,3)$.

Determina:

a. El módulo de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

b. El producto escalar de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

c. El ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

5. Si el vector u verifica que $\vec{u}=2\cdot\vec{v}-3\cdot\vec{w}$, **expresa** v como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{w}$.

6. **Dibuja** dos vectores cualquiera $\vec{u}$ y $\vec{v}$ **demuestra** que se cumple:

a. $3\cdot\vec{u}+3\cdot\vec{v}=3\cdot(\vec{u}+\vec{v})$

b. $\vec{u}-\vec{v}=-(\vec{v}-\vec{u})$

7. ¿Es el vector $\vec{u}=(3,4)$ combinación lineal de los vectores $\vec{v}=(3,-3)$ y $\vec{w}=(4,6)$? **Justifica** tu respuesta.

8. **Expresa** en la base canónica los siguientes vectores:

a. $\vec{v}=(-9,4)$

b. $\vec{v}=-(7,-8)$

c. $\vec{v}=-\left(\frac{7}{3},7\right)$

9. Dados los vectores $\vec{v}=(1,3)$, $\vec{w}=(2,-2)$ y $\vec{t}=(5,-1)$, **halla** si existen dos números reales a y b tales que se cumpla $a\cdot\vec{v}+b\cdot\vec{w}=\vec{t}$.

10. **Comprueba** si los vectores $\vec{u}=(-3,4)$ y $\vec{v}=(9,4)$ forman una base. **Justifica** tu respuesta.

11. **Demuestra** que los vectores $\vec{u}=(1,1)$ y $\vec{v}=(1,-1)$ forman una base y, a continuación, **expresa** el vector $t=(4,0)$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

12. Las coordenadas del extremo de cuatro vectores posición son $\vec{A}=(1,1)$, $\vec{B}=(-2,3)$, $\vec{C}=(-2,-1)$ y $\vec{D}=(3,-1)$.

a. **Dibuja** el vector resultante de la suma de los cuatro vectores.

b. **Calcula** las componentes del vector posición resultante.

160

Solucionario

1. La suma de dos vectores cualesquiera, gráficamente, consiste en representar los dos vectores de modo que el extremo del primer vector coincida con el origen del segundo vector. Entonces, el vector suma de estos dos vectores tiene como origen el origen del primer vector y el extremo es el extremo del segundo vector.

Teniendo esto en cuenta, podemos descartar las opciones a y b, ya que no coinciden con lo explicado anteriormente. Por otro lado, la opción d tampoco puede ser la correcta, porque la resta consiste en hacer el opuesto del vector v, en este caso. Así pues, la respuesta correcta es la opción c que, efectivamente, coincide con la explicación de la representación de suma de vectores.

2. a. Las coordenadas del vector *AB* se obtienen restando las componentes de los puntos A (-1,2) y B(2,0),

$$\overrightarrow{AB}=\left(-1-2\right);\left(-2-0\right)=\left(-3,-2\right)$$

b. El módulo del vector AB

$$\overrightarrow{AB}=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$$

c. Representación gráfica del vector AB

d. Determina un vector unitario en la misma dirección que el vector.

3. Representación

4. a. El módulo del vector u :

$$\left|\vec{u}\right|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$$

El módulo del vector v :

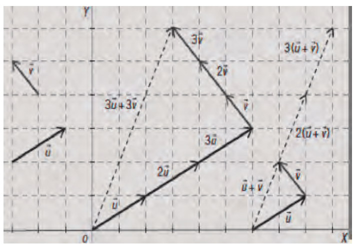
$$\left|\vec{v}\right|=\sqrt{0^2+(3)^2}=3$$

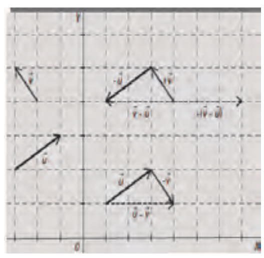
b. El producto escalar de los vectores u y v

c. El ángulo que forman los vectores u y v

5.

$$\vec{u}=2\cdot\vec{v}-3\cdot\overrightarrow{w}=2\cdot\vec{v}\Rightarrow\vec{v}=\frac{1}{2}\cdot\vec{u}+\frac{3}{2}\cdot\overrightarrow{w}$$





6. a. Dibujamos dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ cualesquiera en el plano. En primer lugar, para la primera parte de la igualdad, dibujamos $3\vec{u}$, y después desplazamos el vector $\vec{v}$ hasta el extremo de $3\vec{u}$. A partir de aquí, dibujamos $3\vec{v}$. Uniendo el origen de $3\vec{u}$ con el extremo de 3v, obtenemos el vector 3u+ 3v. Para la segunda parte de la igualdad, dibujamos u y desplazamos el vector v hasta el extremo de u. A continuación, unimos el origen de $\vec{u}$ con el extremo de $\vec{u}+\vec{v}$ y dibujamos $3\cdot(\vec{u}+\vec{v})$.

b. Dibujamos dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ cualesquiera en el plano.

Primero, para la primera parte de la igualdad, dibujamos $\vec{u}$, y después desplazamos el vector $-\vec{v}$ hasta el extremo de $\vec{u}$. Uniendo el origen de $\vec{u}$ con el extremo de $-\vec{v}$, obtenemos el vector $\vec{u}-\vec{v}$. Para la segunda parte de la igualdad, dibujamos $\vec{v}$ y desplazamos el vector $-\vec{u}$ hasta el extremo de $\vec{v}$. A continuación, unimos el origen de v con el extremo de $-\vec{u}$ y hacemos su opuesto para obtener $-(\vec{v}-\vec{u})$.

Ejercicio 7

7. Para ver si el vector $\vec{u}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$, tenemos que ver si existen dos números reales *a* y *b* tal que se cumpla que $\vec{u}$ = a $\vec{v}$ + b $\vec{w}$. Por tanto:

$$(3,4)=a\cdot(3,-3)+b\cdot(4,6)\Rightarrow\left\{\begin{matrix}3=3a+4b\\4=-3a+6b\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\frac{1}{15},b=\frac{7}{10}\Rightarrow\vec{u}=\frac{1}{15}\cdot\vec{v}+\frac{7}{10}\cdot\vec{w}$$

Así pues, el vector u se puede expresar como combinación lineal de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

8. Sean O $:(0,0), r=(1,0), \int=(0,1)$, entonces:

a. $0v=-9\cdot(1,0)+9\cdot(0,1)=-9\int+4\int$

b. $\overrightarrow{0v}=-7\cdot(1,0)+8\cdot(0,1)=-7\int+8\int$

c. $\overrightarrow{0v}=-\frac{7}{3}\cdot(1,0)-7\cdot(0,1)=-\frac{7}{3}\int-7\int$

9. Veamos si existen dos números reales a y b tales que:

$$\vec{t}=a\cdot\vec{v}+b\cdot\vec{w}\Rightarrow$$

$$(5,-1)=a\cdot(1,3)+b(2,-2)\Rightarrow\left\{\begin{matrix}5=a+2b\\-1=3a-2b\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=1,b=2$$

10. Para comprobar que los vectores u y v forman una base, tenemos que ver si son linealmente independientes. Para verlo, hay que comprobar que la relación a · $\vec{u}$ + b · $\vec{v}$ = 0 solo se cumple si *a* y *b* son ambos iguales a 0. Veámoslo:

$$a\cdot(-3,4)+b\cdot(9,4)=0\Rightarrow\left\{\begin{matrix}0=-3a+9b\\0=4a+4b\end{matrix}\right\}\Rightarrow a=0,b=0$$

Como la única solución es a = 0 y b = 0, los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman una base.

11. Para comprobar que los vectores u y v forman una base, tenemos que ver si son linealmente independientes. Para verlo, hay que comprobar que la relación a · $\vec{u}$ + b · $\vec{v}$ = 0 solo se cumple si *a* y *b* son ambos iguales a 0. Veámoslo:

$$a\cdot(1,1)+b\cdot(1,-1)=0\Rightarrow\left\{\begin{matrix}0=a+b\\0=a+b\end{matrix}\right\}\Rightarrow a=0,b=0$$

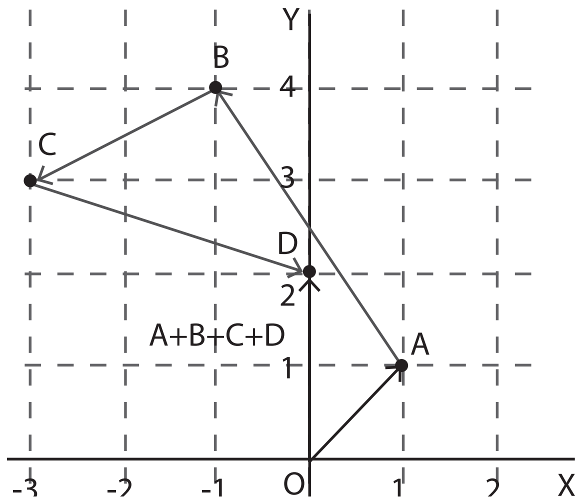
Como la única solución es a = 0 y b = 0, los vectores u y v forman una base.

Ahora, expresamos el vector t como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\vec{t}=a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{v}\Rightarrow(4,0)\ =a\cdot(1,1)+b\cdot(1,-1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{matrix}4=a+b\\0=a-b\end{matrix}\right\}\Rightarrow a=2,b=2\Rightarrow\vec{t}=2\cdot\Rightarrow\vec{t}=2\cdot\vec{u}+2\cdot\vec{v}$$

12. a.



b. $A+B+C+D=(1,1)+(-2,3)+(-2,-1)+(3,-1)=(1-2-2+3,1+3-1-1)=(0,2)$

Página 161

Solucionario

13. Calculamos el vector que forman el punto donde se encuentra el vehículo averiado y el punto donde está situada la instalación del servicio de asistencia mecánica. Después, calculamos su módulo y esta será la distancia que buscamos.

$$(-12,140)-(120,110)=(-132,30)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(-132,30)=\sqrt{132^2+30^2}=\sqrt{18324}=135{,}37$$

Entonces, la distancia entre el vehículo averiado y el servicio de asistencia mecánica es de 135,37 km.

14.

a. $5\cdot(x,y)+(3,-9)-2\cdot(6,8)+(-11,10)=(0,0)$

$$\Rightarrow\begin{cases}5x+3-12-11=0\\5y-9-16+10=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5x-20=0\\5y-15=0\end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow x=4, y=3$

b) $2\cdot(-3,7)+6\cdot(x,-2)-(13,y)=2\cdot(-x,y)+(-91,-49)$

$$\Rightarrow\begin{cases}-6+6x-13=-2x-91\\14-12-y=2y-49\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}8x+72=0\\-3y-51=0\end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow x=-9, y=17$

15. $7\cdot(3,-k)+(-5,-5)=(16,-26)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}21-5=16\\-7k-5=-26\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}16=16\\k=3\end{cases}\Rightarrow$$

16. $\vec{w}+\vec{v}=(7,2)\Rightarrow(x,y)+(-10,8)=(7,2)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-10=7\\y+8=2\end{cases}\Rightarrow x=17, y=-6\Rightarrow\vec{w}=(17,-6)$$

17. $\vec{u}=2+\vec{v}=3.\vec{w}\Rightarrow\vec{u}=2.(-3.r+6\int)-3.(7.\vec{i}-3\vec{j})=6\vec{i}+12\vec{j}-21\vec{i}+9\vec{j}=-27\vec{i}+21\vec{j}$

18. Sean *A1 = (a, b), A_2 = (c, d),* entonces:

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AA_1}\Rightarrow\frac{1}{3}\cdot(9,3)=(a-1,b-3)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(3,1)=(a-1,b-3)\Rightarrow\begin{cases}3=a-1\\1=b-3\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=4, b=4\Rightarrow A_1=(4,4)$$

$$2\cdot\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AA_2}\Rightarrow2\cdot(3,1)=(c-1,d-3)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(6,2)=(c-1,d-3)\Rightarrow\begin{cases}6=c-1\\2=d-3\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow c=7, d=5\Rightarrow A_2=(7,5)$$

19. $|v|=\sqrt{(-5)^2+12^2}=\sqrt{169}=13$

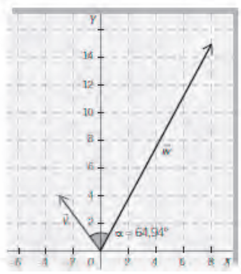
20. $\vec{v}.\vec{w}=v_1\cdot w_1+v_2\cdot w_2=-5\cdot8+12\cdot15=140$

21. Calculamos la proyección del vector u sobre el vector v:

$$\text{Proy}_{\vec{v}}\,\vec{u}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}=\frac{4\cdot5+3\cdot12}{\sqrt{5^2+12^2}}=\frac{56}{13}=4{,}31$$

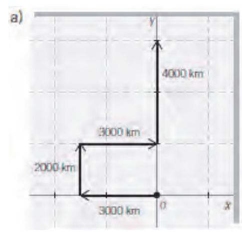
22. $$\cos\alpha=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|}=\frac{-3\cdot8+4\cdot15}{\sqrt{(-3)^2+4^2}\cdot\sqrt{8^2+15^2}}=$$

$$=\frac{36}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{289}}=\frac{36}{85}\Rightarrow\alpha=\arccos\left(\frac{36}{85}\right)=64{,}94=$$



23. $(2\cdot\vec{u})\cdot(-3\cdot\vec{v})=(2\cdot(-2,5))\cdot(-3\cdot(-5,7))=$
$(-4,10)\cdot(15,-21)=-4\cdot15+10\cdot(-21)=-270$

24.



b) La distancia que tiene que recorrer el barco hasta donde se encuentra la ballena es de 6 000 km, es decir, es la suma de 2 000 km y 4 000 km de los kilómetros recorridos por la ballena hacia el norte.

25. El módulo del vector (20, x) es 101. Por tanto:

$$|(20,x)|=101\Rightarrow\sqrt{20^2+x^2}=101\Rightarrow400+x^2=$$

$$=10201\Rightarrow x^2=9801\Rightarrow x=\sqrt{9801}=99$$

Solucionario

26. Con las condiciones del enunciado, tenemos que:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|} = \frac{9}{\sqrt{5}\cdot 5} = \frac{9\sqrt{5}}{25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{9\sqrt{5}}{25}\right) = 36{,}39^{\circ}$$

27. Sabemos que el módulo del vector v es 13. Por tanto:

$$\vec{v} = 12 \Rightarrow \sqrt{k^2+12^2} = 13 \Rightarrow k^2+144 = 169 \Rightarrow k^2 = 25$$

$$k = 5;\ k = -5$$

28.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|} = \frac{-16\cdot 4 + 8\cdot(-2)}{\sqrt{(-16)^2\cdot 8^2}\cdot\sqrt{4^2+(-2)^2}} =$$

$$\frac{-80}{\sqrt{320}\cdot\sqrt{20}} = \frac{-80}{80} = -1 = \alpha = \arccos(-1) = 180^{\circ}$$

29.

$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{4}{3}$. Con las condiciones del enunciado, tenemos que:

$$|\vec{u}| = 8 \Rightarrow \sqrt{u_1{}^2+u_2{}^2} = 8 \Rightarrow u_1{}^2+u_2{}^2 = 64$$

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{4}{3} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u_1\cdot v_2\cdot = v_1\cdot u_2 \\ 3u_2 = 4v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{3}{4}u_2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} v_1 = \frac{3}{4}u_1 \\ v_2 = \frac{3}{4}u_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1\cdot v_1 + u_2\cdot v_2 = u_2\frac{3}{4}u_1 + u_2\cdot\frac{3}{4}u_2 =$$

$$\frac{3}{4}\cdot(u_1{}^2+u_2{}^2) = \frac{3}{4}\cdot(64) = 48$$

30.

$$\cos 60^{\circ} = \frac{v\cdot w}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|} = \frac{4\cdot 7+(-3)\cdot x}{\sqrt{4^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{7^2+x^2}} =$$

$$\frac{28-3x}{\sqrt{5\cdot\sqrt{49+x^2}}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{28-3x}{\sqrt{5\cdot\sqrt{49+x^2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{5\cdot\sqrt{49+x^2}} = 56-6x \Rightarrow x = 2{,}99$$

31. El vector $\vec{AB}$ tiene como origen el punto A y, como extremo, el punto B. Entonces, el opuesto de este vector tendrá como origen el punto B y, como extremo, el punto A. Así pues, el vector opuesto a $\vec{AB}$ viene dado como:

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (7,-4)-(-8,7) = (15,-11)$$

32. El vector cuyo origen es el punto (2, -3) y el extremo es el punto (7, 9) tiene como componentes:

$$(7,9)-(2,-3) = (5,12)$$

33. a. $\overrightarrow{AB} = B - A = (-2,1)-(1,3) = (-3,-2)$

b. $\overrightarrow{BA} = A - B = (1,3)-(-2,1) = (2,2)$

c. $\overrightarrow{DC} = C - D = (3,1)-(-1,2) = (4,-1)$

d. $\overrightarrow{CA} = A - C = (1,3)-(3,1) = (-2,2)$

Página 162

Solucionario

34. Calculamos el vector que forma el punto donde se encuentra el vehículo averiado y el punto donde está situada la instalación del servicio de asistencia mecánica. Después, calculamos su módulo y esta será la distancia que buscamos.

$$(-12,140)-(120,110) = (-132,30) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-132,\ 30) = \sqrt{132^2+30^2} = \sqrt{18324} = 135{,}37$$

Entonces, la distancia entre el vehículo averiado y el servicio de asistencia mecánica es de 135,37 km.

35. Sea $B = (x,y)$, entonces: $\overrightarrow{AB} = B - A =$ $(x,y)-(13,6) = (x-13, y-6)$

Como este vector tiene que ser equipolente al vector u, entonces debe cumplirse que:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} \Rightarrow (x-13,y-6) = (4,-9) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x-13=4 \\ y-6=-9 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x=17 \\ y=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow B = (17,-3)$$

36. El vector de desplazamiento real de la barca es la suma de la dirección de la barca y de la orientación de la corriente. Entonces, resulta el siguiente vector: $(15, 7) + (-3, 4) = (12, 11)$.

Calculamos el módulo de este vector:

$$\left|(12,11)\right| = \sqrt{12^2+11^2} = \sqrt{265} = 16{,}28.$$

37. Empezaremos calculando el vértice C. Como los vértices han de formar un cuadrado, los vectores AB y AC han de ser perpendiculares. Por otro lado, todos los lados del cuadrado deben tener la misma longitud. Así que:

$$\left.\begin{cases}\overrightarrow{AB} = (-2,3)-(-5,-4) = (3,7)\\ \overrightarrow{AC} = (x,y)-(c_1,c_2)-(-5,-4) = (c_1+5, c_2+4) = (x,y)\end{cases}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow (3,7)\cdot(x,y) = 0 \Rightarrow 3x+7y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-7y}{3} \Rightarrow k\cdot\overrightarrow{AC} = \sqrt{58} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k\sqrt{\left(\frac{-7}{3}\right)^2+1^2} = k\sqrt{\frac{58}{9}} = \sqrt{58} \Rightarrow k = -3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x,y) = (7,-3) \Rightarrow\Rightarrow (c_1+5, c_2+4) = (7,-3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} c_1+5 = 7 \Rightarrow c_1 = 2\\ c_2+4 = -3 \Rightarrow c_2 = -7\end{cases}\right\} \Rightarrow c = (2,-7)$$

Para calcular el vértice D, hacemos lo siguiente:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow B-A = D-C \Rightarrow D = B-A+C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = (-2,3)-(-5,-4)+ (2,-7) = (5,0)$$

38. Por el enunciado, sabemos que la diferencia entre la segunda componente del vector y la primera es igual a 7. Por tanto, resulta la siguiente ecuación: $y - x = 7$. Por otro lado, el módulo del vector es 73, así que debe cumplirse:

$$\sqrt{x^2+y^2} = 73 \Rightarrow x^2+y^2 = 5329$$

Resolvemos el sistema que resulta de las dos ecuaciones anteriores:

$$\left.\begin{cases}x^2+y^2 = 5329\\ y-x = 7\end{cases}\right\} \Rightarrow x = 48, y = 55$$

39. Para comprobar que todos los puntos pertenecen a la circunferencia de centro (3, 1). tenemos que ver que los módulos de los vectores formados por los puntos y el centro dan el mismo resultado. En este caso, el módulo es el radio de la circunferencia.

Veámoslo, siendo E = $(3, 1)$:

$$\overrightarrow{AE} = E-A = (3,1)-(7,4) = (-4,-3) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AE}\right| =$$

$$\sqrt{(-4)^2+(-3)^2} = 5$$

$$\overrightarrow{BE} = E-B = (3,1)-(-2,1) = (5,0) \Rightarrow \left|\overrightarrow{BE}\right| =$$

$$\sqrt{5^2+0^2} = 5$$

$$\overrightarrow{CE} = E-C = (3,1)-(6,-3) = (-3,4) \Rightarrow \left|\overrightarrow{CE}\right| =$$

$$\sqrt{(-3)^2+4^2} = 5$$

$$\overrightarrow{DE} = E-D = (3,1)-(7,-2) = (-4,3) \Rightarrow \left|\overrightarrow{DE}\right| =$$

Por tanto, todos los puntos pertenecen a la circunferencia de radio 5.

40. Para saber qué tipo de triángulo forma los puntos A, B y C, hemos de calcular el módulo de los vectores. Es decir:

$$\overrightarrow{AB} = B-A = (3,2)-(1,3) = (2,-1) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| =$$

$$\sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{BC} = C-B = (4,5)-(3,2) = (1,3) \Rightarrow \left|\overrightarrow{BC}\right| =$$

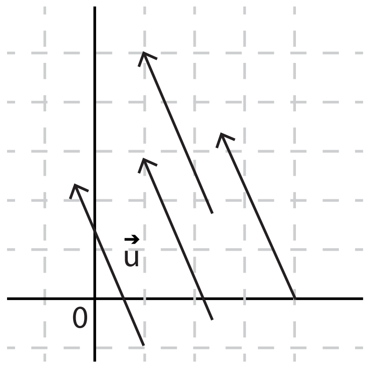
$$\sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{5}$$

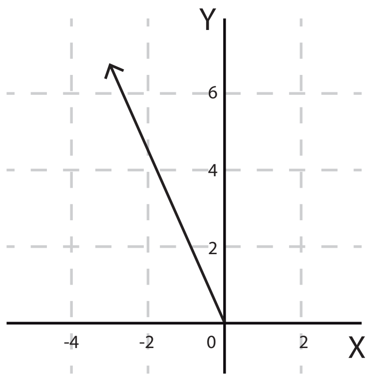
$$\overrightarrow{AC} = C-A = (4,5)-(1,3) = (3,2) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right| =$$

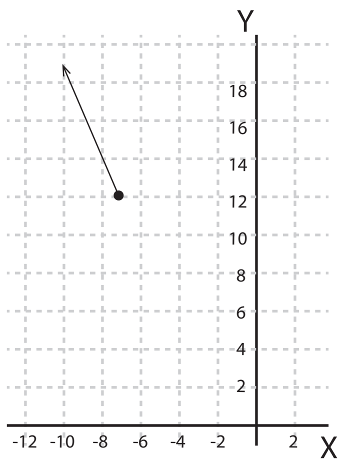
$$\sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$$

Como los módulos son todos diferentes, quiere decir que el triángulo formado por los puntos A, B y C es escaleno.

41.







42. Dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es cero. Por tanto, debemos encontrar un vector u tal que:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Rightarrow(x,y)\cdot(4,3)=0\Rightarrow 4x+3y=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=-\frac{3}{4}y$$

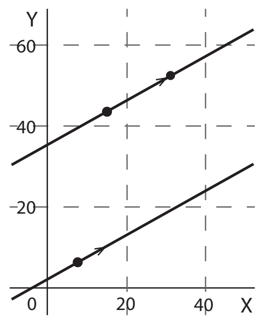
$$\vec{u}=\left(-\frac{3}{4}y,y\right)$$

43. Como el triángulo ha de ser rectángulo, debe cumplir que los vectores $\vec{BA}$ y $\vec{AC}$ sean perpendiculares. Entonces:

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}=0\Rightarrow(3-b_1,-b_2)\cdot(2,2)=0\Rightarrow 3$$

$$b_1+b_2$$

44. Mediante un dibujo, podemos ver claramente que estos dos vehículos no chocarán nunca, ya que con el sentido que llevan ambos no se llegarán a encontrar. Si situamos estos puntos en un eje de coordenadas, observamos que el punto de intersección entre las rectas determinadas por cada vector director que sigue cada vehículo se encuentra en el cuarto cuadrante, por lo que nunca chocarán.



45. La distancia entre dos puntos es calcular el módulo del vector formado por ellos.

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(5,7)-(0,x)=(5,7-x)$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=13\Rightarrow\sqrt{5^2+(7-x)^2}=$$

$$\sqrt{x^2+14x+74}=13\Rightarrow x=-5$$

46. Para saber qué helicóptero llegará primero a la posición del camión, calculamos la distancia a la que se encuentra el camión de cada helicóptero y la de menor valor será la del helicóptero que llegue primero. Es decir, calculamos los módulos de los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=B-A=(-21,100)-(14,140)=$$

$$=(-35,-40)$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-35)^2+(-40)^2}=\sqrt{2825}=53{,}15$$

$$\overrightarrow{AC}=C-A=(40,73)-(14,140)=(26,-67)$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{26^2+(-67)^2}=\sqrt{5165}=71{,}87$$

Como el módulo entre el punto A y el punto B es más pequeño, entonces, el helicóptero que llegará primero a la posición donde se encuentra el camión es el que está situado en el punto B.

Solucionario

47. Estos puntos se pueden unir en una sola carretera recta si los tres están alineados. Para verlo, calculamos los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$, y comprobamos si son proporcionales:

$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{CA}=A-C=(12,21)-(3,9)=(9,12)\\ \overrightarrow{CB}=B-C=(17,23)-(3,9)=(14,12)\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{9}{14}\neq\frac{12}{12}$$

Como la igualdad anterior no se cumple, los tres puntos no se pueden unir en una sola carretera recta.

48. a. $\left|\overrightarrow{w}\right|=53\Rightarrow\sqrt{28^2+x^2}=53\Rightarrow x=45$

b. $\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{u}=-44\Rightarrow(28,x)\cdot(-5,3)=-44\Rightarrow$

$\Rightarrow-140+3x=-44\Rightarrow x=32$

c. $(28,x)\cdot\left(3,-12\right)=0\Rightarrow 84-12x=0\Rightarrow x=\ 7$

49. a. $-3\cdot\left(x,-2\right)+\left(2x,-6\right)=\left(14,0\right)$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}-3x+2x=14\\ \ \ 6-6\ \ =0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$x=-14$

b. $2\cdot(3x,-9)+3\cdot(-3x,12)-(-3,\ 6)=(-15,\ 12)$

$$\left\{\begin{array}{l}6x-9x+3=-15\\ -18+36-6=12\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}-3x=-18\\ 12=12\end{array}\right\}\Rightarrow x=6$$

50. Para ver si estos puntos forman un trapecio, tenemos que ver si hay dos lados opuestos que sean paralelos. Para ello, calculamos los vectores de los puntos que formen lados que sean opuestos:

$\overrightarrow{BC}=C-B=(10,6)-(3,5)=(7,1)$

$AD=D-A=(7,-1)-(1,1)=(6,-2)$

Como $\frac{2}{3}\neq\frac{4}{7}$, los lados formados por estos puntos no son paralelos. Ahora, hacemos lo mismo para el otro par de lados opuestos:

$\overrightarrow{BC}=C-B=(10,6)-(3,5)=(7,1)$

$AD=D-A=(7,-1)-(1,1)=(6,-2)$

Como $\frac{7}{6}\neq\frac{1}{-2}$, estos lados tampoco son paralelos.

Por tanto, tenemos que estos puntos no forman un trapecio.

51. Vamos a clasificar el triángulo según sus ángulos a partir de las siguientes condiciones:

$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2\leq\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2\rightarrow$ Acutángulo

$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2\rightarrow$ Rectángulo

$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2\geq\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2\rightarrow$ Obstusángulo

Calculamos estos vectores directores y sus módulos, y vemos qué condición se cumple:

$\overrightarrow{AB}=(3,0)-(4,-3)=(-1,3)\Rightarrow$

$\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$

$\overrightarrow{AC}=(0,1)-(4,-3)=(-4,4)\Rightarrow$

$\Rightarrow\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=\sqrt{(-4)^2+4^2}=\sqrt{32}$

$\overrightarrow{BC}=(0,1)-(3,0)=(-3,1)\Rightarrow$

$\Rightarrow\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$

$=\left(\sqrt{32}\right)^2\geq\left(\sqrt{10}\right)^2+\left(\sqrt{10}\right)^2\Rightarrow$

$\Rightarrow 32\geq 10+10\Rightarrow 32\geq 20$

Por tanto, este triángulo es obtusángulo. Por otro lado, observamos que hay dos lados del triángulo con igual longitud y uno diferente. Entonces, también se trata de un triángulo isósceles.

a. La longitud de los lados del triángulo la hemos calculado anteriormente para la clasificación del triángulo haciendo los módulos de los vectores.

$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{10},\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{32},\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{10}$

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=(-1,3)+(-4,4)=(-5,7)$

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=(-1,3)+(-4,4)=(3,-1)$

52. a. $2\cdot\vec{u}+3\cdot\vec{v}-5\cdot\vec{w}=2\cdot(2,5)+3\cdot(-3,4)$
$-5\cdot(5,12)=$
$=(4,10)+(-9,12)+(-25,-60)=(-30,-38)$

b. $2\cdot\vec{u}\cdot(-3\cdot\vec{v})=2\cdot(2,5)\cdot(-3\cdot(-3,4))=$
$=(4,10)\cdot(9,-12)=4\cdot 9-10\cdot 12=-84$

c. $\cos\alpha=\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|}=\dfrac{-3\cdot 5+4\cdot 12}{\sqrt{(-3)^2+4^2}\cdot\sqrt{5^2+12^2}}=\dfrac{33}{65}$

$\Rightarrow \alpha=\arccos\left(\dfrac{33}{65}\right)=59{,}5^{\circ}$

d. Para transformar el vector $\vec{v}$ en unitario, calculamos el módulo del vector y dividimos cada componente entre el módulo.

$$|\vec{v}|=5\Rightarrow \vec{t}=\left(\frac{v_1}{|\vec{v}|},\frac{v_2}{|\vec{v}|}\right)=\left(\frac{-3}{5},\frac{4}{5}\right)$$

e. Para comprobar que los vectores u y v forman una base, tenemos que ver si son linealmente independientes. Para verlo, hay que comprobar que la relación $a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{v}=0$ solo se cumple si a y b son ambos iguales a 0. Entonces:

$$a\cdot(2,5)+b\cdot(-3,4)=0\Rightarrow\left\{\begin{matrix}0=2a-3b\\0=5a+4b\end{matrix}\right\}\Rightarrow a=0, b=0$$

Como la única solución es a = 0 y b = 0, los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman una base.

Ahora, expresamos el vector w como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

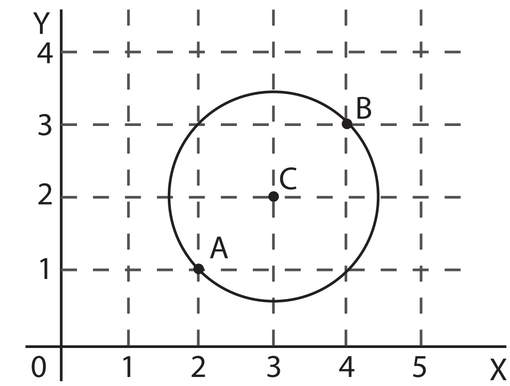
$$\vec{w}=a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{v}\Rightarrow(5,12)=a\cdot(2,5)+b\cdot(-3,4)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left\{\begin{matrix}5=2a-3b\\12=5a+4b\end{matrix}\right\}\Rightarrow a=\frac{56}{23}, b=-\frac{1}{23}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\vec{w}=\frac{56}{23}\cdot\vec{u}-\frac{1}{23}\cdot\vec{v}$$

53. El centro de la circunferencia dados los puntos que delimitan su diámetro es calcular el punto medio de estos dos puntos.

$$c=\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2}\right)=\left(\frac{2+4}{2},\frac{1+3}{2}\right)=(3,2)$$

b. Al radio de la circunferencia lo hallamos calculando el módulo del vector formado por los puntos C y A o B.

$$\vec{AC}=C-A=(3,2)-(2,1)=(1,1)=|\vec{AC}|=$$
$$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$



54. Los vectores $\vec{OK}$ y $\vec{OJ}$ son perpendiculares. Por tanto, su producto escalar es cero, es decir, $\vec{OK}\cdot\vec{OJ}=0$.

b. Los vectores $\vec{KJ}$ y $\vec{IJ}$ forman un ángulo de 45°. Por tanto:

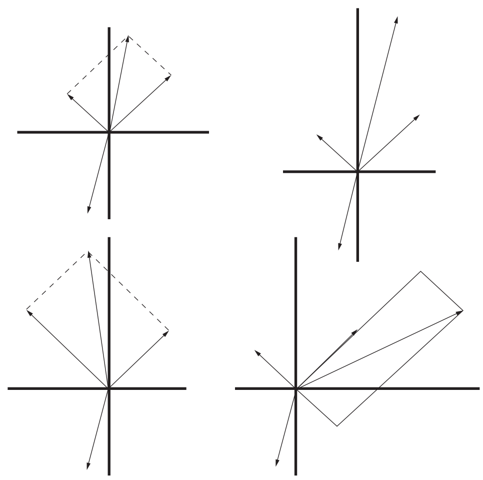
$$\vec{KJ}\cdot\vec{IJ}=\vec{KJ}\ \vec{IJ}\cdot\cos 45^{\circ}=12\cdot 12\cdot\cos 45^{\circ}=101{,}82$$

c. Los vectores $\vec{OL}$ y $\vec{OJ}$ forman un ángulo de 180º. Por otro lado, tenemos que calcular el valor de los lados $\vec{OJ}$ y $\vec{OL}$.

55. Para ello, utilizamos el teorema del coseno:

$$JL^2=JK^2+LK^2-2\cdot JK\cdot LK\cdot\cos 135^{\circ}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow JL^2=12^2+12^2-2\cdot 12\cdot 12\cdot\cos 135^{\circ}\Rightarrow JL=22{,}17$$
$$\Rightarrow|\vec{OJ}|=|\vec{OL}|=\frac{22{,}17}{2}=11{,}09\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\vec{OJ}\cdot\vec{OL}=|\vec{OJ}|\cdot|\vec{OL}|\cdot\cos 180^{\circ}=$$
$$=11{,}09\cdot 11{,}09\cdot\cos 180^{\circ}=-122{,}99$$

56.



57. $\vec{u}=3\vec{i}+3\vec{j}\Rightarrow\vec{u}=(3,3)$

$\vec{v}=-2\vec{i}+2\vec{j}\Rightarrow\vec{v}=(-2,2)$

$\vec{w}=-\vec{i}-4\vec{j}\Rightarrow\vec{w}=(-1,-4)$

a) $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=(3,3)+(-2,2)+(-1,-4)=$
$=(3-2,3+2)+(-1,-4)$
$=(1,5)+(-1,-4)=(1-1,5-4)=(0,1)$

b) $-2\vec{w}=-2\cdot(-1,-4)=$
$=((-2)\cdot(-1),(-4))=(2,8)$

c) $\vec{u}+2\vec{v}=(3,3)+2\cdot(-2,2)=$
$=(3,3)+(-4,4)=(-1,7)$

d) $2\vec{u}-\vec{v}=2\cdot(3,3)-(-2,2)=$
$=(6,6)+(2,-2)=(8,4)$

58. Debemos hallar $k_1,k_2\in\mathbb{R}$ tales que $\vec{ru}=$
$k_1\cdot\vec{rv}+k_2\cdot\vec{rw}$:

$$(-1,2)=k_1\cdot(2,3)+k_2\cdot(1,0)=$$
$$=(2k_1,3k_1)+(k_2,0)=(2k_1+k_2,3k_1)$$

Por tanto, será:

$$\begin{cases}-1=2k_1+k_2\\ 2=3k_1\end{cases}\Rightarrow k_1=\frac{2}{3};k_2=\frac{-7}{3}$$

Se tiene entonces:

$$\vec{u}=\frac{2}{3}\vec{v}-\frac{7}{3}\vec{w}$$

Podemos proceder de manera análoga para expresar rv como combinación lineal de ru y rw, y para expresar rw como combinación lineal de ru y rv, pero es más rápido despejar la expresión (1). Así:

$$\vec{u}=\frac{2}{3}\vec{v}-\frac{7}{3}\quad\Rightarrow\vec{u}+\frac{7}{3}\vec{w}=\frac{2}{3}\vec{v}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{3}{2}\left(\vec{u}+\frac{7}{3}\vec{w}\right)=\vec{v}\Rightarrow\vec{v}=\frac{3}{2}\vec{u}+\frac{7}{2}\vec{w}$$
$$\vec{u}=\frac{2}{3}\vec{v}-\frac{7}{3}\vec{w}\Rightarrow\vec{u}-\frac{2}{3}\vec{v}=\frac{7}{3}\vec{w}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow-\frac{3}{2}\left(\vec{u}+\frac{2}{3}\vec{v}\right)=\vec{w}\Rightarrow\vec{w}=\frac{3}{7}\vec{u}+\frac{2}{7}\vec{v}$$

59. Sea C = (c_1, c_2) el extremo del segmento AC y como B es el punto medio de este segmento, se cumple lo siguiente:

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=B\Rightarrow\left(\frac{-6+c_1}{2},\frac{4+c_2}{2}\right)=(4,-6)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{-6+c_1}{2}=4\\ \frac{4+c_2}{2}=-6\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1=14,c_2=-16\Rightarrow C=(14,-16)$$

60. Calculamos las componentes del vector (AB) y, a partir de ellas, determinaremos los puntos que pide el enunciado.

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(2,-8)-(-2,0)=(4,8)$$

Ahora, dividimos entre 4:

$$\frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}\cdot(4,8)=\left(\frac{1}{4}\cdot4,\frac{1}{4}\cdot8\right)=(1,2)$$

Sumamos (1, 2) a las coordenadas del punto A:

$$A_1=(-2,0)+(1,2)=(-1,2)$$

Para obtener la siguiente división, repetimos la operación, pero ahora sobre las coordenadas del punto A1. El punto resultante es $A_2=(-1,2)+(1,2)=(0,4)$. Haciendo otra vez lo mismo, tenemos que $A3=(0,4)+(1,2)=(1,6)$.

Ahora, al repetir otra vez la operación, obtenemos las coordenadas del extremo B y ya hemos terminado.

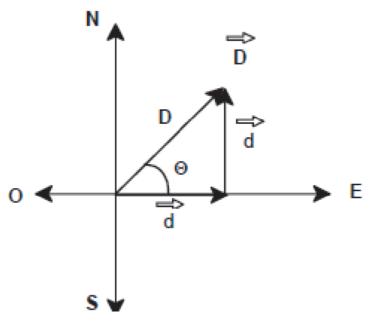
61. Para encontrar las coordenadas del punto B, buscamos las coordenadas del vector AA1 y se las sumamos a las coordenadas del punto A_2.

$$\overrightarrow{AA1}=A_1-A=(1,0)-(-1,-3)=(2,3)$$
$$B=A_2+=(3,3)+(2,3)=(5,6)$$

Problemas de aplicación de vectores en el plano

62. Graficamos el desplazamiento de Paula,

d_1 = 5 km hacia el Este, dibujado a partir del origen del sistema de coordenadas (casa), en el punto final del desplazamiento d1, se coloca el punto inicial del desplazamiento d2, en el que d_2 = 6 km hacia el Norte.



De la figura, se observa que se forma un triángulo rectángulo; por esta razón, para determinar la magnitud del desplazamiento, se aplica el teorema de Pitágoras, obteniéndose:

$D^2 = d_1{}^2 + d_2{}^2$, entonces, $D =$

$\sqrt{25km^2 + 36km^2} = \sqrt{61} \approx 7{,}8km$

Por lo tanto, la escuela está aproximadamente a 7,8 km.

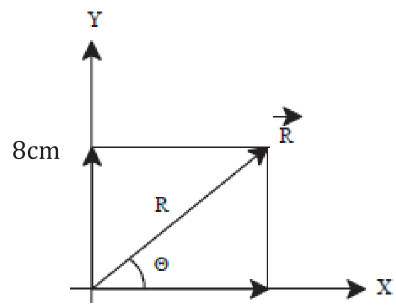
63. v_x = 95,8 y v_y = 72,2

64. a. Sean V_x = 6 cm y V_y = 8 cm las componentes del vector v e n una base ortonormal, se cumple que:

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10cm$$

Entonces: la magnitud del vector v es de 10 cm

b. Representando en el sistema de coordenadas las componentes del vector, observamos que el ángulo entre el vector y eje x, se puede calcular aplicando la razón trigonométrica tangente, pues observamos que, con respecto al ángulo pedido, nos dan el cateto opuesto y el cateto adyacente.



$\frac{8}{6} = 1{,}333$ $\qquad \tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$

$\theta = 53°$

Página 164

Solucionario

65.

$D_x = \left|D\right| \cos\theta = 60km \left(\cos 130°\right) = 60km \left(-0{,}642\ 8\right)$

$D_x = -38{,}57km$

$Dy = \left|D\right| \ \text{sen}\theta = 60km \left(\text{sen } 130°\right) =$

$= 60km. \left(0{,}766\ 0\right)$

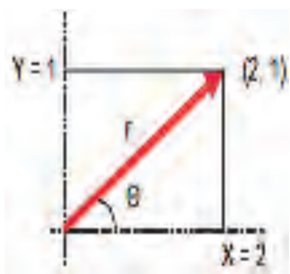
$r = \sqrt{(x)^2 + (y)^2} =$

$r = \sqrt{(2)^2 + (1)^2} =$

$= \sqrt{5} = 2{,}23 \text{ m}$

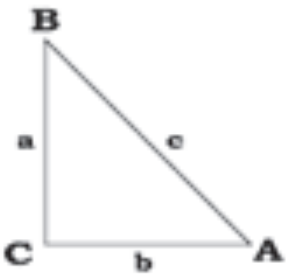
$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$\Theta = 26{,}56°$



67. Cuando ha volado 200 km, la distancia a la que se encuentra el avión al norte del aeropuerto es de 261 km.

68. Nombramos un triángulo ABC, donde ubicamos los datos:



$\hat{B} = 45°$

BC = altura del campanario = 70 metros.

CA = distancia del campanario al parque

Hallamos el segmento CA:

$\tan 45° = AC/BC$

$1 = AC/70\ m$

AC = 70 metros.

Área del triángulo:

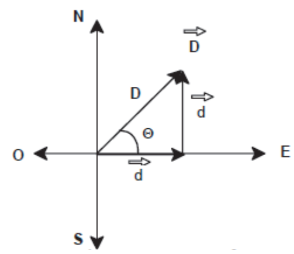
$A = (BC \,.\, AC) / 2$

$Área = (70 \,.\, 70) / 2$

$Área = 70\ m^2$.

69. En la figura representamos el desplazamiento d1 = 3 km hacia el Este, dibujado a partir del origen del sistema de coordenadas (casa del ejecutivo), en el punto final del desplazamiento d1, se coloca el punto inicial del desplazamiento d2, en el que d2 = 4 km hacia el Norte. Para obtener el desplazamiento resultante se emplea el método del triángulo, por lo que se une el punto inicial de d_1 con el punto final de d_2.

De la figura, se observa que se forma un triángulo rectángulo; por esta razón, para determinar la magnitud del desplazamiento, se aplica el teorema de Pitágoras, y se obtiene:



$D^2 = d_1{}^{2+} d_2{}^2$, entonces, $D = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$,

sustituyendo: $D = \sqrt{(3km)^2 + (4km)^2} =$

$= \sqrt{9km^2 + 16km)^2} = \sqrt{25km^2}$.

Por lo tanto, el desplazamiento total que realiza el ejecutivo es de 5 km.

70. Como en el ejercicio anterior, una vez trazado el sistema de coordenadas, se dibujan los desplazamientos d_1 y d_2 y, empleando el método del triángulo, se determina el desplazamiento resultante D, como se ilustra en la figura; en este caso, se tiene que el triángulo es oblicuángulo.

Aquí no se puede emplear el teorema de Pitágoras, porque el triángulo no es rectángulo, así que en este caso se recurre a la ley o teorema de los cosenos para calcular la magnitud del desplazamiento resultante:

$D^2 = d_1{}^2 + d_2{}^2 - 2d_{1.}d_2.\cos\theta$, se tiene que $d_1 = 5$ km, $d_2 = 6$ km y $\theta = 135°$

$D^2 = (5\ km)^2 + (6\ km)^2 - 2(5\ km)(6\ km).\cos 135°$

$D^2 = 25\ km^2 + 36\ km^2 - 60\ km^2(-0.7071)$

$D^2 = 61\ km^2 + 42.42\ km^2 = 103.42\ km^2$

$D^2 = \sqrt{103{,}42\ km^2} = 10.16\ km^2$

Para determinar , la dirección del desplazamiento resultante se emplea la ley de los senos, y se obtiene:

$\frac{sen\alpha}{d_2} = \frac{sen\theta}{D}$ despejando a $sen\alpha$ y sustituyendo

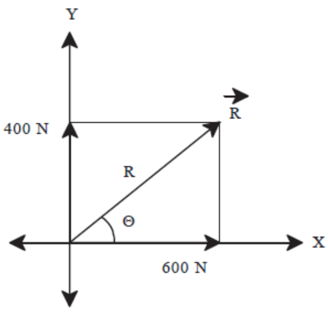
se obtiene: $sen\ \alpha = \frac{sen\theta}{D} \cdot d_2 = \frac{sen135°}{10{,}16km} \cdot (6km) =$

$\frac{0.7071}{10{,}16}$, $sen\alpha = 0{,}417\ 5$, así que despejando el ángulo α resulta que: $\alpha = \text{arc sen}(0.4175) = sen^{-1}(0{,}417\ 5) = 24°\ 40'$.

Por lo tanto, la magnitud del desplazamiento resultante es D = 10,16 km y su dirección es

$\theta = 24°\ 40'$.

71. Haciendo uso de un sistema de coordenadas se dibujan los vectores como se ilustra en la figura, en la que se han colocado las fuerzas coincidiendo en sus puntos iniciales y luego se trazan líneas paralelas a los mismas a partir de los puntos finales. Para terminar, se unen los puntos iniciales con el punto que obtuvo con el cruce de las líneas paralelas.



La figura que se forma es un triángulo rectángulo, así que, aplicando el teorema de Pitágoras y sustituyendo, se tiene que:

$R^2 = (600\ N)^2 + (400\ N)^2 = 360\ 000\ N^2 + 160\ 000\ N^2 R^2$

$= 520\ 000\ N^2$, entonces, calculando la raíz se tiene: $R == 721.11$ N.

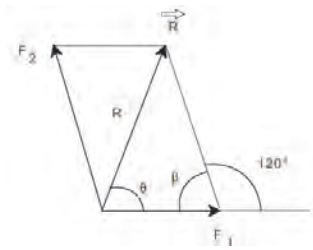
Para obtener la dirección de la fuerza resultante se puede emplear las funciones, seno, coseno y tangente, si se usa la tangente se obtiene:

$$\tan\theta = \frac{400N}{600N} = \frac{4}{6} = 0{,}666\ 6 \text{ despejando el ángulo} \theta$$

$$\theta = \arctan\ (0{,}666\ 6) = \tan^{-1}(0{,}666\ 6) = 33°\ 40'$$

Por lo tanto, en este caso la magnitud de la fuerza resultante es 721.11 N y su dirección es 33° 40'.

72. En este tipo de problemas se puede omitir el sistema de coordenadas y dibujar simplemente los vectores dados con sus magnitudes correspondientes y señalando el ángulo que forman entre sí, como se muestra en la figura siguiente.



Se tiene que

$F1 = 500$ N, $F2 = 800$ N y $\alpha =$ 120°. De la figura se obtiene que $\alpha + \beta =$ 180°, así que $\beta = 60°$. Al sustituir está información en la ley de los cosenos resulta:

$R^2 = F_1^{\,2} + F_2^{\,2} - 2F_1F_2\cos\beta$

$R^2 = (5 \text{ x } 10^2 N)^2 + (8 \text{ x } 10^2 N)^2 - 2(5 \text{ x } 10^2 N)(8 \text{ x } 10^2 N)\cos 60°$

$R^2 = 25 \text{ x} 10^4 N^2 + 64 \text{ x } 10^4 N^2 - 80 \text{ x } 10^4 N^2 (0.5)$

$R^2 = 89 \text{ x} 10^4 N^2 - 40 \text{ x } 10^4 N^2$

$= 49 \text{ x } 10^4 N^2 R == 7 \text{ x } 10^2 N = 700$ N.

Para determinar la dirección, se calcula el ángulo, el cual se indica en la figura y se obtiene empleando la ley de los senos:

$\frac{\operatorname{sen}\theta}{F_2} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{R}$, despejando $\operatorname{sen}\theta$

Sustituyendo se obtiene:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\operatorname{sen}\beta}{R} F_2 = \frac{\operatorname{sen}60^0}{700N}(800N) = \frac{0{,}8660}{700}(800)$$

$\operatorname{sen}\theta = 0{,}989\ 7$, entonces, despejando al ángulo θ se tiene $\theta = \text{arc sen } (0{,}989\ 7) = \text{sen} - 1\ (0{,}989\ 7) =$ 81° 40'; por lo tanto, la magnitud de la fuerza resultante es 700 N y su dirección es de 81° 40'.

73. Se tiene que $F1 = 500$ N, $F2 = 800$ N y $\alpha =$ 120°, de la figura se obtiene que $\alpha + \beta =$ 180°, así que $\beta = 60°$ sustituyendo está información en la ley de los cosenos resulta:

74. Nnn

75.

76. Debemos hallar dos alturas e intersecarlas.

• La altura sobre el lado AC pasa por B y tiene como vector director un vector normal de la recta

$\vec{n}=(6,\ 10)$

$$\Rightarrow \frac{x}{6}=\frac{y-6}{10}\Rightarrow 5x-3y+18=0$$

• La altura sobre el lado BC pasa por A y tiene como vector director un vector normal de la recta BC, es decir,

$$\vec{n}=(10,6)\Rightarrow \frac{x+4}{6}=\frac{y-2}{6}$$

$$\Rightarrow 3x-5y+22=0$$

$$\left.\begin{cases}5x-3y+18=0\\ 3x-5y+22=0\end{cases}\right\}\Rightarrow x=\frac{-3}{2},y=\frac{7}{2}\Rightarrow$$

$$0=\left(\frac{-3}{2},\frac{7}{2}\right)$$

77. Las componentes del vector AB (2; -3) se obtienen restando las componentes de los puntos A y B; por tanto, se trata de hallar las coordenadas del punto A, a partir de las coordenadas de AB y de B (-1, 2).

Resolución: $\overrightarrow{AB}=(-1,2)-\left(A_x,\ A_y\right)=$

$$=(2;-3)=(-1,2)-\left(A_x,\ A_y\right)\Rightarrow x=-3,\ y=5$$

78. Para obtener las componentes de (BA) basta restar las coordenadas de

A = (-3, 7) y B =(5, -4):

$\overrightarrow{BA}=\ ((-3-5,7-(-4))=\ (-8,\ 11)$

El punto medio de los dos puntos es

$$\left(\frac{-3+5}{2},\frac{7-4}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \text{el punto medio es}\left(1,\frac{3}{2}\right)$$

Para hallar las componentes del vector primeramente hallamos sus coordenad

$\overrightarrow{AB}=\ \left(5-\left(-3\right)\right),\ \left(-4-7\right)=\ \left(8,\ -11\right)$, por tanto:

$2.=\ \left(16,\ -22\right)$

79. Sea C = (x, y).

a. $=\overrightarrow{AC}\Rightarrow C-A=\Rightarrow \left(x-3,y-7\right)=\left(4,\ -5\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow\ x=7,\ y=2\Rightarrow\ C=\ \left(7,2\right)$

b. $+2\cdot=3\cdot\ \Rightarrow \left(x-3,y-7\right)+\ 2\cdot\left(x+2,y+3\right)\ =$

$$=\ \left(12,-15\right)\Rightarrow\left.\begin{cases}x-3+2x+4=12\\ y-7+2y-6=-15\end{cases}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{cases}3x=11\\ 3y=-14\end{cases}\right\}$$

$$\Rightarrow x=\frac{11}{3},y\frac{-14}{3}\Rightarrow C=\left(\frac{11}{3},\frac{-14}{3}\right)$$

80. $\overrightarrow{AB}=B-A=\ \left(-2,14\right)-\ \left(-14,\ 9\right)\ =\ \left(12,5\right)\Rightarrow$

$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{169}=13$

81. Sea $\vec{w}=\ \left(x,y\right)$, entonces:

$\vec{w}+3\cdot\vec{v}=(1,4)\Rightarrow(x,y)+\ 3\cdot(8,-6)=(1,4)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\left.\begin{cases}x+24=1\\ y-18=4\end{cases}\right\}\Rightarrow x=-23,\ y=22\Rightarrow\vec{w}=(-23,22)$$

82. $\vec{w}\cdot3\cdot\ \vec{v}=(-3,5)\cdot3\cdot(1,4)=(-3,5)\cdot(3,12)=$

$=-3\cdot3+5\cdot12=51$

83. $\vec{t}=a\cdot\vec{v}+b\cdot\vec{w}\Rightarrow(5,-6)=a\cdot(-1,2)+b\cdot(2,-3)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\left.\begin{cases}5=-a+2b\\ -6=2a-3b\end{cases}\right\}\Rightarrow a=3,b=4$$

84. a. $|(-40,9)|=\sqrt{(-40)^2+9^2}=\sqrt{1681}=41$

b) $\cos\alpha=\dfrac{(-40,9)\cdot(3,7)}{|(-40,9)|\cdot|(3,7)|}=$

$$\frac{-40.3+9\cdot7}{\sqrt{(-40)^2+9^2}\cdot\sqrt{3^2+7^2}}=$$

$$\frac{-57}{41\sqrt{58}}\Rightarrow\alpha=\arccos\left(\frac{-57}{41\sqrt{58}}\right)=100{,}52^\circ$$

c. $(-40,9)\cdot(1,10)=-40\cdot1+9\cdot10=50$

d. Primero, normalizamos el vector (-40, 9) calculando su módulo y dividiendo cada componente entre este.

$$|(-40,9)|=\sqrt{(-40)^2+9^2}=\sqrt{1681}=41$$

$$\Rightarrow\vec{v}=\left(\frac{-40}{41},\frac{9}{41}\right)$$

$$\text{Como}=\left(\frac{-40}{41},\frac{9}{41}\right)=\left(\frac{-80}{41},\frac{18}{41}\right)$$

85. Primero, calculamos los vectores que forman el triángulo:

$\overrightarrow{AB}=B-A=\ \left(3,10\right)-\ \left(6,5\right)\ =\ \left(-3,5\right)$

$\overrightarrow{BC}=C-B=\ \left(1,2\right)-\ \left(3,10\right)\ =\ \left(-2,\ -8\right)$

$\overrightarrow{AC}=C-A=\ \left(1,2\right)-\ \left(6,5\right)\ =\ \left(-5,\ -3\right)$

Ahora, calculamos los ángulos formados por estos vectores:

$$\cos\hat{A}=\frac{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=0\Rightarrow\hat{A}=\arccos(0)=90^\circ$$

$$\Rightarrow\cos\hat{C}=\frac{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC})}{\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{34}{\sqrt{2312}}\Rightarrow\hat{C}=\arccos\left(\frac{34}{\sqrt{2312}}\right)=45^\circ$$

$$\Rightarrow\hat{B}=\ 180^\circ\ -\hat{A}-\hat{C}=180^\circ-90^\circ-45^\circ=45^\circ$$

Página 166

Solucionario

Para finalizar...

1.

a. Un conjunto de vect ores equipolentes son linealmente dependientes entre ellos. (verdadero)

b. En el plano, dos vectores no nulos de diferente dirección siempre son linealmente independientes.

c. Tres vectores del plano, no nulos y de diferente dirección, son linealmente independientes.

d. La suma de dos vectores con el mismo origen, módulo y dirección es un vector cuyo módulo es el doble del módulo de los originales.

2. Mmmm

3. a. $\left[\overrightarrow{AD}\right]+\left[\overrightarrow{DB}\right]=\overrightarrow{AB}$

b. $\left[\overrightarrow{AM}\right]-\left[\overrightarrow{AB}\right]=\overrightarrow{BM}$

c. $\left[\overrightarrow{AD}\right]+\left[\overrightarrow{AB}\right]-\left[\overrightarrow{BC}\right]=\overrightarrow{CD}$

d. $\left[\overrightarrow{AB}\right]+\frac{1}{2}-\left[\overrightarrow{BD}\right]=\overrightarrow{AM}$

4. Según la gráfica dada las componentes de u son (2,1), las de v (-1,2) y las de a (2,3)

Se trata de hallar dos números reales,

$k_1 y k_2$, de manera que: $=k_1\cdot +k_2\cdot\vec{v}$

Sustituimos las componentes correspondientes:

$(2,3)=k_1\cdot(2,1)+k_2\cdot(-1,2)=$

$=(2k_1,k_1)+(-k_2,2k_2)\Rightarrow$

$\Rightarrow(2,3)=(2k_1-k_2,k_1+2k_2)$

Finalmente, igualamos componentes y obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases}2=2k_1-k_2\\3=k_1+2k_2\end{cases}$$

Resolvemos el sistema y obtenemos: $k_1=\frac{7}{5}$ y $k_2=\frac{4}{5}$.

Por lo tanto: $\vec{a}=\frac{7}{5}\cdot\vec{u}+\frac{4}{5}\cdot\vec{v}$

Las componentes de $\vec{b}(-6,4)$ $\vec{b}=k_1\cdot\vec{u}+$

Sustituimos las componentes:

$(-6,4)=k_1\cdot(2,1)+k_2\cdot(-1,2)=$

$=(2k_1,k_1)+(-k_2,2k_2)\Rightarrow$

$\Rightarrow(-6,4)=(2k_1-k_2,k_1+2k_2)$

Finalmente, igualamos componentes y obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases}-6=2k_1-k_2\\4=k_1+2k_2\end{cases}$$

Resolvemos el sistema y obtenemos: $k_1=\frac{-8}{5}$ y $k_2=\frac{14}{5}$.

Por lo tanto: $\vec{b}=\frac{-8}{5}\cdot\vec{u}+\frac{14}{5}\cdot\vec{v}$

Las componentes de $\vec{c}(-6,-3)$ $\vec{c}=k_1\cdot\vec{u}+k_2\cdot\vec{v}$

Sustituimos las componentes:

$(-6,-3)=k_1\cdot(2,1)+k_2\cdot(-1,2)=$

$=(2k_1,k_1)+(-k_2,2k_2)\Rightarrow(-6,-3)=(2k_1-k_2,k_1+2k_2)$

Finalmente, igualamos componentes y obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases}-6=2k_1-k_2\\-3=k_1+2k_2\end{cases}$$

Resolvemos el sistema y obtenemos: $k_1=-3$ y $k_2=0$.

Las componentes de $\vec{d}(1,-3)$ $\vec{d}=k_1\cdot\vec{u}+k_2\cdot\vec{v}$

Sustituimos las componentes:

$(1,-3)=k_1\cdot(2,1)+k_2\cdot(-1,2)=(2k_1,k_1)+(-k_2,2k_2)\Rightarrow$

$\Rightarrow(1,-3)=(2k_1-k_2,k_1+2k_2)$

Finalmente, igualamos componentes y obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases}1=2k_1-k_2\\-3=k_1+2k_2\end{cases}$$

Resolvemos el sistema y obtenemos:

$k_1=\frac{-1}{5}$ y $k_2=\frac{28}{5}$.

Por lo tanto: $\vec{d}=\frac{-1}{5}\cdot\vec{u}+\frac{28}{5}\cdot\vec{v}$

5. Según la gráfica dada las componentes de $\vec{u}$ son $(1,1)$, las de $\vec{v}=(1,-1)$ $\vec{a},(6,0)$ $\vec{b},(4,2)$ $\vec{c},(-5,2)$

$\vec{a}=k_1\cdot\vec{u}+k_2\cdot\vec{v}$

$\vec{a}=3\vec{u}+3\cdot\vec{v};$

$\vec{b}=3\vec{u}+\vec{v};$

$\vec{c}=\frac{-3}{2}\cdot\vec{u}-\frac{7}{2}\cdot\vec{v}$

Página 167

ZONA

UD. 4

Vectores

Utilización de ideas geométricas en la navegación, la arquitectura y el arte

La utilización de vectores no es exclusiva del ámbito matemático.
Los vectores son un caso particular de sistema de coordenadas, por lo que se emplean para resolver problemas en muchos ámbitos científicos, artísticos y tecnológicos.
En cartografía hacemos uso de vectores, pero expresados en coordenadas distintas de las rectangulares (x, y). Utilizamos coordenadas esféricas, y hablamos de longitud y latitud en vez de abscisa y ordenada. En astronomía y en navegación marítima podemos determinar la latitud a partir de la altura de los astros. Esta altura viene dada por el ángulo que forma con los ejes fijos en el observador el vector que une el astro con el origen de los ejes. Es de uso habitual en observación astronómica.
Asimismo, los controladores aéreos de los aeropuertos utilizan vectores para describir la posición de los aviones en cada instante.

Al trabajar con vectores de más de dos componentes, pueden obtenerse las denominadas superficies regladas.
Estas son muy utilizadas en arquitectura y en el arte porque pueden reproducirse plásticamente mediante hilos tirantes y pueden generarse con un conjunto de rectas.

Los vientos se representan con una línea, que a veces puede acabar en un círculo y contiene información de la dirección en que soplan y la velocidad.

En los siguientes enlaces encontrarás más información:

TIC

http://www.diccionario-nautico.com.ar/rosa-de-los-vientos.php
http://www.veladasicamenorca.com/rosavientos.htm
http://www.titulosnauticos.net/meteorologia/index.htm?beaufort.htm
http://www.tiempo.com/mapas-meteorologicos/viento/Mapas-de-viento-en-Espana.html

a. ¿Qué 16 direcciones señala la rosa de los vientos? ¿Qué dirección elige como origen?

—¿Qué ángulo tiene el resto de las direcciones?

b. ¿Qué relación encuentras entre la representación del viento y los vectores?

c. **Dibuja** los símbolos para temporal huracanado, temporal, fresco, bonancible y calma.

—A continuación, **describe** las características de cada uno de ellos.

d. **Dibuja** un viento de 63 km/h y dirección oeste-noroeste.

e. **Observa** atentamente los mapas de viento de hoy en Europa, España y Canarias. **Compáralos** e **indica** las direcciones del viento y velocidades.

Piloto...

disfrutaría viajando a nuevos lugares, conocería personas de todo el mundo, con otras culturas y costumbres y aprendería muchos idiomas.
Usaría mis instrumentos de navegación donde se aprecian los vectores interpretaría hacia dónde dirigir el avión y a qué velocidad. Ocasionalmente colocaría en piloto automático.
Es bueno aprender sobre vectores, husos horarios, latitud y longitud porque desarrollas tu ubicación espacial de mejor manera.

167

Solucionario

Zona WiFi

a. Las dieciséis direcciones de la rosa de los vientos son: Norte, Sur, Este y Oeste, Noreste, Sureste, Suroeste y Noreste: Nor-noreste, Este-noreste, Este-sureste, Sur-sureste, Sur-suroeste, Oeste-suroeste, Oeste-noroeste y Norte-noroeste.

¿Qué dirección elige como origen?

La dirección norte es el ángulo 0º o 360º.

—¿Qué ángulo tiene el resto de las direcciones?

Ángulos de 45

b. ¿Qué relación encuentras entre la representación del viento y los vectores?

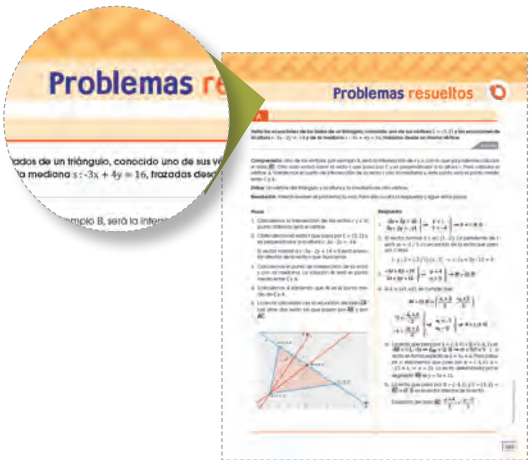
c. Dibuja los símbolos para temporal huracanado, temporal, fresco, bonancible y calma.

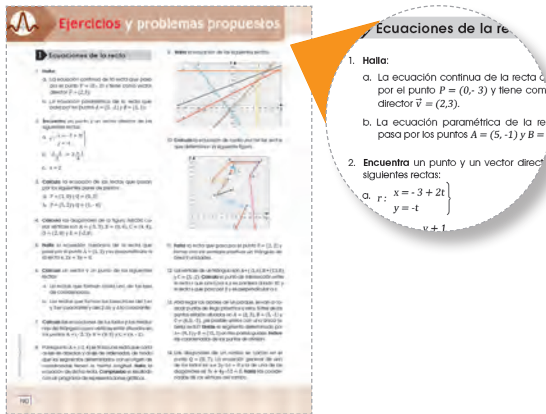
Temporal huracanado:  temporal:  fresco:  bonancible:  calma: 

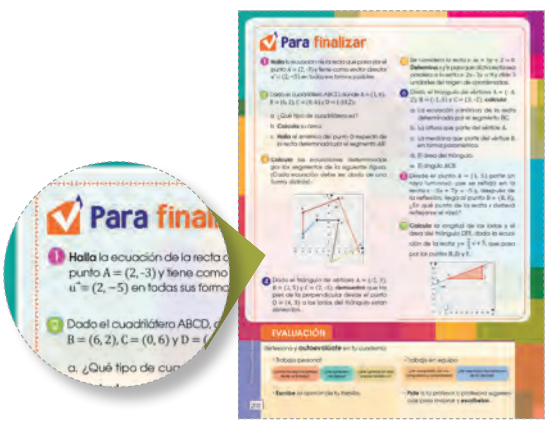
—A continuación, describe las características de cada uno de ellos.

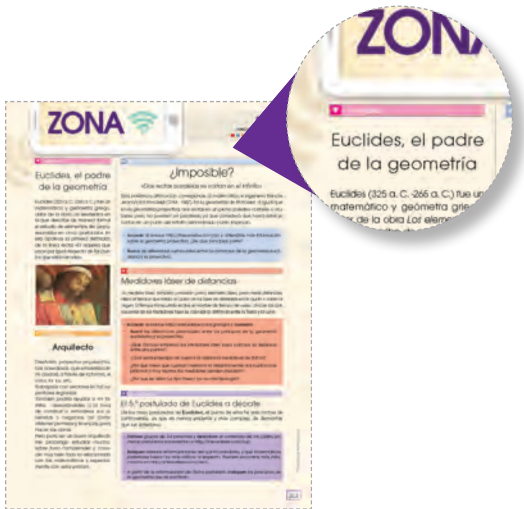
	Mar	Tierra
temporal huracanado	El aire está lleno de espuma y rociones. Enorme oleaje. Visibilidad casi nula.	Destrucción total.
temporal	Grandes olas rompientes, franjas de espuma.	Se quiebran las copas de los árboles, circulación de personas dificultosa.
fresco	Se forman olas grandes, crestas de espuma blanca (salpicaduras frecuentes).	Se mueven las ramas de los árboles, dificultad para mantener abierto el paraguas.
bonancible	Pequeñas olas creciendo, cabrilleo numeroso y frecuente de las olas.	Se levanta polvo y papeles, se agitan las copas de los árboles.
calma	Mar como un espejo.	Calma, el humo asciende verticalmente.

Elementos del plano









UNIDAD 5

5 Elementos del plano

CONTENIDOS:

1. Ecuaciones de la recta, ecuación vectorial
2. Punto medio de un segmento
3. Ecuación paramétrica de una recta
4. Ecuación general y explícita de la recta
5. Ecuación punto pendiente
6. Posición relativa entre rectas
7. Incidencia
8. Rectas secantes
9. Haces de rectas
10. Ángulo entre las rectas
11. Distancia entre 2 puntos
12. Distancia de un punto a una recta
13. Cálculo directo de la distncia de un punto a una recta
14. Distancia entre rectas paralelas
15. Lugares geométricos
16. Bisectriz de un ángulo
17. Matemáticas y TIC´S Geogebra

Noticia:

Premio Abel para Pierre Deligne, hacedor de puentes entre islas matemáticas (...) El galardón, a menudo referido como el Nobel de las matemáticas, reconoce las «contribuciones seminales» de Deligne a la geometría algebraica (...).«Sus poderosos conceptos, ideas, resultados y métodos», sigue reconociendo la Academia, «siguen influyendo en el desarrollo de la geometría algebraica, y de las matemáticas en su conjunto» (...). El matemático José Ignacio Burgos, investigador del ICMAT (...), explica que el premiado no solo tendió nexos creativos para derribar algunas de las «fronteras internas» de las matemáticas (como la que separa la geometría del álgebra), sino también otras fronteras externas, con implicaciones en la física teórica. (...) «La geometría algebraica tuvo en principio unos objetivos simples», dice Burgos. «Se trataba de saber qué figuras geométricas pueden ser soluciones de las ecuaciones polinomiales; pero esta materia ha alcanzado con el tiempo un grado de sofisticación soberbio» (...).

El País, 20-3-2013 (adaptación).

Video:

La cicloide es una curva con propiedades geométricas curiosas que puedes ver en el siguiente enlace:

http://links.edebe.com/3x8zvk

EN CONTEXTO:

1. Reflexiona durante unos momentos:
   a. ¿Qué sabes acerca de la geometría analítica?
   b. ¿Qué preguntas o inquietudes te surgen sobre ello?
   —¿Qué te gustaría investigar sobre este tema?

   Anota tus respuestas a las tres preguntas y, en grupos, poner en común para exponer sus conclusiones ante el grupo de compañeros.
2. Después de ver el vídeo de la cicloide, **contesta**:
   a. ¿El camino más corto es siempre el más rápido?
   b. La cicloide es una curva tautócrona. ¿Qué significa?
   c. ¿Qué ventajas tendría un péndulo cuya trayectoria fuera una cicloide?

168 169

Eje temático	Contenidos	
Números reales	Elementos del plano	1.Ecuaciones de la recta, ecuación vectorial (170) 2. Punto medio de un segmento (171) 3. Ecuación paramétrica de una recta (72) 4. Ecuación general y explícita de la recta (173) 5. Ecuación punto pendiente (174) 6. Posición relativa entre rectas (175-176) 7. Incidencia (77) 8. Rectas secantes (178) 9. Haces de rectas (179) 10. Ángulo entre las rectas (180) 11. Distancia entre dos puntos (181) 12. Distancia de un punto a una recta (182) 13. Cálculo directo de la distancia de un punto a una recta (183) 14. Distancia entre rectas paralelas (184) 15. Lugares geométricos (185) 16. Bisectriz de un ángulo (186) 17. Matemáticas y TIC Geogebr (187)

Criterio de evaluación

- Emplea vectores geométricos en el plano y operaciones en R2, con aplicaciones en física y en la ecuación de la recta; utiliza métodos gráficos, analíticos y tecnológicos.

Indicadores para la evaluación del criterio

- M.5.6.3. Determina la ecuación de la recta de forma vectorial y paramétrica; identifica su pendiente, la distancia a un punto y la posición relativa entre dos rectas, la ecuación de una recta bisectriz, sus aplicaciones reales, la validez de sus resultados y el aporte de las TIC.

Elementos del perfil de salida a los que se contribuye

- Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos e información posibles.
- Sabemos comunicarnos de manera clara en nuestra lengua y en otras, utilizamos varios lenguajes como el numérico, el digital, el artístico y el corporal; asumimos con responsabilidad nuestros discursos

Objetivo integrador del área por subnivel

- OI.5.5. Plantear actividades de emprendimiento en diversos ámbitos de su vida, evaluandolos riesgos e impactos que comportan a través de la investigación, con el uso de las tecnologías y métodos científicos, planificando de forma adecuada sus proyectos.
- OI.2.8. Construir hábitos de organización en sus tareas y actividades cotidianas, proponiendo razonamientos lógicos y críticos.

Objetivos del área por subnivel

- O.M.5.5. Valorar, sobre la base de un pensamiento crítico, creativo, reflexivo y lógico, la vinculación de los conocimientos matemáticos con los de otras disciplinas científicas y los saberes ancestrales, para así plantear soluciones a problemas de la realidad y contribuir al desarrollo del entorno social, natural y cultural.

Básicos imprescindibles	Básicos deseables

Eje temático	Destrezas con criterio de desempeño
Aprendizajes básicos	Escribir y reconocer la ecuación vectorial y paramétrica de una recta a partir de un punto de la recta y un vector dirección, o a partir de dos puntos de la recta.
	Identificar la pendiente de una recta a partir de la ecuación vectorial de la recta, para escribir la ecuación cartesiana de la recta y la ecuación general de la recta.
	Determinar la posición relativa de dos rectas en R2 (rectas paralelas, que se cortan, perpendiculares) en la resolución de problemas (por ejemplo: trayectoria de aviones o de barcos para determinar si se interceptan).
	Resolver y plantear aplicaciones de la ecuación vectorial, paramétrica y cartesiana de la recta con apoyo de las TIC.
	Determinar la ecuación de la recta bisectriz de un ángulo como aplicación de la distancia de un punto a una recta.
	Determinar la ecuación vectorial de un plano a partir de un punto del plano y dos vectores dirección; a partir de tres puntos del plano; a partir de una recta contenida en el plano y un punto.
	Determinar la ecuación de la recta formada como intersección de dos planos como solución del sistema de ecuaciones planteado por las ecuaciones de los planos.
Geometría	M.5.2.9. Escribir y reconocer la ecuación vectorial y paramétrica de una recta a partir de un punto de la recta y un vector dirección, o a partir de dos puntos de la recta.
	M.5.2.10. Identificar la pendiente de una recta a partir de la ecuación vectorial de la recta, para escribir la ecuación cartesiana de la recta y la ecuación general de la recta.
	M.5.2.11. Determinar la posición relativa de dos rectas en R2 (rectas paralelas, que se cortan, perpendiculares) en la resolución de problemas (por ejemplo: trayectoria de aviones o de barcos para determinar si se interceptan).
	M.5.2.12. Calcular la distancia de un punto P a una recta (como la longitud del vector formado por el punto P y la proyección perpendicular del punto en la recta P´, utilizando la condición de ortogonalidad del vector dirección de la recta y el vector pp) en la resolución de problemas (distancia entre dos rectas paralelas).
	M.5.2.13. Determinar la ecuación de la recta bisectriz de un ángulo como aplicación de la distancia de un punto a una recta.e
	M.5.2.14. Resolver y plantear aplicaciones de la ecuación vectorial, paramétrica y cartesiana de la recta con apoyo de las TIC.
	M.5.2.15. Aplicar el producto escalar entre dos vectores, la norma de un vector, la distancia entre dos puntos, el ángulo entre dos vectores y la proyección ortogonal de un vector sobre otro, para resolver problemas geométricos, reales o hipotéticos, en R2.

<table>
<tr><td>LOGO INSTITUCIONAL</td><td colspan="4">NOMBRE DE LA INSTITUCIÓN</td><td colspan="4">AÑO LECTIVO</td></tr>
<tr><td colspan="9">PLAN DE UNIDAD TEMÁTICA</td></tr>
<tr><td colspan="9">1. DATOS INFORMATIVOS:</td></tr>
<tr><td>Docente:</td><td colspan="2">Nombre del docente que ingresa la información</td><td>Área/asignatura:</td><td>MATEMÁTICA</td><td>Grado/ Curso:</td><td>1° BACHILLERATO</td><td>Paralelo:</td><td></td></tr>
<tr><td>N.º de unidad de planificación:</td><td>5</td><td colspan="2">Título de unidad de planificación:</td><td>ELEMENTOS DEL PLANO</td><td colspan="2">Objetivos específicos de la unidad de planificación:</td><td colspan="2">Producir, comunicar y generalizar información de manera escrita, verbal, simbólica, gráfica y/o tecnológica mediante la aplicación de conocimientos matemáticos y el manejo organizado, responsable y honesto de las fuentes de datos para comprender otras disciplinas, entender las necesidades y potencialidades de nuestro país y tomar decisiones con responsabilidad social.

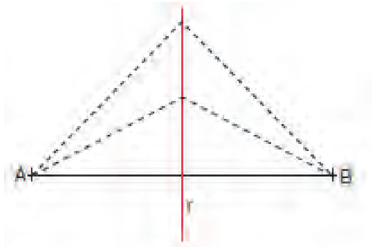
Desarrollar la curiosidad y la creatividad en el uso de herramientas matemáticas al momento de enfrentar y solucionar problemas de la realidad nacional demostrando actitudes de orden, perseverancia y capacidades de investigación.</td></tr>
<tr><td>PERÍODOS</td><td colspan="3">30</td><td colspan="3">SEMANA DE INICIO:</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="9">2. PLANIFICACIÓN</td></tr>
<tr><td colspan="7">DESTREZAS CON CRITERIOS DE DESEMPEÑO A SER DESARROLLADAS:</td><td colspan="2">CRITERIOS DE EVALUACIÓN</td></tr>
<tr><td colspan="7">• Identificar la pendiente de una recta a partir de la ecuación vectorial de la recta para escribir la ecuación cartesiana de la recta y la ecuación general de la recta.
• Determinar la posición relativa de dos rectas en R (rectas paralelas, que se cortan, perpendiculares) en la resolución de problemas (por ejemplo: trayectoria de aviones o de barcos para determinar si se interceptan).
• Calcular la distancia de un punto P a una recta (como la longitud del vector formado por el punto P y la proyección perpendicular del punto en la recta P´, utilizando la condición de ortogonalidad del vector dirección de la recta y el vector $\overrightarrow{PP}$ en la resolución de problemas (distancia entre dos rectas paralelas).
• Resolver y plantear aplicaciones de la ecuación vectorial, paramétrica y cartesiana de la recta con apoyo de las TIC.</td><td colspan="2">CE.M.5.6. Emplea vectores geométricos en el plano y operaciones en R, con aplicaciones en física y en la ecuación de la recta; utiliza métodos gráficos, analíticos y tecnológicos.</td></tr>
</table>

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	RECURSOS	INDICADORES DE LOGRO	TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN
Experiencia Representación de rectas en el plano a partir de sus coordenadas, su ecuación o de otros datos. Resolución de problemas de applicación concreta de elementos del plano (puntos, rectas, ángulos Conceptualización Uso de diagramas que resuman los principales conceptos, propiedades y procedimientos con ecuaciones de una recta, puntos notables, distancias. Uso de softwares arefuercen la aplicación de los elementos del plano. Aplicación ¿Por qué es importante el uso y aplicación del plano? Planteamiento y resolución de problemas de aplicación de los elementos del plato. Reflexión ¿Cómo y cuándo se puede aplicar el cálculo de elementos del plano en la vida cotidicana? Identificación, en ejercicios o problemas, de los elementos de un plano. Reflexión y análisis sobre la aplicación de puntos y rectas en el entorno, para calcular distancias, ángulos, etc.	• Calculadora • Enlaces web • Pizarra	I.M.5.6.1. Grafica vectores en el plano; halla su módulo y realiza operaciones de suma, resta y producto por un escalar; resuelve problemas aplicados a la Geometría y a la Física. (I.2.) I.M.5.6.2. Realiza operaciones en el espacio vectorial R; calcula la distancia entre dos puntos, el módulo y la dirección de un vector; Reconoce cuando dos vectores son ortogonales; y aplica este conocimiento en problemas físicos, Apoyado en las TIC. (I.3.) I.M.5.6.3. Determina la ecuación de la recta de forma vectorial y paramétrica; identifica su pendiente, la distancia a un punto y la posición relativa entre dos rectas, la ecuación de una recta bisectriz, sus aplicaciones reales, la validez de sus resultados y el aporte de las TIC. (I.3.)	Comprobar el desarrollo de las destrezas necesarias para el manejo de vectores en el plano y sus características, graficación, norma, Operaciones con vectores algebraicas, en forma gráfica y en Forma analítica, así como para la resolución de problemas de aplicación. El estudiante debe ser capaz de calcular el producto de un número por un vector, el producto Escalar entre vectores, la ortogonalidad, la distancia entre dos puntos, el ángulo entre dos vectores; determinar la posición relativa de dos rectas; describir la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola (tanto en su forma cartesiana como en su forma paramétrica), y, en general, resolver aplicaciones geométricas de vectores en R
ELEMENTOS DEL PERFIL DE SALIDA			
I.2. Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para Resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos información posibles. I.3. Sabemos comunicarnos de manera clara en nuestra lengua y en otras, utilizamos varios lenguajes como el numérico, el digital, el artístico y el corporal; asumimos con Responsabilidad nuestros discursos.			

ELABORADO	REVISADO	APROBADO
Docente:	Director del área :	Vicerrector:
Firma:	Firma:	Firma:
Fecha:	Fecha:	Fecha:

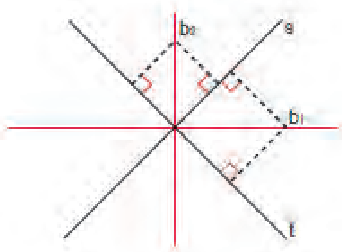
Ampliación de contenidos

1. Lugar geométrico



Observa la figura de la derecha. Los puntos de la recta *r*, mediatriz del segmento *AB*, tienen la propiedad de ser equidistantes de los extremos del segmento.

Decimos que la mediatriz de un segmento *AB* es el *lugar geométrico* de los puntos del plano que equidistan de *A* y *B.*



Fíjate ahora en esta figura. Los puntos de las rectas b_1 y b_2, bisectrices de los ángulos determinados por *s* y *t*, tienen la propiedad de ser equidistantes de *s* y *t.* Decimos que la bisectriz de un ángulo es el *lugar geométrico* de los puntos del plano que equidistan de los lados del ángulo.

> Llamamos lugar geométrico al conjunto de puntos que cumplen una propiedad determinada.

Ecuación de un lugar geométrico

Si consideramos un sistema de referencia, podemos encontrar la expresión analítica de un lugar geométrico, es decir, la ecuación que satisfacen las coordenadas de todos sus puntos. Para ello, basta tomar un punto cualquiera del lugar geométrico y expresar algebraicamente la propiedad que lo define. Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 1

Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de A = *(1, 5)* y B = *(3, −2).*

Tomemos un punto cualquiera $P = (x, y)$ del lugar geométrico.

Por ser el punto *P* equidistante de *A* y *B*, se verifica:

$$d(P, A) = d(P, B)$$

Y, por la definición de distancia entre dos puntos, se tiene:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-5)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}$$

Si ahora elevamos los dos miembros al cuadrado y efectuamos las operaciones correspondientes, obtenemos:

$$(x-1)^2+(y-5)^2 = (x-3)^2+(y+2)^2$$

$$x^2-2x+1+y^2-10y+25 = x^2-6x+9+y^2+4y+4$$

Finalmente, al transponer términos y reducir los términos semejantes, resulta:

$$4x-14y+13=0$$

Hemos obtenido la ecuación de una recta, *r*, que es la mediatriz del segmento de extremos *A* y *B* (fig. 1).

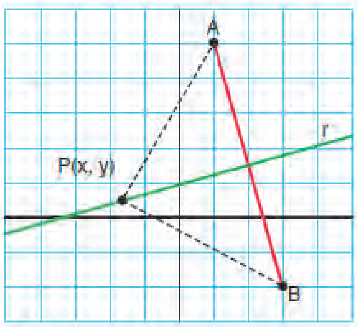


Fig. 1.

EJEMPLO 2

Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de las rectas r: $6x - 8y + 5 = 0$ *y* s: $4x + 3y - 1 = 0$.

Tomemos un punto cualquiera $P = (x, y)$ del lugar geométrico.

Por ser el punto P equidistante de las rectas r y s, se verifica:

$$d(P, r) = d(P, s)$$

Y, por la definición de distancia entre un punto y una recta, se tiene:

$$\frac{|6x - 8y + 5|}{\sqrt{36 + 64}} = \frac{|4x + 3y - 1|}{\sqrt{16 + 9}}$$

Si ahora efectuamos las raíces de los denominadores y suprimimos el valor absoluto, resulta:

$$\frac{6x - 8y + 5}{10} = \pm\frac{4x + 3y - 1}{5}$$

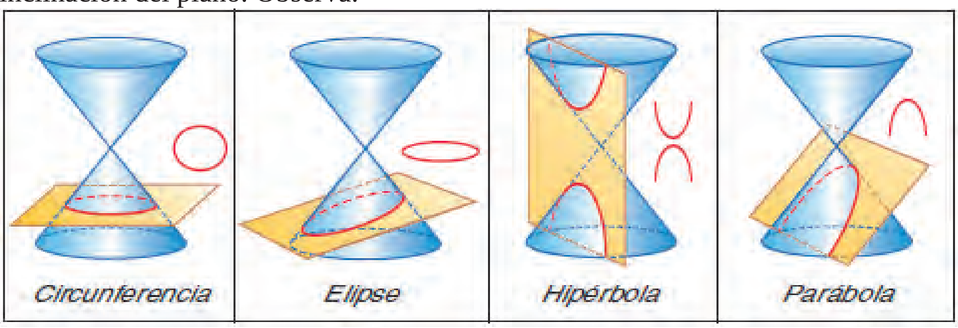
Al realizar las operaciones correspondientes con el signo + y luego con el signo –, se obtiene:

$$6x - 8y + 5 = 8x + 6y - 2$$
$$6x - 8y + 5 = -8x - 6y + 2$$

De donde resulta:

$$2x + 14y - 7 = 0$$
$$14x - 2y + 3 = 0$$

Si seccionamos un cono por un plano, obtenemos diferentes tipos de curvas, dependiendo de la inclinación del plano. Observa:



Estas curvas se denominan **cónicas.** A continuación estudiaremos estas curvas como lugares geométricos del plano.

La circunferencia: La *circunferencia* es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a un punto fijo, llamado *centro*, es constante.

Elipse: La *elipse* es el *lugar geométrico* de los puntos del plano cuya *suma de distancias* a dos puntos fijos, llamados focos, es *constante.*

La *hipérbola* es el *lugar geométrico* de los puntos del plano cuya *diferencia* de distancias a dos puntos fijos, llamados *focos*, es *constante*.

La *parábola* es el *lugar geométrico* de los puntos del plano que *equidistan* de un punto fijo, llamado foco, y de una recta fija, llamada directriz.

Nombre: ______________________ Fecha: ____________

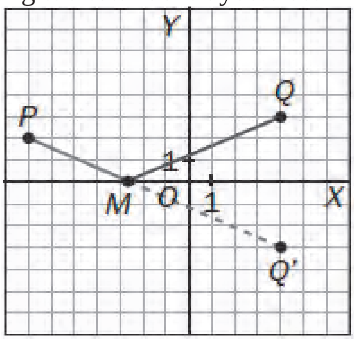
Recurso para la evaluación

1. La ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos $A(7, 3)$ y $B(2, 2)$ es:
   A. $(x, y)= (7,3) + t(5,1)$
   B. $(x, y)= (-7,-3) + t(9,5)$
   C. $(x, y) = (7,3) + t(-5,-1)$

2. La ecuación general de la recta que pasa por A $(1, -1)$ y B $(0, 2$ es:
   a. $3x + y - 2 = 0$
   b. $3x - y - 1 = 0$
   c. $3x - y + 2 = 0$

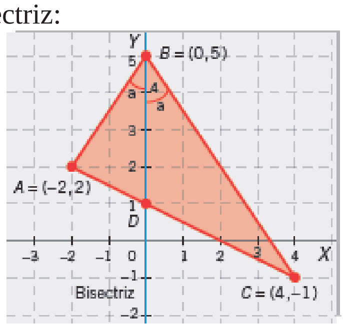
3. **Divide** el segmento determinado por $A = (9, 1)$ y $B = (15, 3)$ en tres partes iguales. Indica las coordenadas de los puntos de división.
4. **Demuestra** que los puntos: A(1, 7), B(4,6) y C(1, -3) pertenecen a una circunferencia de centro
   (1, 2).
5. **Halla** la distancia entre las rectas r y s en los casos siguientes:
   a. r: $2x+3y-3 = 0$ $s: -x+4y-5 = 0$
   b. r: $3x-2y +7 = 0$ $s: 6x-4y +1 = 0$
6. Dado el triángulo de vértices A=(2,5), B=(-1,2) y C=(-1,5), **halla** el lugar geométrico de los puntos M tal que el área del triángulo ABC sea la misma que la del triángulo ABM.
7. Por el punto $A = (1, 6)$ trazamos la perpendicular a la recta $r: 2x + y - 2 = 0$. **Halla** un punto de esta perpendicular que equidiste de A y de la recta r.
8. Si dos vértices de un triángulo equilátero son los puntos A (-3,-2) y B(1,2), **encuentra** el tercer vértice.
9. **Encuentra** la ecuación de la recta que pasa por el punto donde se cortan las rectas $4x + 9y + 7 = 0$ y $x - 6y - 23 = 0$ y el punto P (2, 7).
10. Si A (3, 1), B(5, 7) y C(6, 4) son tres vértices consecutivos de un paralelogramo, ¿cuál es el cuarto vértice?
11. **Halla** la longitud de la mediana que parte de A en el triángulo de vértices A $(-1, 4)$, B $(6, 5)$ y C $(10, -3)$. ¿Coincide la mediana con la altura en este caso? Justifícalo.
12. **Determina** la ecuación continua de la recta que cumple estas condiciones.
    a. Pasa por el punto $(7, -1)$ y es perpendicular a la recta.
    b. Pasa por el punto $(-4, 4)$ y es perpendicular a la recta $-2x + y + 7 = 0$.
13. En el triángulo de vértices A(2, 1), B(2, 3) y C(-1, 4). **Halla**:
    a. La ecuación de la mediana que pasa por A
    b. La ecuación de la mediatriz del lado AB
    c. La ecuación de la altura del vértice B
    d. El área del triángulo
14. **Halla** la ecuación de la recta perpendicular al segmento de extremos $A(0, -2)$ y $B(1, 4)$ y que pasa por el punto $C(3, 0)$.
15. **Estudia** la posición relativa de las rectas:
    a) $2x+ 5y- 5 = 0$ y $3x - 5y + 5 = 0$
    b) $3x + 5y - 5= 0$ y $9x + 15y + 5 = 0$
16. **Halla** para qué valor de c, la recta $x-cy =-4c-1$ es coincidente con la recta que pasa por los puntos $P(-1, 4)$ y $Q(2, 3)$.
17. Dada las rectas r: $x - 4y +2 =0$ y s: $2x-3y =-4$:
    a. **Calcula** su punto de corte.
    b. **Demuestra** que el punto $P(1, 2)$ pertenece a s y calcula su simétrico respecto de la recta r.
    c. **Calcula** la ecuación de la recta simétrica de s respecto de la recta r.
18. **Calcula** las rectas que pasan por el punto $P(1, 2)$ y que forman con la bisectriz del primero y tercer cuadrantes un ángulo de 45º.
19. Dos vértices opuestos de un rombo $ABOC$ son los puntos $A(6, 6)$ y $O(0, 0)$. **Halla** las coordenadas de B y de C sabiendo que el área del rombo es de 24 unidades cuadradas.

20. Una paloma se encuentra en el punto (-7, 2) y quiere volar hacia el punto (4, 3) pero pasando por el eje de abscisas. **Indica** el recorrido que debe realizar para que la longitud total del trayecto sea mínima.



21. **Halla** las ecuaciones y los vértices de un triángulo *ABC* si sabemos que *A* = (3, 11), la mediatriz del lado *AB* es *r*:-3*x*-11*y*=- 65,otra de sus rectas notables es *s* : -3*x* - 11*y* = - 37, y su área es 40,5 u^2.

22. El teorema de la bisectriz dice: «La bisectriz de un ángulo interior de un triángulo divide el lado opuesto en partes que son proporcionales a los otros dos lados». **Halla** el lado *D* del siguiente triángulo y **comprueba** que se verifica el teorema de la bisectriz:

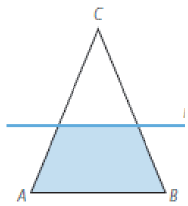


Donde *A* = (-2, 2), *B* = (0, 5) y *C* = (4, -1).

23. Uno de los diámetros de una circunferencia es el segmento *AB* de extremos *A* = (3, 0) y *B* = (3, −4).Halla:

a) El centro y el radio de la circunferencia.
b) Uno de los extremos de un diámetro de la circunferencia si el otro extremo es el punto *D* = (1, −2).

24. Tenemos un triángulo de vértices *A*(4, 9), *B*(11, 10) y *C*(9, 4).



Comprueba que es un triángulo isósceles. Trazamos una recta paralela al lado desigual, pasando por (7, 6), y se forma un trapecio isósceles. **Determina** su área.

25. Ania y Valeria se están mirando, una a la otra, a través de un espejo situado según la recta de ecuación *y*=−*x* + 2. Valeria se encuentra en el punto (−9, −1) y Ania en (−4, 3). ¿Qué coordenadas tiene el punto *M* al que miran?

26. Los puntos A (-1, -2); B (1,1); C(4,0) son tres coordenadas de un paralelogramo, calcula las coordenadas del cuarto vértice.

Si llamamos D al cuarto vértice hay que considerar tres posibilidades: paralelogramo ABCD; paralelogramo ABDC; paralelogramo ACBD

27. **Halla** la ecuación de la recta que pasa por el punto A(2,1) y:

a. **Forma** un ángulo de 120º con el semieje positivo OX.
b. Es paralela al eje OX.
c. Es paralela al eje *OY*.

1. La ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos $A(7, 3)$ y $B(2, 2)$ es C) $(x, y) = (7,3) + t(-5,-1)$
2. La ecuación general de la recta que pasa por A (1, −1) y B (0, 2 es: A) $3x + y - 2 = 0$
3. C = 11, 53, D = 13, 73
4. Si O es el centro de la circunferencia las distancias de O a A, B, C y D deben ser iguales: d(O,A)=5, d(O,B)=5, d(O,C)=5, $\overrightarrow{AB}=\sqrt{10}$

5. a) d(r, s) = 0 b)) d(r, s) = $\frac{13}{\sqrt{52}}$

6. Triángulo ABC: base= $\sqrt{18}$, Altura ⇒ d(C, AB) = $\frac{3}{\sqrt{2}}$

Triángulo ABM, $M = (x, y)$:

• Base ⇒ $d(A,B) = 18$

• Altura ⇒ $d(M,AB) = \frac{|x-y+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|x-y+3|}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow |x-y+3|=3$

7.

Así, las coordenadas de P son

$$\left(\frac{-\frac{7}{5}+1}{2}, \frac{\frac{24}{5}+6}{2}\right) = \left(-\frac{1}{5}, \frac{27}{5}\right)$$

8. Coordenadas del tercer vértice:

$c(-1;2\sqrt{3}+2)y\left(-1;-2\sqrt{3}+2\right)$

9. $y+\frac{10}{3}x-\frac{41}{3}=0$

10. El cuarto vértice es D (4,-2)

11. $AM = \sqrt{90}$

12.

a) Calculamos el vector director de la recta:

$\overrightarrow{AB} = (3, -1)$

Un vector perpendicular a $(3, -1)$ es $(1, 3)$.

Expresamos la recta en forma continua:

$\frac{x-7}{1} = \frac{y+1}{3}$

b) Calculamos el vector director de la recta:

$A(0, -7), B(1, -5) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (1, 2)$

Un vector perpendicular a $(1, 2)$ es $(-2, 1)$.

Expresamos la recta en forma continua:

$\frac{x+4}{-2} = \frac{y-4}{1}$

13. a) $5x + 3y - 13 = 0$ b) $y = 2$
c) $x - y + 1 = 0$ d) Área = 3 u^2

14. $\overline{AB}$= (1, 6) es un vector normal a la recta. Por tanto, la ecuación de la recta es de la forma x _ 6y _ k _ 0.
Como pasa por el punto C, ha de ser 3 _ k _ 0 ⇒ k _ _3. Por tanto, la ecuación pedida es x _ 6y _ 3 _ 0.

15. a) son rectas secantes. Se cortan en: P(0 1).
b) son rectas paralelas.

16. c=-3

17. a) El punto de corte es: Q(-2, 0)
c) $6x + 61y + 12 = 0$

18. La recta buscada es y_2.
Además, la recta vertical x _ 1 también forma un ángulo de 45 con la bisectriz del primer cuadrante.

19. B(5, 1), C(1, 5)

20. El trayecto ha de ser PMQ. Las coordenadas de M han de ser M(-13/5, 0)

21. A = (3, 11), B = (- 6, 5), C = (0, 0), $r1$: $-2x + 3y - 27 = 0$, $r2$: $5x + 6y = 0$, $r3$: $-11x + 3y = 0$

22. Las coordenadas del lado D = (0, 1)

23. El centro de la circunferencia es el punto C = (3, −2) y el radio es 2.

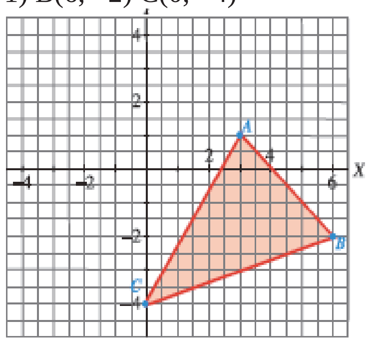
24. 12, 8 u^2

25. El punto de corte es: −13/5, 23/5

26. a. sea paralelogramo ABCD: D (2, -3)
b) sea paralelogramo ABDC: D (6, 3)
c) sea paralelogramo ACBD D (-4, -1)

27.a) $\sqrt{3} \cdot x + y - 1 + 2\sqrt{3} = 0$
b) $y = 1$ c) $x = 2$

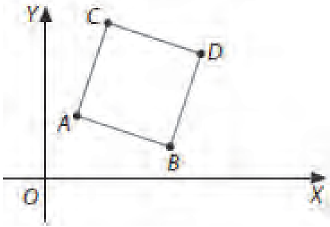
1. **Averigua** la posición relativa de las rectas r y s.
   a. r: $2x - 3y + 1 = 0$; s: $-3x + 2y - 2 = 0$
   b. r: $-3x + 5y - 4 = 0$; s: $6x - 10y + 7 = 0$
   c. r: $5x - 3y + 2 = 0$; s: $-5x + 3y - 2 = 0$
2. **Halla** la ecuación de la recta perpendicular a r: $y = 3x - 6$, y que pasa por el punto $A = (2, 0)$.
3. **Halla** el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos A (2, 1) y B (0, 5) es igual a 10 unidades.
4. El área de un triángulo es 10 u^2. Dos de sus vértices son A (1, 2) y B (- 3, - 2). El tercer vértice está en el eje OX. Obtén el triángulo.
5. **Calcula** la ecuación de las rectas que pasan por los siguientes pares de puntos:
   a. $P = (1, 0)$ y $Q = (0, 3)$
   b. $P = (5, 2)$ y $Q = (1, -4)$
6. Dado el triángulo *ABC* donde $A = (-2, -4)$, $B = (2, -1)$ y $C = (-1, 5)$, calcula:
   a. La mediatriz del lado *AB*.
   b. La altura desde el vértice *C*.
   c. La mediana desde el vértice *B*.
   d. El punto simétrico de *C* respecto del lado *AB*.
   e. El área del triángulo.
7. **Determina** si los siguientes pares de rectas son secantes, paralelas o coincidentes. En el caso de ser secantes, calcula las coordenadas de su punto de corte; y si son paralelas, calcula la distancia entre ellas.
   a. $r: -2x + y + 5 = 0$ $s: \frac{x+2}{-4} = \frac{y-4}{5}$
   b. $r: y = 2x + 7$ $s: \left.\begin{matrix} x = 1 + 2k \\ y = 3 + 4k \end{matrix}\right\}, k \in \mathbb{R}$
8. Dados los puntos A(2,–1), B(–3,4) y C(0,–8):
   a. **Halla** el punto medio del segmento de extremos A y B.
   b. **Halla** el simétrico de B con respecto a C.
9. El punto medio del segmento AB es M (2,–1). **Halla** las coordenadas de A, sabiendo que B (–3, 2).
10. Halla el área del triángulo de vértices: A(3, 1) B(6, –2) C(0, –4)



11. **Halla** la ecuación de la recta que pasa por el punto P (2,3) y es:
    a. Paralela al eje X.
    b. Paralela al eje Y.
    c. Paralela a la bisectriz del primer cuadrante.
    d. Paralela a la bisectriz del segundo cuadrante.
    e. Paralela a la recta de ecuación: $5x+2y = 0$.
12. **Di** si las siguientes rectas son secantes, paralelas o coincidentes:
    a. $\begin{cases} 3x + 2y - 5 = 0 \\ 3x + 2y + 7 = 0 \end{cases}$
    b. $\begin{cases} x + 3y - 4 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases}$
    c. $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 2x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$

Nombre: ____________________ Fecha: ____________

13. Los puntos $A(1, 2)$ y $D(5, 4)$ representan los vértices opuestos de un cuadrado:

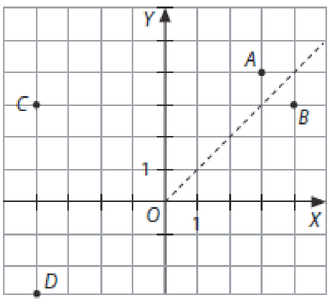


a. **Calcula** el punto medio, M, de la diagonal, AD, del cuadrado (M será el centro del cuadrado).

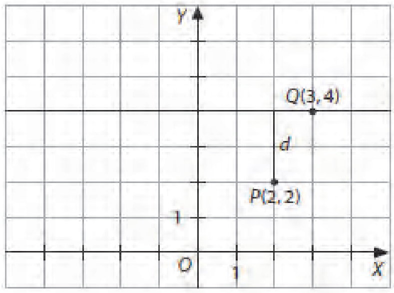
b. **Escribe** la ecuación de la recta que pasa por M y es perpendicular a la diagonal AD.

c. **Calcula** las coordenadas de los otros dos vértices B y C del cuadrado.

14. Halla el perímetro del cuadrilátero *ABCD* si $A= (3, 4)$; *B* es el punto simétrico de *A* respecto de la bisectriz del primer cuadrante; *C*, el simétrico de *B* respecto del eje de ordenadas, y *D*, el simétrico de *C* respecto del eje de abscisas.



15. **Halla** la distancia del punto $P(2, 2)$ a la recta paralela al eje de abscisas que pasa por el punto $Q(3, 4)$.



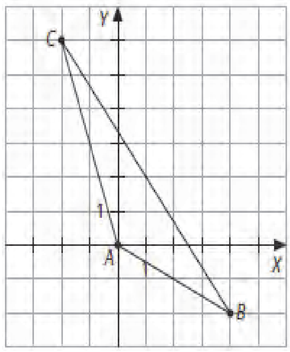
16. **Determina** si el triángulo cuyos vértices son *A* (2, 2), *B* (5, 6) y *C* (-2, 5) es equilátero, isósceles o rectángulo. Calcula el valor de la altura correspondiente al vértice *A* y utilízalo para calcular el área del triángulo.

17. Dado el triángulo de vértices $A(0, 0)$, $B(4, -2)$ y $C(-2, 6)$, **calcula**:

a. Su área.

b. El ángulo B.

c. El punto simétrico de C respecto de AB.

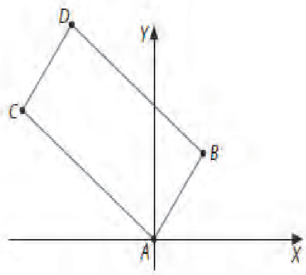


18. **Considera** el siguiente rectángulo del plano:

a. Si A (0, 0) y B (3, 4), calcula la longitud de AB.

b. **Determina** las coordenadas del vértice C sabiendo que la longitud del lado CA es doble de la de AB.

c. **Calcula** las coordenadas del vértice D.



1. a. Secantes, b. paralelas, c. coincidentes

2. $y - 0 = -\frac{1}{3}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

3. $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10 = 0$

4. C = (4, 0) o C = (- 6, 0)

5. a) $\frac{x}{1} + \frac{y}{3} = 1$; b) $3x - 2y - 11 = 0$

6. a) $-4x - 3y = 7{,}5$; b) 6,6 u; c) $-1{,}5x - 3{,}5y = 0{,}5$; d) $C'\left(\frac{173}{25}, \frac{-139}{25}\right)$; e) 16,5 u^2

7. a. Las rectas son secantes ya que los vectores directores no son proporcionales.
   b. Las rectas son paralelas ya que los vectores directores son proporcionales.

8. a. El punto medio es: M $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$
   b. Llamamos B'(x, y) al simétrico de B con respecto a C. Si B' es simétrico de B respecto de C, tiene que cumplirse que: BC = CB'. Entonces B'(3, –20)

9. A (7,-4)

10. A = 12u^2

11.a. y =3; b. x =2; c. y = x + 1; d. y =-x+5; e. 5x + 2y - 16 = 0

12.a. Paralelas b) Secantes c) Coincidentes

13. a. M (3, 3); b. $\overline{AD}$ = (4, 2), luego la recta es de la forma: $4x + 2y + C = 0$
La recta pedida es 4x +2y- 18 = 0 ⇒2 x + y - 9 = 0.
c. El vector *AM*= (2, 1). Dos vectores perpendiculares y del mismo módulo son: $\vec{u}$ (-1, 2) y $\vec{v}$ (1, -2)
En concreto, *B* (4, 1) y *C* (2, 5), porque *B* debe estar a la derecha y hacia abajo respecto de *M*.

14. Las coordenadas de los puntos son: *B* (4, 3); *C* (-4, 3) y *D* (-4,-3); por lo tanto, el perímetro:
$P = 16 + 6\sqrt{2}$ u

15. La distancia es d=2.

16. Como $\overline{AB}$ (3, 4) y $\overline{AC}$= (-4, 3), es rectángulo en *A*. La longitud correspondiente a estos lados es 5. Por tanto, es isósceles.
Como $\overline{BC}$ = (-7,-1), la recta perpendicular a $\overline{BC}$ que pasa por *A* es: $7x+y-16=0$. La proyección ortogonal de *A* sobre esta recta es el punto de intersección de esta recta con la que pasa por *BC*, es decir, $x-y+37=0$.
Este punto es: *A*= (3/2, 11/2).
La longitud de la altura es el módulo del vector *AA*, h=5.
El área del triángulo será: A=12,5 u^2.

17. a) Área=10 u^2 ; b) El ángulo buscado es, por tanto: B=26,57°.
c. Calculando la proyección ortogonal de *C* sobre *AB* se obtiene C_0(-4, 2), por lo que *C’*(-6, -2).

18.
a. $|\overline{AB}|$= 5 u
b.La recta determinada por C y A es perpendicular al vector $\overrightarrow{AB}$ = (3, 4). Por tanto:
$\overrightarrow{AC}$ = (-4, 3)
Como esta recta pasa por (0, 0), tiene por ecuación:
3x + 4y = 0
c. Sobre la recta AC, un punto que esté a 10 unidades de distancia del origen ha de tener por coordenadas (8, 6), es decir, C (8, 6).
d. Se ha de cumplir que: $\overline{AB} = \overline{CD}$; es decir, D = (-5, 10).

CICLO DEL APRENDIZAJE

¿Cómo dinamizo el aula?

Experiencia

Representación de rectas en el plano a partir de sus coordenadas, su ecuación o de otros datos.

Resolución de problemas de applicación concreta de elementos del plano (puntos, rectas, ángulos

Conceptualización

Uso de diagramas que resuman los principales conceptos, propiedades y procedimientos con ecuaciones de una recta, puntos notables, distancias.

Uso de softwares que refuercen la aplicación de los elementos del plano.

Reflexión

¿Cómo y cuándo se puede aplicar el cálculo de elementos del plano en la vida cotidicana?

Identificación, en ejercicios o problemas, de los elementos de un plano.

Reflexión y análisis sobre la aplicación de puntos y rectas en el entorno, para calcular distancias, ángulos, etc.

Aplicación

¿Por qué es importante el uso y aplicación del plano?

Planteamiento y resolución de problemas de aplicación de los elementos del plato.

1. **Halla** un punto de la recta r: x+y-1=0 cuya distancia al punto $Q = (5, 2)$ sea $3\sqrt{2}$ unidades.
2. **Determina** si los siguientes puntos están alineados y, en el caso de que lo estén, averigua la ecuación de la recta a la que pertenecen.
   a. A(1, 6), *B*(-2, 0) y *C*(1/2, 5)
   b. *A*(1, 2), *B*(-3, 3) y *C*(-1, 4) *A, B* y *C* están alineados, puesto que pertenecen a la misma recta b. No están alineados, puesto que el punto *C* no pertenece a la recta que pasa por *A* y *B*,
3. **Halla** el área limitada por la recta 5x+y-5 = 0 el eje de abscisas y el eje de ordenadas. $5/2\ u^2$
4. Sea *r* la recta de ecuación $3x-5y+2=0$. **Determina** las ecuaciones de las rectas paralela y perpendicular a *r* que pasen por el punto (-15, 4).Paralela: $3x - 5y + 65 = 0$; perpendicular: $5x + 3y + 63 = 0$
5. De un rombo *ABCD* conocemos las coordenadas de tres vértices: *A* es el origen de coordenadas, *B*(4, 1) y *D*(1, 4).
   a. **Calcula** las coordenadas del cuarto vértice, C.
   b. **Comprueba**, analíticamente, que las diagonales son perpendiculares y que se cortan en su punto medio. a. *C*(5, 5).
6. **Considera** el triángulo formado por el eje de ordenadas y las siguientes rectas de ecuaciones:
   $2x - y - 1 = 0$
   $x + 2y - 8 = 0$
   Calcula su perímetro y su área. Perímetro = $5 + 3\sqrt{5}$; A = $5\ u^2$

7. Dadas las rectas $ax+(a+2)\,y = a + 2$ y $x + ay + 3$, donde *a* es un parámetro.
   a. **Calcula** un vector director de cada una de estas rectas.
   b. **Halla** los valores de a para los que las rectas son paralelas.
   c. **Calcula** los valores de a para los cuales las rectas son perpendiculares.
   d. **Calcula** la distancia que hay entre las dos rectas cuando $a = 2$.
   a. $\vec{v}_r(-a-2, a)$ y $\vec{v}_s(-a, 1)$; b. Las rectas son paralelas si sus vectores son proporcionales: $a = 2$, $a = -1$; ***c)*** Las rectas son perpendiculares si el producto escalar de sus vectores directores es cero: $a=0$, $a=-3$; $d(r, s) = \frac{1}{\sqrt{5}}$ u
8. **Determina** las ecuaciones de las rectas que distan 7 unidades del punto *P*(3, 5) y son perpendiculares a la recta cuya ecuación es 3x-4y+6 = 0. Sol. Las dos rectas son: 4x+3y+8=0 y 4x+3y-62=0.
9. **Considera** los puntos O(0, 0) y A(9, 12). Una persona situada en el punto O viaja en línea recta hacia A.
   a. ¿Qué distancia recorre para ir de O hasta A?
   b. **Escribe** la ecuación de la recta que sigue en este camino.
   c. Cuando lleva la tercera parte de recorrido, ¿qué coordenadas serán las del punto P en que se encuentre?
   d. Si cuando llega al punto P decide dirigirse hacia un punto Q de coordenadas Q(7, 1), ¿qué ángulo deberá girar respecto de la trayectoria que seguía?
   a. $d = 15$ u; b. $4x - 3y = 0$; c. *P* tiene por coordenadas (3, 4); d. el ángulo que indica el cambio de dirección es de 90°
10. **Halla** la ecuación de la recta que pasa por (6, 2) y forma un triángulo de 27 u^2 con los ejes de coordenadas. $y = 6 - \frac{2}{3}x$.

RECURSOS PROPIOS DEL ÁREA

La incorporación de herramientas tecnológicas como recurso didáctico para el aprendizaje de las matemáticas, especialmente en el caso de que se apliquen estos recursos dentro y fuera del aula.

Así, las principales herramientas TIC disponibles y algunos ejemplos de sus utilidades concretas son:

- Utilización de herramientas simples de algún *programa de diseño gráfico*.

Como Mathlab, Desmos, Derive, especialmente en esta unidad, para graficar funciones.

- Uso y aplicación de calculadoras gráficas.
- Uso de *procesadores de texto* para redactar, revisar la ortografía, hacer resúmenes, añadir títulos, imágenes, hipervínculos, gráficos y esquemas sencillos, etc.
- Usos sencillos de las *hojas de cálculo* para organizar la información (datos) y presentarla, en ocasiones, de forma gráfica.
- Usos simples de *bases de datos*.
- Utilización de programas de *correo electrónico*.
- Usos y opciones básicas de los programas *navegadores*.

• Acceso, entre otras muchas utilidades, a las noticias de prensa (prensa digital) para establecer comparaciones, recabar información actualizada, etc., o para investigaciones bibliográficas.
• Uso de buscadores:
• Extracción de información (enlaces) a partir de los propios directorios de cada buscador principal.
• Uso de los recursos de búsqueda por términos clave en búsquedas simples y avanzadas.
• Usos sencillos de *programas de presentación* (PowerPoint o similares): trabajos multimedia, presentaciones creativas de contenidos, esquemas, o realización de diapositivas.
.
• Uso de los recursos de búsqueda por términos clave en búsquedas simples y avanzadas.
• Creación y organización de listas de favoritos, así como seguimiento y actualización de la información de las distintas URL consultadas.
— Uso de *enciclopedias virtuales* (cd y www).
— Uso de *periféricos*: escáner, impresoras, etc.
— Puesta en práctica de *videoconferencias, chats*...
— Usos sencillos de *programas de presentación* (Powerpoint o similares): trabajos multimedia, presentaciones creativas de textos.

Página 169

Noticia:

Inflación negativa en julio, según datos del INEC

Agosto 7, 2015 Últimas noticias económicas.

La inflación mensual en julio de 2015 fue negativa (-0,08%) por primera vez en el año, según el último reporte del Índice de Precios publicado por el Instituto Nacional de Estadística y Censos (INEC). El Instituto señala que tres divisiones de gasto explican principalmente la variación negativa: la de alimentos y bebidas no alcohólicas, transporte y la de recreación y cultura, cuyas incidencias inflacionarias son de -0,0413%, -0,0466% y -0,0311% respectivamente. En julio de 2014, la inflación fue de 0,40%, mientras que en julio de 2009 también se registró una cifra similar de -0,07%, según las cifras del INEC. El INEC informa, además, que para el séptimo mes del año el país registra una inflación acumulada de 2,99% en comparación con el 2,31% que alcanzó en julio de 2014. Mientras, la inflación anual se ubicó en 4,36%.

(http://tinyurl.com/na2p9sg).

Película:

Ciudad mágica, de William A. Wellman (1947). Una empresa que se dedica a elaborar sondeos y busca una ciudad en la que la opinión de cuyos habitantes sea representativa de la de todo el país.

EN CONTEXTO:

La tabla muestra los datos de reciclaje del vidrio de cuatro comunidades autónomas en 2009

Comunidad	Habitantes	Kilos de vidrio recogido
A	8 302 923	78 888 840
B	1 345 473	22 637 624
C	1 095 426	28 822 970
D	2 103 992	25 829 030

¿Qué comunidad recicla más vidrio?

1. **Calcula** la cantidad de vidrio reciclado por habitante en cada comunidad.
2. **Elabora** un gráfico comparativo de la cantidad total de vidrio reciclado y la cantidad de vidrio reciclado por habitante en cada comunidad.

La cantidad total de vidrio reciclado, ¿es un indicador del porcentaje de reciclaje de una comunidad?

Orientación didáctica

Proponga a los estudiantes la lectura de las secciones Noticia y video como introducción de la unidad y la posterior elaboración de los resúmenes y esquemas correspondientes a esta estos.

Si lo considera conveniente, forme grupos de trabajo para que busquen información sobre el teorema de Napoleón y expliquen con sus palabras en qué consiste. A continuación, elaboren una presentación que explique este teorema y que demuestre que se verifica para el triángulo de vértices A = (8, 0), B = (0, 6) y C = (3, 11).

Proponga a sus estudiantes un coloquio basado en el ejercicio 36 de la página 283 del libro del estudiante. Así, el tema del coloquio puede ser: Causas y consecuencias de los incendios forestales. ¿Puede la matemática ayudarnos a identificar los problemas que afectan al medio ambiente?

Previamente, cada participante puede recoger sugerencias de un grupo de personas del público y exponerlas a lo largo del coloquio.

Es conveniente que los estudiantes distingan las diferentes formas de expresar una recta, así como sus posiciones relativas. También es necesario asegurarse de que los estudiantes tienen clara la diferencia entre cada tipo de ecuación, y cómo hallar cada elemento del plano. Se sugiere partir de ejemplos concretos, con sus aplicaciones en geometría.

En contexto:

a. Respuesta abierta a modo de reflexión individual que puede servir como introducción a los elementos del plano.

b. Respuestas sugeridas:

- El camino más corto no es siempre el más rápido, ya que no depende solo de la longitud del camino sino también de la velocidad de la partícula.
- Significa que todas las trayectorias de la curva tienen la misma duración, independientemente del punto de la curva donde comiencen.
- El tiempo que empleará una partícula en resbalar hasta llegar a la posición de equilibrio estable es independiente de la posición inicial de la partícula sobre la trayectoria cicloidal.

Página 170

Solucionario

Ejercicio 1

La ecuación vectorial de la recta

a: $(x, y) = \left(\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}\right) + k\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right)$

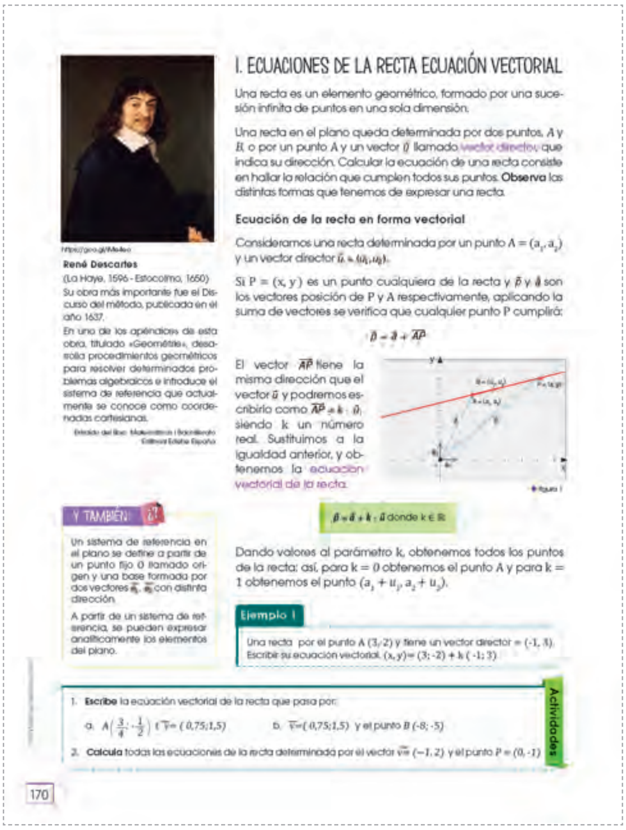
b: $(x, y) = (-8; -5) + k\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right)$

Ejercicio 2

- Vectorial: $(x, y) = (0, -1) + k(-1, 2),\ k \in \mathbb{R}$
- Paramétrica: $\begin{cases} x = -k \\ y = -1 + 2k \end{cases},\ k \in \mathbb{R}$
- Continua: $\frac{x-0}{-1} = \frac{y-(-1)}{2} \Rightarrow \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2}$
- General: $\frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2} \Rightarrow \Rightarrow 2x + y + 1 = 0$
- Explícita: : $\frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2} \Rightarrow 2x + y + 1 = 0 \Rightarrow y = -2x - 1$
- Punto-pendiente:

$m = \frac{2}{-1} = -2 \Rightarrow y + 1 = -2(x - 0) = -2x$

- Canónica: $\left.\begin{matrix} x = 0 \ \Rightarrow y = -1 \\ y = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{x}{-1/2} + \frac{y}{-1} = 1$


Página 170

1. ECUACIONES DE LA RECTA ECUACIÓN VECTORIAL

Una recta es un elemento geométrico, formado por una sucesión infinita de puntos en una sola dimensión.

Una recta en el plano queda determinada por dos puntos, A y B, o por un punto A y un vector $\vec{u}$ llamado vector director, que indica su dirección. Calcular la ecuación de una recta consiste en hallar la relación que cumplen todos sus puntos. **Observa** las distintas formas que tenemos de expresar una recta.

Ecuación de la recta en forma vectorial

Consideramos una recta determinada por un punto $A = (a_1, a_2)$ y un vector director $\vec{u} = (u_1, u_2)$.

Si $P = (x, y)$ es un punto cualquiera de la recta y $\vec{p}$ y $\vec{a}$ son los vectores posición de P y A respectivamente, aplicando la suma de vectores se verifica que cualquier punto P cumplirá:

$\vec{p} = \vec{a} + \overrightarrow{AP}$

El vector $\overrightarrow{AP}$ tiene la misma dirección que el vector $\vec{u}$ y podremos escribirlo como $\overrightarrow{AP} = k \cdot \vec{u}$, siendo k un número real. Sustituimos a la igualdad anterior, y obtenemos la ecuación vectorial de la recta.

Figura 1

$\vec{p} = \vec{a} + k \cdot \vec{u}$ donde $k \in \mathbb{R}$

Dando valores al parámetro k, obtenemos todos los puntos de la recta: así, para k = 0 obtenemos el punto A y para k = 1 obtenemos el punto $(a_1 + u_1, a_2 + u_2)$.

René Descartes

(La Haye, 1596 - Estocolmo, 1650)

Su obra más importante fue el Discurso del método, publicada en el año 1637.

En uno de los apéndices de esta obra, titulado «Geométrie», desarrolla procedimientos geométricos para resolver determinados problemas algebraicos e introduce el sistema de referencia que actualmente se conoce como coordenadas cartesianas.

Y TAMBIÉN

Un sistema de referencia en el plano se define a partir de un punto fijo O llamado origen y una base formada por dos vectores $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ con distinta dirección.

A partir de un sistema de referencia, se pueden expresar analíticamente los elementos del plano.

Ejemplo 1

Una recta por el punto A (3,-2) y tiene un vector director = (-1, 3). Escribir su ecuación vectorial. (x, y)= (3; -2) + k (-1; 3)

Actividades

1. **Escribe** la ecuación vectorial de la recta que pasa por:

a. $A\left(\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}\right)$ ($\vec{v}$= (0,75;1,5)   b. $\vec{v}$=(0,75;1,5) y el punto B (-8; -5)

2. **Calcula** todas las ecuaciones de la recta determinada por el vector $\vec{v}$= (−1, 2) y el punto P = (0, -1)

170

Página 171

Solucionario

Ejercicio 3

Recuerda que el punto medio de un segmento lo divide en dos partes iguales. Así, en un segmento de extremos *A* y *B*, su punto medio *M* verifica que:

$(m_1, m_2) = \left(\frac{p_1 + q_1}{2}, \frac{p_2 + q_2}{2}\right)$

a) $M_a = \left(\frac{-\frac{3}{2} + \frac{5}{2}}{2}; \frac{\frac{1}{2} + \frac{7}{2}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$

b) $M_B\left(\frac{-\frac{5}{2} + 0}{2}; \frac{0 - \frac{7}{2}}{2}\right) = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{7}{4}\right)$

Ejercicio 4

$M_B\left(\frac{-9-5}{2}; \frac{15-5}{2}\right) = (-7, 10)$

Ejercicio 5

$M_{AB} = \left(\frac{-9-5}{2}; \frac{15-5}{2}\right) = (-7,5)$

A partir de la expresión (m_1, m_2)

$= \left(\frac{p_1+q_1}{2}, \frac{p_2+q_2}{2}\right)$, sustituimos las coordenadas del segmento AB y del punto A para obtener las coordenadas de B.

$\left.\begin{matrix} 5 = \frac{\quad}{2} \\ -2 = \frac{-1 + b_y}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 10 = 7 + b_x \\ -4 = -1 + b_y \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

⇒bx = 3, by = -3, por tanto B(3,-3)

Ejercicio 6

Hallamos las coordenadas del punto M, punto medio de PQ, M $\left(\frac{-2+10}{2}; \frac{7-1}{2}\right) = (4, 3)$

Luego hallamos las coordenadas de N, que es el punto medio de PM:

N $\left(\frac{-2+4}{2}; \frac{7+3}{2}\right) = (1, 5)$

Ejercicio 7

Sustituyendo las coordenadas del punto M y de los puntos (x, −2) y (6, y).

(5, -3)= $\left(\frac{x+6}{2}, \frac{-2+y}{2}\right)$, luego formamos un sistema de ecuaciones a partir de esta expresión:

$\left.\begin{matrix} 5 = \frac{x+6}{2} \\ -3 = \frac{-2+y}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 10 = x + 6 \\ -6 = -2 + y \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

⇒x = 4, y = -4

Página 177

7. INCIDENCIA

Incidir quiere decir: estar en, pasar por, es lo mismo que decir que está incluido o que pertenece pero es más genérico por cuanto se puede decir que un punto está incluido en una recta pero no se puede decir que una recta está incluida en un punto, de forma genérica e indistintamente podemos decir que un punto incide en una recta o una recta incide en un punto.

Incidencia de puntos

Un punto P (p_1, p_2) pertenece a una recta de ecuación $Ax + By + C = 0$, cuando las coordenadas del punto satisfacen la igualdad: $Ap_1 + Bp_2 + C = 0$.

Cuando un punto P pertenece a una recta *r* se dice que *r* incide en P o que *r* pasa por P.

Ejemplo 6

1. Analizar si los puntos A (3, 5) y B (0, 1) pertenecen o no a la recta $r: x + 2y - 13 = 0$.

Solución:

2. Sea A (3, 5) $\Rightarrow 3 + 2 \cdot 5 - 13 = 3 + 10 - 13 = 0$

Sea B (0, 1) $\Rightarrow 0 + 2 \cdot 1 - 13 = 2 - 13 = -11 \neq 0$

Por tanto: $A \in r \wedge B \notin r$

Incidencia de rectas

Cuando dos rectas *r* y *s* tienen un punto común, se dice que tienen un punto de intersección.

Para hallar las coordenadas del punto de intersección de dos rectas, se resuelve el sistema formado por las dos ecuaciones de las rectas.

Ejemplo 7

Hallemos el punto de intersección de las rectas de ecuaciones $r = 2x - y - 1 = 0$ y $s = x - y + 1 = 0$

Solución:

1. Formamos el sistema con ambas ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} 2x - y - 1 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{array}\right\}$
2. Resolvemos el sistema de ecuaciones, por cualquier método ya estudiado

Por igualación	Por reducción
$2x - 1 = y$	Multiplicamos por (-1) la primera ecuación
$x + 1 = y$	$-2x + y + 1 = 0$
$2x - 1 = x + 1$	$x - y + 1 = 0$
$x = 2$	$-x + 2 = 0$, luego $x = 2$
Sustituyendo x en 1	$\therefore CS = \{(2, 3)\}$
$2 \cdot 2 - 1 = y$	
$y = 3$	

Actividades

8. Dada la recta de ecuación $y = 2x - 5$, **di** cuáles de los siguientes puntos son incidentes con ella, sin representarla gráficamente: $A (1,1)$, $B (3,1)$, $C (5, 5)$ y $D (1/2, 1/3)$.
9. **Determina** el valor de *k* de modo que el punto (-1,4) pertenezca a la recta $3kx - 5y + 1 = 0$.
10. **Halla**, sin representar, los puntos de la recta de ecuación $2x - 3y = 6$ incidentes con los ejes.

177

Solucionario

Ejercicio 8

Para conocer si los puntos dados inciden o pertenecen a la recta los sustituimos en la ecuación dada: y = 2x – 5.

A (1, 1): 1 = 2.1 -5 ⇒ 1 = 2 - 5⇒ 1 ≠ -3

B (3, 1): 1 = 2.3 -5 ⇒ 1 = 6 - 5⇒ 1 = 1

C (5, 5): 5 = 2.5 -5 ⇒ 5 = 10 – 5 ⇒ 5 = 5

D (1/2, 1/3): $\frac{1}{3} = 2.\frac{1}{2} - 5 \Rightarrow \frac{1}{3} = 1 - 5 \Rightarrow \frac{1}{3} \neq -4$

Por tanto solo los puntos B y C son incidentes en la recta.

Ejercicio 9

Para que el punto k pertenezca a la recta, debemos comprobar que sus coordenadas satisfagan la igualdad, por tanto lo reemplazamos en ella:

3k.(-1)-5.(4) + 1 = 0 ⇒ -3k – 20 + 1 = 0 ⇒ 3k = - 19

⇒ k = -19/3

Ejercicio 10

Los puntos incidentes con los ejes son (0,y) y (x,0) ,por tanto los sustituimos en la ecuación:

(x, 0) : 2x – 3. 0 = 6 ⇒ x = 3

(0, y) : 2.0 - 3y = 6 ⇒ y = -2.

Luego los puntos son (3, 0) y (0, -2).

Página 183

13. CÁLCULO DIRECTO DE LA DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Si consideramos el punto $P = (p_1, p_2)$ exterior a la recta r de ecuación general $Ax + By + C = 0$, no es necesario calcular el punto de intersección entre r y una perpendicular que pase por P, pues podemos calcular directamente la distancia de P a la recta r a partir de la fórmula:

$$d(P, r) = \frac{|A \cdot p_1 + B \cdot p_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Veamos la demostración de esta igualdad.

Sea P un punto exterior a la recta, $A = (a_1, a_2)$ un punto cualquiera de la recta r y $\vec{n} = (A, B)$ un vector perpendicular a r. La distancia de P a r es la mínima entre ambos elementos: $d(P, r) = d(P, H) = |\overrightarrow{PH}|$. Por ser PHA un triángulo rectángulo, se cumple:

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{PH}|}{|\overrightarrow{PA}|} \Rightarrow |\overrightarrow{PH}| = |\overrightarrow{PA}| \cdot \cos\alpha$$

Aplicando la definición de producto escalar de vectores:

$$\overrightarrow{PA} \cdot \vec{n} = |\overrightarrow{PA}|\,|\vec{n}| \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{PA}|\,|\vec{n}|}$$

Sustituimos en la primera fórmula la expresión de cos α obtenida en la segunda:

$$d(P, r) = |\overrightarrow{PH}| = |\overrightarrow{PA}| \cdot \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{PA}|\,|\vec{n}|} = \frac{|(p_1 - a_1, p_2 - a_2) \cdot (A, B)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$$

$$= \frac{|(p_1 - a_1) \cdot A + (p_2 - a_2) \cdot B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ap_1 + Bp_2 - a_1A - a_2B|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Como $A = (a_1, a_2) \in r$, entonces $Aa_1 + Ba_2 + C = 0$ 1 $C = -Aa_1 - Ba_2$.

$$d(P, r) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

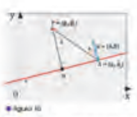


Figura 10

Distancia de un punto a una recta

TIC

En la siguiente página web, encontrarás una gran variedad de actividades para practicar y ampliar los conocimientos de geometría métrica:

http://links.edebe.com/v796

Y TAMBIÉN

Al ser α un ángulo agudo, se cumplirá que cos α > 0 y podremos definir el ángulo como:

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{AP}|\,|\vec{n}|}$$

Actividades

11. En la siguiente página web encontrarás la demostración de la fórmula de la distancia de una recta a un punto: http://links.edebe.com/adj ¿Qué diferencias hay entre la demostración que has estudiado en la unidad y la que se muestra en esta página?
12. Dadas las siguientes rectas:

$$r: \frac{x - 2}{3} = \frac{y + 2}{4} \qquad s: \left.\begin{array}{l} x = 4 + k \\ y = k \end{array}\right\}$$

—**Determina** la distancia del punto de corte entre r y s con la recta $-4x - y = 4$.

183

Solucionario

Ejercicio 11

En la demostración de la unidad se utiliza que por ser PHA un triángulo rectángulo, donde P (p, q) es el punto, A (a, b) un punto de la recta r y H el punto de corte entre r y su perpendicular pasando por P, se cumple que d(P, r) = $|\overline{PH}| = |\overline{PA}| \cdot \frac{PA \cdot n}{|\overline{PA}||\overline{n}|}$ y en la demostración de esta página solo utiliza la proyección de AP (p - a, q - b).

Ejercicio 12

Calculamos el punto de corte entre *r* y *s*:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x+2}{3} = \frac{y+2}{4} \\ \left.\begin{array}{l} x = 4 + k \\ y = k \end{array}\right\} \Rightarrow x - 4 = y \end{array}\right\} \Rightarrow x = -14,\ y = -18 \Rightarrow P = (-14, -18)$$

Sea t: $-4x - y = 4$, entonces:

$$d(P, t) = \frac{|A \cdot p_1 + B \cdot p_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|(-4)(-14) + (-1)(-18) - 4|}{\sqrt{(-4)^2 + (-1)^2}} =$$

$$= \frac{70}{\sqrt{17}}\, u$$

Página 184

Solucionario

Ejercicio 13
La recta r está expresada en forma vectorial; un punto que pasa por esta recta es $P = (0, 1)$. Por otro lado, la ecuación general de la recta s es $4x + 6y + 2 = 0$.

$$d(P, s) = \frac{|4 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 2|}{\sqrt{4^2 + 6^2}} = \frac{8}{\sqrt{52}} = \frac{4}{\sqrt{13}}$$

Página 190

Solucionario

2. a. $\frac{x-0}{2} = \frac{y-(-3)}{3} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y+3}{3}$
   b. La recta pasa por el punto B y tiene como vector director:
   $\overline{BA} = (4, -2) = 2 \cdot (2, -1) \Rightarrow$
   $\left.\begin{matrix} x = 1 + 2k \\ y = 1 - k \end{matrix}\right\}, k \in \mathbb{R}$
3. a. Ecuación paramétrica $\Rightarrow P = (-3, 0)$, $\vec{u} = (2, -1)$
   b. Ecuación continua $\Rightarrow P = (2, -1)$, $\vec{u} = (3, 4)$
   c. $x = 2 \Rightarrow P = (2, 0)$, $\vec{u} = (-B, A) = (0, 1)$
4. a. $y = -3x + 3$ b. $3x - 2y - 11 = 0$
5. Calculamos las diagonales:
   • Diagonal AC: Pasa por el punto A y tiene como vector director
   $AC = (7,1) \Rightarrow \frac{x+3}{7} = \frac{y-3}{1} \Rightarrow -x + 7y = 24$
   • Diagonal AD: Pasa por el punto A y tiene como vector director
   $AD = (5, -3) \Rightarrow \frac{x+3}{5} = \frac{y-3}{-3} \Rightarrow 3x + 5y = 6$
   • Diagonal BD: Pasa por el punto B y tiene como vector director
6. La recta pasa por A y tiene como vector director un vector normal de la recta s, es decir:
   $n = (2, 3) \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} \Rightarrow 3x - 2y + 3 = 0$
   Entonces:
   $x = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$, $y = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow \frac{x}{-1} + \frac{y}{3/2} = 1$
7. a. La recta OX es la recta $y = 0 \Rightarrow P = (2, 0)$, $\vec{u}_{OX} = (1, 0)$.
   La recta OY es la recta $x = 0 \Rightarrow P = (0, 2)$, $\vec{v}_{OY} = (0,1)$.
   b. La bisectriz $B13$ es $x = y \Rightarrow P = (1, 1)$, $\vec{w}_{B13} = (-B, A) = (1, 1)$.
   La bisectriz $B24$ es $x = -y \Rightarrow P\ (1, 1)$, $\vec{z}_{B24} = (-B, A) = (-1, 1)$.
8. • Lado AB: Pasa por el punto A y tiene como vector director
   $\overline{AB} = (6,2) \Rightarrow \frac{x+2}{6} = \frac{y-3}{2} \Rightarrow x - 3y + 11 = 0$
   • Lado AC: Pasa por el punto A y tiene como vector director
   $\overline{AB} = (6,-5) \Rightarrow \frac{x+2}{6} = \frac{y-3}{-5} \Rightarrow 5x + 6y - 8 = 0$
   • Lado BC: Pasa por el punto B y tiene como vector director
   $\overline{BC} = (0, -7)$. Entonces, la recta BC es $x = 4$.

• La mediana AM_1, donde $M_1 = \left(\frac{4+4}{2}, \frac{5-2}{2}\right) = (4, 3/2)$ es el punto medio del lado BC, pasa por A y su vector director es
$AM_1 = (6, -3/2) \Rightarrow \frac{x+2}{6} = \frac{y-3}{-3/2} \Rightarrow x + 4y - 10 = 0$.

• La mediana BM_2, donde $M_2 = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3-2}{2}\right) = (1,1/2)$ es el punto medio del lado AC, pasa por

B y su vector director es $\overline{BM_2} = (-3, -9/2)$
$\Rightarrow \frac{x-4}{-3} = \frac{y-5}{-9/2}$
$\Rightarrow 3x - 2y - 2 = 0$

• La mediana CM_3, donde $M_3 \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = (1, 4)$ es el punto medio del lado AB, pasa por C y su vector director es $\overline{CM_3} = (-3, 6) \Rightarrow \frac{x-4}{-3} = \frac{y+2}{6} \Rightarrow -2x - y + 6 = 0$.

Solucionario

9. Sea $y - 4 = m(x + 3)$ la recta que pasa por el punto A. Como la recta corta los ejes de coordenadas, tenemos que:

$x = 0 \Rightarrow y = 3m + 4 \Rightarrow B = (0,3m + 4)$

$y = 0 \Rightarrow x = \frac{-4-3m}{m} \Rightarrow C = \left(\frac{-4-3m}{m}, 0\right)$

$$d(B,O) = d(C,O) \Rightarrow \sqrt{(3m+4)^2} = \sqrt{\left(\frac{-4-3m}{m}\right)^2}$$

$$\begin{cases} 3m + 4 = \frac{-4-3m}{m} \\ -3m - 4 = \frac{-4-3m}{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m^2 + 7m + 4 = 0 \\ 3m^2 + m - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m = -1, m = -4/3 \\ m = 1, m = -4/3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y - 4 = -1(x+3) \\ y - 4 = 1(x+3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y + 7 = 0 \end{cases}$$

Nota: No consideramos el valor $m = -4/3$, ya que el resultado es una recta que corta en el origen de coordenadas y, entonces, la distancia a cada punto de corte sería cero.

10. a. La recta a pasa por los puntos $A = (-8, 0)$ y $B = (0, 4)$ y su vector director es

$AB = (8, 4) \Rightarrow a: \frac{x+8}{8} = \frac{y}{4} \Rightarrow -x + 2y = 8$

b. La recta b pasa por los puntos $A = (-3, 0)$ y $B = (0, -4)$ y su vector director es:

$AB = (3, -4) \Rightarrow b: \frac{x+3}{3} = \frac{y}{-4} \Rightarrow -4x - 3y = 12$

c. La recta c es $y = 11$, que es paralela al eje X.

d. La recta d es $x = 7$, que es paralela al eje Y.

e. La recta e pasa por los puntos $A = (0, 0)$ y $B = (7; 7{,}5)$ y su vector director es:

$AB = (7, 7{,}5) \Rightarrow e: \frac{x}{7} = \frac{y}{7{,}5} \Rightarrow -7{,}5x + 7y = 0$

f. La recta f pasa por $A = (-18, 0)$ y $B = (0, 7)$ y su vector director es

$AB = (18,7) \Rightarrow f: \frac{x+18}{18} = \frac{y}{7} \Rightarrow 7x - 18y = -126$

11. La recta AB es $y=11$, que es paralela al eje X.

La recta BC pasa por el punto B y tiene como vector director

$\overline{BC} = (-4, -4) \Rightarrow$

$\frac{x-8}{-4} = \frac{y-11}{-4} \Rightarrow x - y + 3 = 0.$

La recta CD es $y = 7$, que es paralela al eje X.

La recta DE pasa por el punto D y tiene como vector director

$\overline{DE} = (-2, -3) \Rightarrow \frac{x-7}{-2} = \frac{y-7}{-3} \Rightarrow 3x - 2y - 7 = 0.$

La recta EJ pasa por el punto E y tiene como vector director

$\overline{EJ} = (3,1) \Rightarrow \frac{x-5}{3} = \frac{y-4}{1} \Rightarrow -x + 3y - 7 = 0.$

La recta EF pasa por el punto E y tiene como vector director

$\overline{EF} = (6, -3) \Rightarrow \frac{x-5}{6} = \frac{y-4}{-3} \Rightarrow x + 2y - 13 = 0.$

La recta FG pasa por el punto F y tiene como vector director

$\overline{FG} = (-2, -4) \Rightarrow \frac{x-11}{-2} = \frac{y-1}{-4} \Rightarrow 2x - y - 21 = 0.$

La recta AH pasa por el punto A y tiene como vector director

$\overline{AH} = (-2, -3) \Rightarrow \frac{x-14}{-2} = \frac{y-11}{-3} \Rightarrow 3x - 2y - 20 = 0.$

• La recta HI pasa por el punto H y tiene como vector director

$HI = (1, -11) \Rightarrow \frac{x-12}{1} = \frac{y-8}{-11} \Rightarrow 11x + y - 140 = 0.$

• La recta KL pasa por el punto K y tiene como vector director

$KL = (1, -1) \Rightarrow \frac{x-8}{1} = \frac{y-10}{-1} \Rightarrow x + y - 18 = 0.$

• La recta LM es $y = 9$, que es paralela al eje X.

12. Sea $y - 2 = m(x - 2)$ recta corta con los semiejes positivos, tenemos que:

$x = 0 \Rightarrow y = -2m + 2 \Rightarrow A = (0, -2m + 2)$

$y = 0 \Rightarrow x = \frac{-2+2m}{m} \Rightarrow B = \left(\frac{-2+2m}{m}, 0\right)$

Imponemos la condición del enunciado:

$$\frac{d(O,A).d(O,B)}{2} = 9 \Rightarrow$$

$$\sqrt{(-2m+2)^2}\sqrt{\left(\frac{-2+2m}{m}\right)^2} = 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2m + 2 = \frac{-2+2m}{m} \Rightarrow 4m^2 + 10m + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 = -2, m_2 = \frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1: y - 2 = -2(x-2) \Rightarrow 2x + y = 6 \\ m_2: y - 2 = -\frac{1}{2(x-2)} \Rightarrow x + 2y = 6 \end{cases}$$

Página 190

Solucionario

13. Calculamos las rectas r y s:

- La recta r pasa por A y su vector director es el de la recta BC

$BC = (-10, -10) \Rightarrow \frac{x+3}{-10} = \frac{y-6}{-10} \Rightarrow x - y + 9 = 0$

- La recta s pasa por B y tiene como vector director un vector normal de r:

$n = (1, -1) \Rightarrow \frac{x-13}{1} = \frac{y-8}{-1} \Rightarrow x + y - 21 = 0$

$\left.\begin{matrix} x - y + 9 = 0 \\ x + y - 21 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = 6, y = 15 \Rightarrow D = (6,15)$

14. Para saber si es posible unir los puntos de riego en una línea recta se ha de comprobar si los puntos A, B y C están alineados.
Es decir, si se cumple que:

$$\frac{b_1 - a_1}{c_1 - b_1} = \frac{b_2 - a_2}{c_2 - b_2} \Rightarrow \frac{5-2}{6{,}5-5} = \frac{-1-3}{-3-(-1)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{3}{1{,}5} = \frac{-4}{-2} \Rightarrow 2 = 2$$

Por tanto, es posible unir los tres puntos en una línea recta.

15. Calculamos los vértices del rombo:
- $A = \{-x + 2y - 16 = 0\} \cap \{3x + 4y - 52 = 0\} \Rightarrow A = (4{,}10)$
- La recta perpendicular a la ecuación de la diagonal es otra de las diagonales del rombo. Esta recta pasa por Q y tiene vector director:

$$\vec{n} = (3{,}4) \Rightarrow \frac{x-8}{3} = \frac{y-7}{4} \Rightarrow 4x - 3y - 11 = 0$$

$$B = \{-x + 2y - 16 = 0\} \cap \{4x - 3y - 11 = 0\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow B = (14{,}15)$

- Q es el punto medio del segmento AC, entonces:

$$Q = (8{,}7) = \left(\frac{4+c_1}{2}, \frac{10+c_2}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{4+c_1}{2} = 8 \\ \frac{10+c_2}{2} = 7 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow C = (12, 4)$

- Q es el punto medio del segmento BD, entonces:

$$Q = (8{,}7) = \left(\frac{14+d_1}{2}, \frac{15+d_2}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{14+d_1}{2} = 8 \\ \frac{15+d_2}{2} = 7 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow D = (2, -1)$

Página 191

Solucionario

16. Calculamos los vértices del triángulo:

•MA es el punto medio entre B y C, entonces:
$MA = 1/2(B + C) = (3{,}7) \Rightarrow b_1 + c_1 = 6, b_2 + c_2 = 14$

•MB es el punto medio entre A y C, entonces:
$MB = 1/2(A + C) = (12{,}10) \Rightarrow a_1 + c_1 = 24, a_2 + c_2 = 20$

•MC es el punto medio entre A y B, entonces:

$MC = 1/2\ (A + B) = (7,-3) \Rightarrow a_1 + b_1 = 14, a_2 + b_2 = -6$

Resolviendo este sistema de ecuaciones resulta:
$a_1 = 16, b_1 = -2, c_1 = 8, a_2 = 0, b_2 = -6, c_2 = 20$
$\Rightarrow A = (16, 0), B = (-2, -6), C = (8{,}20)$
Calculamos las ecuaciones de los lados del triángulo:
• La recta r pasa por MA y tiene como vector director

$\overline{M_A C} = = (5{,}13) \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = 7 + 13t \end{cases}, t \in |R$

• La recta p pasa por MB y tiene como vector director

$\overline{M_B A} = (4, -10) = 2(2, -5) \Rightarrow \begin{cases} x = 12 + 2t \\ y = 10 - 5t \end{cases}, t \in |R$

• La recta s pasa por MC y tiene como vector director

$\overline{M_C B} = (-9, -3) = -3(3, 1) \Rightarrow \begin{cases} x = 7 + 3t \\ y = -3 + 1t \end{cases}, t \in |R$

17. Sea *r: y* - 2 = *mx* la recta que pasa por el punto *A* y sean *B* y *C* los puntos de corte de *r* con las otras dos rectas. Entonces:

$$B = r \cap \{5x - y + 16 = 0\} \Rightarrow B = \left(\frac{14}{m-5}, \frac{2(8m-5)}{m-5}\right)$$

$$C = r \cap \{-x + 3y = -8\} \Rightarrow C = \left(\frac{-14}{3m-1}, \frac{-2(4m+1)}{3m-1}\right)$$

Imponemos que *A* sea el punto medio del segmento *BC*.

$$A = \left(\frac{\left(\frac{14}{m-5} + \frac{-14}{3m-1}\right)}{2}, \frac{\left(\frac{2(8m-5)}{m-5} + \frac{-2(4m+1)}{3m-1}\right)}{2}\right) = ($$

$$\Rightarrow m = -2 \Rightarrow y - 2 = -2x \Rightarrow 2x + y = 2$$

2 Posición relativa de dos rectas

18. $\vec{u}_r = (3,2)$, $\vec{u}_s = (n+1, n)$

$\frac{3}{n+1} = \frac{2}{n} \Rightarrow n = 2$

19. a. u r = (−1, 3), us = (−2, 1) ⇒ Las rectas son secantes ya que los vectores directores no son proporcionales. Calculamos el punto de intersección *P* entre las dos rectas:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 - t \\ y = -1 + 3t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t = 2 - x \\ t = \frac{y+1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow 2 - x = \frac{y+1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x + y - 5 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x + y - 5 = 0 \\ \frac{x+2}{-2} = \frac{y-3}{1} \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{6}{5}, y = \frac{7}{5} \Rightarrow P = \left(\frac{6}{5}, \frac{7}{5}\right)$$

. $\vec{u}r = (2, 3)$, $\vec{u}s = (-1, 3)$ ⇒ Las rectas son
ecantes porque los vectores directores no son
roporcionales.

$\, = \begin{cases} 3x - 2y + 1 = 0 \\ y = -3x + 2 \end{cases}$ ⇒ x =1/3, *y* = 1 ⇒ *P*
(1/3,1)

. $\vec{u}r = (-1, 7)$, $\vec{u}s = (-1, 7)$ ⇒ Las rectas son
aralelas porque los vectores directores son
guales.

. $\vec{u}r = (1, -1)$, $\vec{u}s = (-2, 3)$ ⇒ Las rectas son
ecantes porque los vectores directores no son
roporcionales. Calculamos el punto de
ntersección *P*:

$$r: \left.\begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = -1 - t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t = x - 2 \\ t = -1 - y \end{array}\right\} \Rightarrow x - 2 = -1 - y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + y - 1 = 0$$

$$s: \left.\begin{array}{l} x = 1 - 2t \\ y = 1 + 3t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t = \frac{x-1}{-2} \\ t = \frac{y-1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x + 2y - 5 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y - 1 = 0 \\ 3x + 2y - 5 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = -2, x = 3 \Rightarrow P = (3, -2)$$

20. Las rectas *r* y *s* son paralelas si

$\frac{2}{7} = \frac{-3}{k} \Rightarrow k = \frac{7\cdot(-3)}{2} = \frac{-21}{2}$

21. Para saber si los dos submarinos chocarán en algún momento, se debe calcular si las trayectorias que siguen dichos submarinos se cortan o no. $\vec{u}_1 = (-3, 4)$, $\vec{u}_2 = (-3, 4)$ ⇒ Los vectores directores son iguales, de modo que las trayectorias seguidas son paralelas y, por lo tanto, no se cortan.

22. Respuesta sugerida:
 - Ejemplo 1: Sean *r:* 2x + 3*y* – 5 = 0 y *s:* 2*x* - 3*y* + 3 = 0, como 2/2 es distinto de 3/-3, las rectas son secantes.
 - Ejemplo 2: Sean *r:* 5x - 2*y* + 1 = 0 y *s:* 10*x* - 4*x* + 3 = 0, como 5/10 = -2/-4 y distinto de 1/3 las rectas son paralelas.

23. $\vec{u}r = (5, 3)$, $\vec{u}s = (k, 10) \Rightarrow \vec{n}r = (-3, 5)$ y $\vec{u}s$, $\vec{n}r$ han de ser proporcionales $\Rightarrow 2 \cdot \vec{n}r = 2 \cdot (-3, 5) = (-6, 10) \Rightarrow k = -6$

24. Ecuación punto-pendiente: *y* + 3 = *m*(*x* - 2) *m* ∈ R y *x* = 2.

25. $\vec{u}r = (2,1)$, $\vec{u}s = (-1,3) \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{u}r \cdot \vec{u}s = 1, |\vec{u_r}| = \sqrt{5}, |\vec{u}s| = \sqrt{10}$

$\cos\alpha = \left|\frac{\vec{u_r} \cdot \vec{u_s}}{|\vec{u_r}|\,|\vec{u_s}|}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{5}.\sqrt{10}}\right| = \frac{\sqrt{2}}{10}$

$\alpha = \text{arc cos} \left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right) = 81°52´$

26. $\vec{u} = \overline{AB} = (-2, 2)$, $\vec{v} = \overline{AC} = (2, -1)$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6$, $\vec{u} = \sqrt{8}$, $|\vec{v}| = \sqrt{5}$ $\cos\alpha = \left|\frac{\vec{u_r} \cdot \vec{u_s}}{|\vec{u_r}|\,|\vec{u_s}|}\right| = \left|\frac{-6}{\sqrt{8}.\sqrt{5}}\right| = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ $\alpha = \text{arc cos}\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\right) = 18°26´$

27. $\vec{u} = (3, -1)$, $\vec{v} = (1,2) \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 1$, $|\vec{u}| = \sqrt{10}$, $|\vec{v}| = \sqrt{5}$

$\cos\alpha = \left|\frac{1}{\sqrt{10}.\sqrt{5}}\right| = \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$

$\alpha = \text{arc cos}\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right) = 81°\ 52'12''$

28. $A = r \cap s = \begin{cases} 2x + 3y - 5 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 1, y = 1 \Rightarrow A = (1,1)$

La recta pasa por los puntos $A = (1, 1)$ y $B = (2, -1)$ y su vector director es $\overrightarrow{AB} = (1, -2) \Rightarrow$

$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} \Rightarrow 2x + y - 3 = 0$

29. El ángulo viene delimitado por las rectas BC y AC, por tanto, necesitamos saber los vectores directores de estas rectas.

$\overrightarrow{BC} = (-2, -6)$, $\overrightarrow{AC} = (-12, -6) \Rightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = 60$, $|\overrightarrow{BC}| = 40$,

$\overrightarrow{AC} = \sqrt{180} \Rightarrow \cos\hat{C} = \frac{60}{\sqrt{40}\sqrt{180}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\hat{C} = \text{arc cos}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45°$

30. Sea $\vec{u}r = (-1,1) \Rightarrow m_r = -1$ y $m_s > m_r$ la pendiente de la otra recta. Entonces:

$\text{tg } 45° = \left|\frac{m_s - m_r}{1 + m_s m_r}\right| \Rightarrow 1 = \left|\frac{m_s + 1}{1 - m_s}\right| \Rightarrow ms = 0$

La única recta con pendiente 0 y que corta con el eje *OX* es la recta $y = 0$.

31. Debemos hallar dos alturas e intersecarlas.

• La altura sobre el lado *AC* pasa por *B* y tiene como vector director un vector normal de la recta *AC*, es decir, $\vec{n} = (6, 10) \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{y-6}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x - 3y + 18 = 0$

• La altura sobre el lado *BC* pasa por *A* y tiene como vector director un vector normal de la recta *BC*, es decir, $\vec{n} = (10,6) \Rightarrow \frac{x+4}{10} = \frac{y-2}{6} \Rightarrow 3x - 5y + 22 = 0$ $\begin{cases} 5x - 3y + 18 = 0 \\ 3x - 5y + 22 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -3/2$, $y = 7/2 \Rightarrow O = \left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$

32. a) $\frac{a}{3a} = \frac{a-1}{-(3a+1)} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{a-1}{-(3a+1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow -3a - 1 = 3a - 3 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$

b) $\vec{n}r = (a, a-1)$, $\vec{u}s = (3a + 1, 3a)$

Estos dos vectores han de ser proporcionales, por tanto, se debe cumplir que $a = 3a + 1 \rightarrow a = -1/2$. Calculamos el punto de corte para $a = -1/2$:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{-1}{2}x - \frac{3}{2}y - 3 = 0 \\ \frac{-3}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{2} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = -1{,}5,\ y = -1{,}5 \Rightarrow$$

$\Rightarrow P = (-1{,}5, -1{,}5)$

33. a. $d(P,Q) = \sqrt{(-7-5)^2 + (50)^2} = \sqrt{81 + 25} = \sqrt{106}$

b. $d(R, S) = \sqrt{(-2-(-1))^2 + (-3-7)^2} = \sqrt{1 + 100} = \sqrt{101}$

Solucionario

34. Sea P ′ = (x, y) el punto simétrico de P respecto de Q. Como Q es el punto medio de P y P ′ tenemos que:

$$Q=\left(\frac{-3+x}{2},\frac{9+y}{2}\right)=(2,3)\Rightarrow\begin{cases}\frac{-3+x}{2}=2\\ \frac{9+y}{2}=3\end{cases}\Rightarrow P'=(7,-3)$$

35. La recta paralela a $y = -2x + 6$ es de la forma $y = -2x + k$, y pasa por Q, por tanto, $k = 2$ y $t : y = -2x + 2$.

$$d(P,t)=\frac{|A\cdot p_1+B\cdot p_2+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|2\cdot 3+1\cdot(-5)-2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

36. Calculamos la distancia que hay entre los puntos M y A, y entre M y B.

$d(M, A) = \sqrt{(103-32)^2+(22-12)^2}$
$=\sqrt{5\,141}$

$d(M,B) = \sqrt{(30-32)^2+(100-12)^2} =$
$=\sqrt{7\,748}$

Como $d(M, A) < d(M, B)$, entonces el participante que llegará primero será el participante A.

37. Para demostrar que los puntos A, B, C y D forman un cuadrado se ha de comprobar que todos los lados miden lo mismo y que los lados son perpendiculares entre ellos, es decir, que se cumple lo siguiente:

$AB\cdot BC = BC\cdot CD = CD\cdot AD = 0$

- $d(A, B) = \sqrt{(6-0)^2+(4-9)^2} = \sqrt{61}$
- $d(B, C) = \sqrt{(11-6)^2+(10-4)^2} = \sqrt{61}$
- $d(C, D) = \sqrt{(5-11)^2+(15-10)^2} = \sqrt{61}$
- $d(D, A) = \sqrt{(0-5)^2+(9-15)^2} = \sqrt{61}$
  - $\overline{AB} = (6, -5)$, $\overline{BC} = (5,6) \Rightarrow \overline{AB}\cdot\overline{BC} = 0$
  - $\overline{BC} = (5, 6)$, $\overline{CD} = (-6,5) \Rightarrow \overline{BC}\cdot\overline{CD} = 0$
  - $\overline{CD} = (-6,5)$, $\overline{AD} = (5,6) \Rightarrow \overline{AB}\cdot\overline{BC} = 0$

38. Los vectores directores de los lados del cuadrilátero son $AB = (4,-1)$, $BC = (-1,4)$, $CD = (-4,1)$, $AD = (-1,4)$; observamos que los lados son paralelos dos a dos ya que son proporcionales.
La longitud de los lados es $d(A, B) = d(B, C) = d(C, D) = d(A, D) = 17$; por tanto, todos los lados son iguales. Como $AB\cdot BC \neq 0$, hay un ángulo como mínimo que no es recto; entonces no puede ser un cuadrado, así que se trata de un rombo. Calculamos su área:

$$A=\frac{d(A,C)\cdot d(B,D)}{2}=\frac{\sqrt{3^2+3^2}\,\sqrt{5^2+(-5)^2}}{2}=15u^2$$

39. La recta perpendicular a s pasa por P y tiene vector director
$n = (-1,2) \Rightarrow \frac{x-7}{-1}=\frac{y-1}{2} \Rightarrow 2x + y - 15 = 0.$
Ahora, calculamos el punto de corte entre esta recta y la recta s:

$$s:\begin{matrix}x=-3+2t\\ y=1+t\end{matrix}\Bigg\}\Rightarrow\begin{matrix}t=\frac{x+3}{2}\\ t=y-1\end{matrix}\Bigg\}\Rightarrow x-2y+5=0$$

$$H=\begin{cases}x-2y+5=0\\ 2x+y-15=0\end{cases}\Rightarrow x=5,\ y=5\Rightarrow H=(5,5)$$

Sea P' = (x, y) el punto simétrico de P respecto de la recta s.
Como H es el punto medio de P y P' tenemos que:

$$H=\left(\frac{7+x}{2},\frac{1+y}{2}\right)=(5,5)\Rightarrow\begin{cases}\frac{7+x}{2}=5\\ \frac{1+y}{2}=5\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=3\\ y=9\end{cases}\Rightarrow P'=(3,9)$$

40. Los vértices son las intersecciones entre las rectas r, s y t.

- $A=r\cap s=\begin{cases}2x+3y=3\\ 6x-y=-21\end{cases}\Rightarrow x=-3,\ y=3\Rightarrow A=(-3,3)$
- $B=r\cap t=\begin{cases}2x+3y=3\\ -2x+7y=-13\end{cases}\Rightarrow x=3,\ y=-1\Rightarrow B=(3,-1)$
- $C=s\cap t=\begin{cases}6x-y=-21\\ -2x+7y=-13\end{cases}\Rightarrow C=(-4,-3)$

Para calcular el área necesitamos saber la altura y la base:

- Base $\rightarrow$ $d(B,C) = \sqrt{(-4-3)^2+(-3-(-1)^2}$
$=\sqrt{53}$
- Altura $\rightarrow$

$d(A,BC) = d(A,t) = \frac{|-2)\cdot(-3)+7\cdot 3+13|}{\sqrt{(-2)^2+7^2}} = \frac{40}{\sqrt{53}}$

$$A=\frac{b\cdot a}{2}=\frac{\sqrt{53}\,\frac{40}{\sqrt{53}}}{2}=20u^2$$

41. Los vértices son las intersecciones de las cuatro rectas. Observamos que las rectas r y s y las rectas t y u son paralelas, por lo tanto, no podemos intersecarlas.

- $A=s\cap u=\begin{cases}2x-y+3=0\\ y=-2x/3+3\end{cases}\Rightarrow x=0,\ y=3\Rightarrow A=(0,3)$
- $B=s\cap t=\begin{cases}2x-y+3=0\\ 2x+3y+3=0\end{cases}\Rightarrow B=(-1,5;0)$

- $C = r \cap t = \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 2x + 3y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = -1 \Rightarrow C = (0,-1)$

- $D = r \cap u = \begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -2x/3 + 3 \end{cases} \Rightarrow x = 1{,}5, y = 2 \Rightarrow D = (1{,}5;2)$

Es un paralelogramo, ya que sus lados son paralelos dos a dos. Para calcular el área necesitamos saber la base y la altura:

- Base $\rightarrow d(A,D) = \sqrt{(1{,}5-0)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{3{,}25}$
- La recta AD pasa por el punto A y tiene como vector $\overline{AD} = (1{,}5,-1) \Rightarrow \dfrac{x}{1{,}5} = \dfrac{y-3}{-1} \Rightarrow x + 1{,}5y - 4{,}5 = 0$

Altura $\rightarrow d(C, AD) = \dfrac{|1 \cdot 0 + 1{,}5 \cdot (-1) - 4{,}5|}{\sqrt{1{,}5^2 + 1^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{3{,}25}}$

$A = b \cdot a = \sqrt{3{,}25} \cdot \dfrac{6}{\sqrt{3{,}25}} = 6\,u^2$

42. Calculamos la recta AB y la longitud de este lado:
 • La recta AB pasa por A y tiene como vector director
 $AB = (6, -3) \Rightarrow AB : x + 2y - 13 = 0$.
 • $d(A,B) = \sqrt{(9-3)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{45}$
 Ahora, buscamos los vértices C y D:

 • El vértice C es la intersección entre la recta perpendicular a AB (con vector director $n = (1, 2)$) que pasa por B y la circunferencia de radio $d(A, B)$ y centro B.
 $\Rightarrow C = \begin{cases} 2x - y - 16 = 0 \\ (x-9)^2 + (y-5)^2 = 45 \end{cases} \Rightarrow (6, -4)$
 o $C = (12, 8)$
 • El vértice D es la intersección entre la recta perpendicular a AB (con vector director $n = (1, 2)$) que pasa por A y la circunferencia de radio $d(A, B)$ y centro A.
 $\Rightarrow D = \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ (x-3)^2 + (y-5)^2 = 45 \end{cases} \Rightarrow D =$
 $(0, -1)$ o $D = (6,11)$

43. Sea $C = (x, y)$ un punto cualquiera de la recta $-3x + 5y = 1$. Un punto cualquiera de la recta es como $C = ((5y - 1)/ 3, y)$. Ahora, imponemos la condición del enunciado: $d(P,C) = d(Q,C)$

$$\sqrt{\left(\frac{5y-1}{3} - (-1)\right)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{\left(\frac{5y-1}{3} - 5\right)^2 + (y$$

$$\left(\frac{5y+2}{3}\right)^2 + (y-3)^2 = \left(\frac{5y-16}{3}\right)^2 + (y-1)^2$$

$$\frac{34y^2 - 34y + 85}{9} = \frac{34y^2 - 178y + 265}{9} \Rightarrow y = \frac{5}{4};$$

$$C = \left(\frac{5 \cdot 1{,}25 - 1}{3}, 1{,}25\right) = (1{,}75;1{,}25)$$

44. Una ecuación de otro lado del cuadrado es la recta perpendicular a $-x + 2y = 1$ que pasa por Q. Esta recta tiene vector director
 $\vec{n} = (-1,2) \Rightarrow \frac{x+1}{-1} = \frac{y+5}{2} \Rightarrow -2x - y = 7$.

• $A = \{-x + 2y = 1\} \cap \{-2x - y = 7\} \Rightarrow A = (-3, -1)$
• $B = \{-x + 2y = -14\} \cap \{-2x - y = 7\} \Rightarrow B = (0, -7)$
• El vértice C es la intersección entre la recta $-x + 2y = -14$ y la circunferencia de radio $d(A, B) = \sqrt{45}$ y centro B.

$C = \begin{cases} -x + 2y = -14 \\ x^2 + (y+7)^2 = 45 \end{cases} \Rightarrow C = (-6,-10)$ *o* $C = (6,-4)$

• El vértice D es la intersección entre la recta $-x + 2y = 1$ y la circunferencia de radio $d\,(A, B)$ y centro A.

$D = \begin{cases} -x + 2y = 1 \\ (x+3)^2 + (y+1)^2 = 45 \end{cases} \Rightarrow D = (-9,-4)$ o $D = (3,2)$

Por último, calculamos la recta CD que puede ser de dos formas ya que tenemos dos valores de C y D:
• La recta CD pasa por C (-6, -10) y tiene vector director
$\overrightarrow{CD} = (-9,-4) - (-6,-10) = (-3,6) \Rightarrow 2x + y + 32 = 0$.
• La recta CD pasa por C (6, -4) y tiene vector director
$\overrightarrow{CD} = (3,2) - (6,-4) = (-3,6) \Rightarrow 2x + y - 8 = 0$.

Solucionario

45. Sea $r : y = mx + n$. Las condiciones del enunciado son:

$x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow 2 = m \cdot 0 + n \Rightarrow n = 2$

$y = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow 0 = -3m + n \Rightarrow m = 2/3 \Rightarrow$

$\Rightarrow r : y = \frac{2}{3}x + 2$

• $d(C, r) = \dfrac{|5 \cdot 2/3 - 1 + 2|}{\sqrt{(2/3)^2 + (-1)^2}} = \dfrac{13/3}{\sqrt{13}/3} = \sqrt{13}\ u$

• La recta paralela a r es de la forma $s : 2x - 3y + k = 0$ y como tiene ordenada en el origen 6, $x = 0$ e $y = 6$; por lo tanto, sustituyendo en la recta s resulta $k = 18$. Entonces, la recta s queda $2x - 3y + 18 = 0$.

46. La recta perpendicular a r pasa por A y tiene vector director $\vec{n} = (-1,2) \Rightarrow 2x + y - 5 = 0$. Ahora, calculamos el punto de corte entre esta recta y la recta r:

$H = \begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ -x + 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = 3 \Rightarrow H = (1,3)$

Sea $A'(x, y)$ el punto simétrico de A respecto de la recta r.
Como H es el punto medio de A y A' tenemos que:

$H = \left(\frac{x-1}{2}, \frac{y+7}{2}\right) = (1,3) \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{2} = 1 \\ \frac{y+7}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow A' = (3, -$

La recta $A'P$ pasa por A' y tiene como vector director $\overrightarrow{A'P} = (4,16) \Rightarrow 4x - y - 13 = 0$. El punto M de choque será:

$M = \begin{cases} 4x - y - 13 = 0 \\ -x + 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{31}{7}, y = \frac{33}{7} \Rightarrow\Rightarrow$

$M = \left(\frac{31}{7}, \frac{33}{7}\right)$

b) La recta perpendicular a $y = 0$ (eje OX) que pasa por A es la recta $x = 3$. El punto de corte entre estas dos rectas es $H = (3, 0)$. Sea $A'(x, y)$ el punto simétrico de A respecto de OX y como H es el punto medio de A y A' tenemos que:

$H = \left(\frac{x+3}{2}, \frac{y+7}{2}\right) = (3, 0) \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+3}{2} = 3 \\ \frac{y+7}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow A' = (3,-7)$

La recta $A'B$ pasa por A' y tiene como vector director $\overrightarrow{A'B} = (15,12) \Rightarrow 4x - 5y - 47 = 0$. El punto M de choque es

punto M de choque es

$M = \begin{cases} 4x - 5y - 47 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 11{,}75,\ y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow M = (11{,}75;\ 0)$

47. Descomponemos el cuadrilátero en dos triángulos, *ABD* y *BCD*. El área del cuadrilátero será la suma de las áreas de los dos triángulos.
Para efectuar el menor número de cálculos posible, tomaremos como base de ambos triángulos su lado común, es decir, *BD*.
Entonces, la altura de cada triángulo será la distancia del vértice opuesto a la recta r determinada por B y D.

• $d(B, D) = \sqrt{(-1-2)^2 + (2-(-4))^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

• Ecuación de r:

$\left.\begin{array}{l} \vec{V} = (-3, 6) \\ A = (-1, 2) \end{array}\right\} \Rightarrow r: \dfrac{x+1}{-3} = \dfrac{y-2}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow r: 6x + 3y = 0 \Rightarrow r: 2x + y = 0$

g$d(A, r) = \dfrac{|2 \cdot (-3) + (-1)|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \dfrac{|-7|}{\sqrt{5}} = \dfrac{7}{\sqrt{5}}$

g$d(C, r) = \dfrac{|2 \cdot 4 + 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \dfrac{|11|}{\sqrt{5}} = \dfrac{11}{\sqrt{5}}$

Por tanto:
Área del triángulo *ABD*:

$\frac{1}{2} d(B, D) \cdot d(A, r) = \frac{1}{2} 3 \cdot \cancel{\sqrt{5}} \cdot \frac{7}{\cancel{\sqrt{5}}} =$

$= \frac{21}{2}$ unidades cuadradas

Solucionario

Área del triángulo BCD: $\frac{1}{2}\ d(B,D).d(C,r) = \frac{1}{2}.3\sqrt{5}.\frac{11}{\sqrt{5}} = \frac{33}{2}$ unidades cuadradas

Y el área del cuadrilátero es:

48. Calculamos los puntos E, P y F.

• El triángulo ABE es equilátero, por lo tanto:

A = $\frac{21}{2} + \frac{33}{2} = \frac{54}{2}$ =27 unidades cuadradas

d(A,B) = d(B,E) = d(A,E) = $\sqrt{32}$,E = (x, y)

$$\Rightarrow \begin{cases} d(B,E) = \sqrt{(x-5)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{32} \\ d(A,E) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{32} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E = (-0{,}5; -2{,}5) \\ 0 \\ E = (6{,}5; 4{,}5) \end{cases}$$

$\Rightarrow$

• La recta AC pasa por A y tiene como vector director $\overrightarrow{AC}$= (8, 0) ⇒ y = 3 y la recta BE pasa por B y tiene como vector director BE= (−5,5; −1,5) ⇒ −1,5x + 5,5y + 13 = 0 donde E = (-0,5; -2,5).

$P = \begin{cases} -1{,}5x + 5{,}5y + 13 = 0 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow P = (19{,}7; 3)$

• La recta perpendicular a DC: $x + y - 12 = 0$ tiene como vector director $\vec{n}$= (1,1) ⇒ $x - y -$ 16,7 = 0 y el punto de corte entre estas dos rectas es:

$H = \begin{cases} x - y - 16{,}7 = 0 \\ x + y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow H = (14{,}4; -2{,}4)$

Sea F (x, y) el punto simétrico de P respecto de la recta DC.

Como H es el punto medio de F y P tenemos que:

$H = \left(\frac{x + 19{,}7}{2}, \frac{y+3}{2}\right)$=(14,4; −2,4)⇒

⇒F = (9,1; −7,8)

a. CEF es equilátero si todos sus lados son iguales:

$d(E,F) = \sqrt{(9{,}1 + 0{,}5)^2 + (-7{,}8 + 2{,}5)^2} \approx 11$

$d(F,C) = \sqrt{(9 - 9{,}1)^2 + (3 + 7{,}8)^2} \approx 11$

$d(C,E) = \sqrt{(-0{,}5 - 9)^2 + (-2{,}5 - 3)^2} \approx 11$

b. DEF es isósceles si tiene dos lados igua es rectángulo si tiene un ángulo recto:

$d(D,E) = \sqrt{(-0{,}5 - 5)^2 + (-2{,}5 - 7)^2}$

$d(E,F) = \sqrt{(9{,}1 + 0{,}5)^2 + (-7{,}8 + 2{,}5}$

$d(F,D) = \sqrt{(5 - 9{,}1)^2 + (7 + 7{,}8)^2} \approx$

$\overrightarrow{DE}$ = (−5,5; −9,5),EF =(9,6; −5,3)⇒$DE \cdot E$

c. BDF es isósceles si tiene dos lados igua

$d(B,D)$ = (5 − 5)2 + (7 + 1)2 = 8

$d(D,F)$ = (9,1 − 5)2 + (−7,8 − 7)2

$d(F,B)$ = (5 − 9,1)2 + (−1 + 7,8)2

d. PDF es equilátero si todos sus lados sor iguales:

$d(P,D)$ = (5 − 19,7)2 + (7 − 3)2 ≈ 1

$d(D,F)$ = (9,1 − 5)2 + (−7,8 − 7)2

$d(F,P)$ = (19,7 − 9,1)2 + (3 + 7,8)2

49. El lugar geométrico es la circunferenc centro P y radio 3, es decir, $(x-2)^2+(y+3)^2$=32= 9.

50. Todo punto P (x, y) que pertenezca a l mediatriz cumple:

$d(P,A) = d(P,B) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 4)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = (x+1)^2 + (y-4)^2$

⇒−3x+4y=6,5

Solucionario

51. Un punto $P\ (x, y)$ pertenece a las bisectrices si:

$d\ (P, r\ ) = d(P, s) \Rightarrow \frac{|x+y+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|x-y+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$

Como dos rectas determinan cuatro ángulos, para determinar las dos bisectrices deberemos tener en cuenta los dos signos de las raíces del denominador. Así, si denominamos t_1 y t_2 a las bisectrices, obtenemos dos ecuaciones:

$$\begin{cases} t_1: \sqrt{2}(x+y+1) = \sqrt{2}(x-y+2) \\ t_2: \sqrt{2}(x+y+1) = -\sqrt{2}(x-y+2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1: y = \frac{1}{2} = 0{,}5 \\ t_2: x = -\frac{3}{2} = -1{,}5 \end{cases}$$

52. Sea r: x = 0 (eje Y) y s: y = 0 (eje X). Si imponemos la condición del enunciado, siendo $P\ (x, y)$ el punto, resulta:

$d\ (P, r) - 2 = 3d(P, s) \Rightarrow \frac{|x|}{\sqrt{1}} - 2 = 3\frac{|y|}{\sqrt{1}} \Rightarrow x - 3y - 2 = 0$

53. El lugar geométrico de los puntos $P\ (x, y)$ del plano que forman un triángulo isósceles es la mediatriz, ya que la distancia de los puntos a cada punto de la base es la misma. Por lo tanto:

$d\ (P,A) = d(P,B) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{(x\ -\ 6)^2 + (y\ +\ 2)^2} = \sqrt{(x\ +\ 1)^2 + (y\ -\ 3)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-6)^2 + (y+2)^2 = (x+1)^2 + (y-3)^2 \Rightarrow$

$-7x+5y = -15$

54. Sea $Q\ (x, y)$ el punto que cumple la condición del enunciado:

$d\ (Q, P) = d\ (Q, r) \Rightarrow \sqrt{(x\ +1)^2 + (y\ -1)^2} = \frac{|x+y+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}$

$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{(x+y+1)^2}{2}$

$x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 6y + 3 = 0$

55. Igual

56. Hallamos las ecuaciones de los lados del triángulo:

• Lado AB: Pasa por el punto A y tiene como vector director

$AB = (7,7) \Rightarrow \frac{x+7}{7} = \frac{y+3}{7} \Rightarrow x - y + 4 = 0.$

• Lado AC: Pasa por el punto A y tiene como vector director

$AC = (12,2) \Rightarrow \frac{x+7}{12} = \frac{y+3}{2} \Rightarrow x - 6y - 11 = 0.$

• Lado BC: Pasa por el punto B y tiene como vector director

$BC = (5, -5) \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y-4}{-5} \Rightarrow x + y - 4 = 0.$

Ahora, basta con encontrar dos bisectrices e intersecarlas.

58. Sean $P\ (x, y)$ los puntos que cumplen la siguiente condición:

$d(P, A)\ d(P, B) = 1$

$\sqrt{(x-2)^2 + (y-6)^2}\ \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = 1$

$((x-2)^2 + (y-6)^2)\ ((x-1)^2 + (y+2)^2) = 1$

$x^4 - 6x^3 + 2x^2y^2 - 8x^2y + 53x^2 - 6xy^2 + 8xy$
$-100x + y^4 - 8y^3 - 3y^2 + 100y + 199 = 0$

• Un punto $P(x, y)$ pertenece a la bisectriz de A si:

$d(P,AB) = d(P,AC) \Rightarrow \frac{|x-y+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{x-6y-11}{\sqrt{1^2+(-6)^2}}$

$$\begin{cases} t_1: \sqrt{37}(x-y+4) = \sqrt{2}(x-6y-11) \\ t_2: \sqrt{37}(x-y+4) = -\sqrt{2}(x-6y-11) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1: 3{,}3x + 1{,}7y + 28{,}2 = 0 \\ t_2: -5{,}3x + 10{,}3y - 6{,}2 = 0 \end{cases}$$

• Un punto $P(x, y)$ pertenece a la bisectriz de B si:

$d(P,AB) = d(P,BC) \Rightarrow \frac{|x-y+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|x+y-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}$

$$\begin{cases} t_1: \sqrt{2}(x-y+4) = \sqrt{2}(x+y-4) \\ t_2: \sqrt{2}(x-y+4) = -\sqrt{2}(x+y-4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1: y = 4 \\ t_2: x = 0 \end{cases}$$

$$I = \begin{cases} -5{,}3x + 10{,}3y - 6{,}2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0{,}6 \Rightarrow I = (0; 0{,}6)$$

57. Primero, hallamos los vértices del triángulo:

$A = (0, -3) \qquad B = (4, 0)$

• Como la recta interseca con los ejes de coordenadas, el vértice C será el origen de coordenadas, es decir, $C = (0, 0)$.

Ahora, basta con hallar dos mediatrices e intersecarlas:

• Mediatriz de AB: $P\ (x, y)$ pertenece a esta mediatriz si: $d(P,A) = d(P,B)$

$\sqrt{(x-0)^2 + (y+3)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2}$

$x^2 + (y + 3)^2 = (x - 4)^2 + y^2 \Rightarrow 8x + 6y = 7$

• Mediatriz de AC: $P\ (x, y)$ pertenece a esta mediatriz si:

$d(P,A) = d(P,C) \Rightarrow$

$\sqrt{x^2 + (y+3)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$

$x^2 + (y + 3)^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow y = -96= -1{,}5$

$\Rightarrow Q = \begin{cases} 8x\ +\ 6y\ =\ 7 \\ y = -1{,}5 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow Q = (2, -1{,}5)$

Solucionario

59. Calculamos la bisectriz del ángulo C y el lado AB:

• Bisectriz del ángulo C:

— Lado AC: pasa por el punto A y tiene vector director

AC= (6, −6) $\Rightarrow \frac{x-5}{6}=\frac{y-10}{-6} \Rightarrow x + y - 15 = 0$

— Lado BC: pasa por el punto B y tiene vector director

BC= (14,2) $\Rightarrow \frac{x+3}{14}=\frac{y-2}{2} \Rightarrow x - 7y + 17 = 0$

La recta del lado AB pasa por el punto A y tiene como vector director

AB= (−8, −8) $\Rightarrow \frac{x-5}{-8}=\frac{y-10}{-8} \Rightarrow x - y + 5 = 0$

$\Rightarrow D = \begin{cases} 3x - y + 1 = 0 \\ x - y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow x=2,\ y=7 \Rightarrow D = (2,7)$

60. Sean P (x, y) los puntos del plano que equidistan de r y s:

$\Rightarrow d(P, r) = d(P, s) \Rightarrow \frac{|2x - y + 5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|2x-y+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$

$\Rightarrow 5(2x - y + 5)^2 = 5(2x - y + 1)^2 \Rightarrow 2x - y + 3 = 0$

Las tres rectas son paralelas.

61. Calculamos las pendientes, donde $Q = (x, y)$:

• $\overline{AQ} = (x, y - 4) \Rightarrow m_{AQ} = \frac{y-4}{x},\ x \neq 0$

• $\overline{BQ} = (x - 2, y - 1) \Rightarrow m_{BQ} = \frac{y-1}{x-2}$

$m_{AQ} = \frac{1}{4} m_{BQ} \Rightarrow \frac{y-4}{x} = \frac{1}{4}\,\frac{y-1}{x-2} \Rightarrow 3xy - 15x - 8y + 32 = 0$

62. La ecuación de la recta de pendiente m =1/2 es x - 2y + 8 = 0, x - 2y – 8 = 0

63. Sea P (x, y) el punto que equidista de las rectas a, b y c: $d(P,a) = d(P,b) = d(P,c)$

$$\frac{|6x + y - 26|}{\sqrt{6^2 + 1^2}} = \frac{|x + y - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|-x + y - 5|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}}$$

$$\begin{cases} 2(6x + y - 26)^2 = 37(-x + y - 5)^2 \\ 2(x + y - 1)^2 = 2(-x + y - 5)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1{,}4 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow P = (1{,}4; 3)$$

64. y = -3x/2

65. Ecuación vectorial: $\vec{p}$= (-2,3)+k(-2,5), $k \in$ |R

Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x - 2 - 2k \\ y = 3 + 5k \end{cases}$

Ecuación continua: $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-3}{-5}$

Ecuación general: 5x-2y+16=0

Ecuación explícita: y= $\frac{5}{2}x + 8$

Ecuación canónica: $-\frac{5x}{6} - \frac{y}{8} = 1$

Ecuación punto-pendiente: y-3=$\frac{5}{2}(x + 2)$

66. Repetido

67. $\overline{AB}$= (5,2), $\overline{DC}$ = (10, 4), $\overline{AD}$ = (−11,2), $\overline{BC}$ = (−6, 4) ⇒ Los lados AB y DC son paralelos ya que sus vectores directores son proporcionales, mientras que los lados AD y BC no son paralelos.

• $d(A, B) = \sqrt{(6-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{29}$

• $d(A, D) = \sqrt{(-10-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{125}$

• $d(C, D) = \sqrt{(-10-0)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{116}$

• $d(B, C) = \sqrt{(0-6)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{52}$

• $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = (5,2) \cdot (-11,2) = -51 \neq 0$

• $\overline{AD} \cdot \overline{DC} = (-11,2) \cdot (10, 4) = -102 \neq 0$

• $\overline{DC} \cdot \overline{BC} = (10, 4) \cdot (-6, 4) = -44 \neq 0$

Por lo tanto, como dos de sus lados son paralelos y ninguno tiene la misma longitud ni son perpendiculares dos a dos, resulta que $ABCD$ es un trapecio escaleno.

b. Altura → $a = d(B,DC) = \frac{|2 \cdot 6 - 5 \cdot 2 + 30|}{\sqrt{2^2+(-5)^2}} = \frac{32}{\sqrt{29}}$

donde DC es $\frac{x+10}{10} = \frac{y-2}{4}$

$\Rightarrow 2x - 5y + 30 = 0$, $B = d(A, B)$ y $b = d(C, D)$.

$$A = \frac{a(B+b)}{2} = \frac{\frac{32}{\sqrt{29}}\left(\sqrt{116} + \sqrt{29}\right)}{2} = 48\,u^2$$

c. La recta AB es $x - 15 = y2 \Rightarrow 2x - 5y - 2 = 0$. Buscamos una recta perpendicular a AB, por lo tanto, tendrá como vector director n = (2, -5); además, sabemos que pasará por D, de modo que $\frac{x+10}{2} = \frac{y-2}{4} \Rightarrow 5x + 2y + 46 = 0$.

El punto de corte entre las dos rectas es el siguiente: $H = (-226/29, -102/29)$

68. y=$\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$
69. La pendiente de la recta $\overline{AB}$ es -1, por tanto la ecuación de la recta perpendicular a esta es : x-y+8=0

70. Primero hallamos el punto medio del lado BC: M_{BC} = (1,11/2), luego calculamos la pendiente de la recta que pasa por el punto medio y por el punto A, es decir , la mediana:

m = -5/2 y la ecuación de la mediana es: 5x + 2y – 13 = 0.
71. Calculamos la pendiente de la recta $\overline{AB}$: m_{AB} = 2. Como la mediatriz que pasa pr ese lado es perpendicular a la recta AB, su pendiente es entonces -1/2, y por tanto la ecuación general de la mediatriz que pasa por el lado $\overline{AB}$ es x + 2y – 3 = 0.

72. Calculamos las pendientes:
Calculamos las pendientes, donde $Q = (x, y)$:
• $\overline{AQ} = (x+1, y-2) \Rightarrow m_{AQ} = \frac{y-2}{x+1}, x \neq -1$
• $\overline{BQ} = (x-5, y-3) \Rightarrow m_{BQ} = \frac{y-3}{x-5}; x \neq 5$
$m_{AQ} = 3m_{BQ} \Rightarrow \frac{y-2}{x+1} = 3\frac{y-3}{x-5} \Rightarrow$
$\Rightarrow -2xy + 7x - 8y + 19 = 0$
73. Las ecuaciones de la recta …
74. Ejercicio repetido
75. Las ecuaciones de las rectas son x - 1 = 0 y 5x - 12y - 29 = 0
76. Las coordenadas del punto son $P = (-1{,}5, -1{,}5)$
77. Sean $C = (x, y)$ y $D = (m, n)$ los puntos de división.
$\frac{1}{3}\overline{AB} = \overline{AC} \Rightarrow \frac{1}{3}$ (6,2)=(x-9,y-1) ⇒
$\begin{cases} 2 = x-9 \\ \frac{2}{3} = y-1 \end{cases} \Rightarrow \Rightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = 5/3 \end{cases}$
$\frac{2}{3}\overline{AB} = \overline{AD} \Rightarrow \frac{2}{3}$ (6,2)=(m-9,n-1) ⇒
$\begin{cases} 4 = m-9 \\ \frac{4}{3} = n-1 \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} m = 13 \\ n = 7/3 \end{cases}$
$C = \left(11, \frac{5}{3}\right)$, D=$\left(13, \frac{7}{3}\right)$
78. Para hallar la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto A (3, -1) y es paralela a s: $\left.\begin{matrix} x = 2-3t \\ y = 4+t \end{matrix}\right\}$, calculamos primeramente la pendiente que es -1/3, por tanto la ecuación paramétrica es:
r: $\begin{matrix} x = 3-3t \\ y = -1+t \end{matrix}$
79. La pendiente de la recta es -3; por tanto, la forma general de la ecuación es : y=-3x+1 ⇒ 3x + y – 1 = 0 ,
Como A=v_2; B=-v_1 , la ecuación paramétrica es : $\begin{cases} x = 1-k \\ y = -2+3k \end{cases}$
80. m=3/4 es la pendiente de la recta 3x-4y+7= 0, y m' la pendiente de la recta que buscamos:
⇒ tg 45º =$\frac{|m-m'|}{1+mm'} \Rightarrow 1 = \frac{\left|\frac{3}{4}-m'\right|}{1+\frac{3}{4}m'} \Rightarrow$
$\begin{cases} m' = -\frac{1}{7} \\ m' = 7 \end{cases} \Rightarrow \Rightarrow \begin{cases} s: y+3 = -\frac{1}{7}(x-2) \\ t: y+3 = 7(x-2 \end{cases}$
81. y =$-\sqrt{3}\,x + 2\sqrt{3}$
82. Primero hallamos la ecuación de la recta que pasa por el punto A (2, 3) y cuya pendiente es -3/4:
r:y = 3-$\frac{3}{4}$(x - 2) ⇒y = -$\frac{3}{4}$x + $\frac{18}{4}$ ⇒
3x+4y-18=0 es la ecuación de la recta.
Luego la distancia del punto P(4, -1) a dicha recta es:
d(P,r)=$\frac{|A.p_1 + B.p_2 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$
d(P,r)=$\frac{|3.4+4.(-1)-18|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|12-4-18|}{5} = 2$
83. Los vértices del triángulo DEF son D=$\left(\frac{5}{2}, 6\right)$, los lados son : y = $\frac{2x}{5}+5$, y=6 , x=9 y el área del triángulo es $\frac{169}{20}\ u^2$.

Solucionario

84. a. $P(x, y)$ pertenece a la mediatriz si $d(P,A) = d(P,$

$\sqrt{(x+2)^2+(y+4)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}$

$(x+2)^2+(y+4)^2=(x-2)^2+(y+1)^2$

$-4x-3y=7{,}5$

b. AB es la recta que pasa por A y tiene como vector director

$AB=(4,3) \Rightarrow \frac{x+2}{4}=\frac{y+4}{3} \Rightarrow 3x-4y-10=0.$

Altura $\rightarrow d(C, AB) = \frac{|3\cdot(-1)+(-4)\cdot 5-10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{33}{5}=$ 6,6*u*c) La mediana BM, donde M $=\left(\frac{-2-1}{2},\frac{-4+5}{2}\right)$ $=(-1{,}5;\ 0{,}5)$ es el punto medio de AC, pasa por B y su vector director es

$\overrightarrow{BM}=(-3{,}5;\ 1{,}5) \Rightarrow \frac{x-2}{-3{,}5}=\frac{y+1}{1{,}5}$. $\Rightarrow -1{,}5x-3{,}5y=0{,}5$d) La recta perpendicular a AB pasa por C y tiene vector director $\vec{n}=(3,-4)$

$\Rightarrow \frac{x+1}{3}=\frac{y-5}{-4} \Rightarrow 4x+3y-11=0.$

Ahora, calculamos el punto de corte entre esta recta y la recta AB:

$$\left.\begin{array}{l}4x+3y-11=0\\3x-4y-10=0\end{array}\right\} \Rightarrow x=\frac{74}{25},\ y=\frac{-7}{25} \Rightarrow$$

$\Rightarrow H\left(\frac{74}{25},\ \frac{-7}{25}\right)$

Sea $C'=(x,y)$ el punto simétrico de C respecto de la recta AB. Como H es el punto medio de C y P tenemos que: H $=\left(\frac{-1+x}{2},\frac{5+y}{2}\right)=\left(\frac{74}{25},\ \frac{-7}{25}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow C'=\left(\frac{173}{25},\frac{-139}{25}\right)$

e) Base $\rightarrow$

$d(A,B)=\sqrt{(-2-2)^2+(-4-(-1))^2}=\sqrt{25}=5$

$\Rightarrow A=\frac{b\cdot a}{2} \Rightarrow A=\frac{5\cdot 6{,}6}{2}=16{,}5u^2$

85. Debemos comparar los cocientes

$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}\quad \frac{A}{A'}=\frac{m}{1};\ \frac{B}{B'}=\frac{1}{m};\ \frac{C}{C'}=\frac{-m}{-m}=1$

Serán paralelas o coincidentes si $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}$

$\frac{m}{1}-\frac{1}{m} \Leftrightarrow m^2-1 \Leftrightarrow m=\pm 1$

Si m=1 $\Rightarrow \frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$Son coincidentes

Si m=-1 $\Rightarrow \frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=-1\neq\frac{C}{C'} \Rightarrow$

$\Rightarrow$Son paralelas.

Finalmente, para $m \neq \pm 1$, las rectas son secantes.

86. La distancia del punto (5,2) a la recta 2x - 4y + 3 = 0 es:

d (P,r)=$\frac{|A.p_1+B.p_2+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

d(P,r)=$\frac{|2.5-4.2+3|}{\sqrt{2^2+(-4)^2}}=\frac{|10-8+3|}{\sqrt{20}}=2\frac{5}{2\sqrt{5}}\approx 1{,}12$

87. La pendiente de la recta que pasa por los puntos B(5,4) y C(2, 3) es 1/3, por tanto la ecuación de esta recta es x-3y+7=0, luego la distancia del punto A(–2,1) y la recta es:

d(P,r)=$\frac{|1.(-2)-3.1+7|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{|-2-3+7|}{\sqrt{10}}\approx 0{,}63\ u$

88. La ecuación de la mediatriz es y=x-3

89. Para que r y s sean paralelas, ha de cumplirse:

$\frac{2}{3}=\frac{a}{5}\neq\frac{-3}{-1}$

De la primera igualdad se tiene a=$\frac{10}{3}$. Por tanto, para a=$\frac{10}{3}$ las rectas son paralelas, puesto que se verifica. $\frac{2}{3}=\frac{\frac{10}{3}}{5}\neq\frac{-3}{-1}$

90. Un vector director de esta recta será

$\vec{v}=\overrightarrow{BC}=(2,-7)$

$$\left.\begin{array}{l}A=(1,1)\\ \vec{v}=(2,-7)\end{array}\right\} \Rightarrow r: \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-7} \Rightarrow$$

$\Rightarrow r:\ 7x+2y-9=0$

b. La mediana que parte de B es la recta que pasa por B y por el punto medio, M, de AC.

M= $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ BM=$\left(3,-\frac{-11}{2}\right)$ Ecuación de la mediana s :

$s: \frac{x+3}{3}=\frac{y-5}{\frac{-11}{2}}$ $\Rightarrow s:\ 11x+6y+3=0$

c) La altura que parte de C es la recta t que pasa por C y es perpendicular a AB.

$[\overrightarrow{AB}]=(-3-1, 5-1)=(-4,4) \Rightarrow$ Un vector perpendicular es, por ejemplo, (4, 4).

Ecuación de t: x-y-1=0

Solucionario

a. Sea s: $9x + 16y + 72 = 0$ y r: $9x + 16y - 75 = 0$, $r \parallel s \rightarrow d(r, s) = d(P, r) = d(A, s)$, d (r, s) = 8u

b. Sea s: $x+2y+2 = 0$ y r: $2x+4y-3=0$, d (r, s) = 1,56 u

92. P $\left(-\frac{1}{5}, \frac{27}{5}\right)$

93.

a.r: $2x - y + 5 = 0$, s : $\frac{x}{-1} = \frac{y-2}{1}$, se cortan en P(-1,3)

b. r: $x + 2y + 2 = 0$, s:$\frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{-2}$, son paralelas

94. Sabemos que

$$d(r, s) = \left|\frac{0-k}{\sqrt{(-3)^2 + 2^2}}\right| = \frac{|-k|}{\sqrt{13}}$$

Luego si queremos que la distancia sea 3:

$3 = d(r, s) = \frac{|k|}{\sqrt{13}} \Leftrightarrow |k| = 3\sqrt{13} \Leftrightarrow k = \pm 3\sqrt{13}$

95. a. el ángulo es 26º 33´ 54´´; b) 18º 26´ 6´´.

96. El área del triángulo que determinan la recta $x - 2y + 8 = 0$ y los ejes coordenados es $16u^2$

97. La mediatriz del segmento que tiene por extremos A (1, 2) y B (3, –1) es $4x - 6y - 5 = 0$.

98. Los otros vértices del paralelogramo son los puntos:
B (5/3; -5/3); C (7/3; -4/3; y D (5/3; -2/3).

99. El tercer vértice que está situado sobre la recta $x + y - 1 = 0$, es (8, –7)

100. La altura correspondiente al vértice C: $10/\sqrt{58}$;

b. La ecuación de la mediatriz del lado AB: $3x-7y+2=0$

c. su área: 5 u^2

101. r y s son paralelas $\Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$

En este caso: $\frac{A}{A'} = \frac{-1}{m}$; $\frac{B}{B'} = \frac{m}{-4}$; $\frac{C}{C'} = \frac{-3}{2}$

Luego:

$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \Rightarrow \frac{-1}{m} = \frac{m}{-4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$

102. La ecuación de la recta que pasa por (-2,3) y es perpendicular a la recta $2x-3y+6 = 0$ es $3x+2y=0$.

103. La ecuación de la altura es $3x+4y+45=0$.

104. *a.* $d(P, Q) = 3\sqrt{2}$, *b.* $d(P, r) = \frac{7\sqrt{5}}{5}$

c. $d(Q, r) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

105. El coseno del ángulo formado por r y s coincide con el valor absoluto del coseno del ángulo formado por sus vectores directores, como por ejemplo,

$\vec{u} = -(-1,-m) = (1,m)$ y $\vec{v} = (-2,1)$

cos (r,s) $= |\cos(\vec{u}, \vec{v})| = \left|\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right| =$

$= \left|\frac{1 \cdot (-2) + m \cdot 1}{\sqrt{1^2+m^2} \cdot \sqrt{(-2)^2+1^2}}\right| = \left|\frac{m-2}{\sqrt{5m^2+5}}\right|$

Ahora, $r,s = 60^0 \Leftrightarrow \cos(r,s) = \cos 60^0 = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

Encontramos, pues, los valores de m que hacen que serán exactamente los que hagan que r y s formen un ángulo de 60°:

$r,s = 60^0 \Leftrightarrow = \frac{1}{2} = \cos(r, s) = \left|\frac{(m-2)^2}{\sqrt{5m^2+5}}\right| \Leftrightarrow$

Elevando al cuadrado no introducimos soluciones

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} = \left|\frac{m-2}{\sqrt{5m^2+5}}\right|^2 = \frac{(m-2)^2}{\left(\sqrt{5m^2+5}\right)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{m^2 - 4m + 4}{5m^2 + 5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5m^2 + 5 = 4m^2 - 16m + 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 16m - 11 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot (-11)}}{2} =$$

$$= \frac{-16 \pm \sqrt{300}}{2} = -8 \pm 5\sqrt{3}$$

Solucionario

106. Sean A = (x ′, 0), B = (0, y ′) y E = (x, y ′). Entonces, la recta AC es 8x + x ′y - 8x ′ = 0. Como E pertenece a la recta AC, E debe ser de la siguiente forma: E = ((-x ′y ′ + 8x ′)/8), y ′). Ahora, imponemos la condición de que el área del trapecio es 14 u^2:

$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2} = 14 \Rightarrow \frac{\left(x' + \frac{-x'y'+8x'}{8}\right)}{2}\cdot y' = 28 =$$

$\Rightarrow x'y'2 - 16x'y' - 224 = 0$

107. Sea r : y = mx + n. Las condiciones del enunciado son:

$x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow 2 = m \cdot 0 + n \Rightarrow n = 2$

$y = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow 0 = -3m + n \Rightarrow m = 2/3 \Rightarrow$

$\Rightarrow r : y = \frac{2}{3}x + 2$

$$\bullet\ d(C, r) = \frac{|5 \cdot 2/3 - 1 + 2|}{\sqrt{(2/3)^2 + (-1)^2}} = \frac{13/3}{\sqrt{13}/3} = \sqrt{13}\ u$$

La recta paralela a *r* es de la forma *s*: 2*x* - 3*y* + *k* = 0 y como tiene ordenada en el origen 6, *x*=0 e *y* =6, por lo tanto, sustituyendo en la recta *s* resulta *k* =18. Entonces, la recta *s* queda 2*x*-3*y*+18 =0.

108. a)Para que las rectas sean perpendiculares $r = \frac{m-38}{m+2}$

b) para que sean paralelas: $r = \frac{5m}{2} + 6$

c) coincidentes: $r = \frac{110m^2+444m+435}{44m+72}$

109. r: 7x-y-28=0 ⟶ y=7x-28 ⟶ un punto cualquiera de la recta r es P(x, 7x-28)

$d(P,s)=5 \rightarrow 5=\left|\frac{3x-4(7x-28)-12}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| \rightarrow$

$5=\left|\frac{-25x+100}{5}\right| \rightarrow 5=|5x+20| \rightarrow 5=\pm(-5x+20) \rightarrow \begin{cases} x = 3 \rightarrow P(3,-7) \\ x = 5 \rightarrow P(5,7) \end{cases}$

110. El área del cuadrado ≈ 61,54 u^2

111. b. La pendiente de la recta es 7/2

c. La ecuación de la recta: 3x - 2y + 7 = 0

112. La ecuación de la recta *es* y = -2x - 3.

113. El área es aproximadamente 35,8 u^2

114. Para que las rectas px – y – 1 = 0 y (p - 1)x + py + 10 = 0 sean perpendiculares, se debe cumplir que $\frac{A}{B} = -\frac{B}{A} \rightarrow m_r = -\frac{1}{m_s}$, por tanto convertimos ambas ecuaciones a la forma y = mx + n:

r: px – y – 1 = 0 ⟶ y=px-1, siendo p su pendiente

s: (p-1) x + py + 10 = 0⟶y = $-\left(\frac{p-1}{p}\right)x - \frac{10}{p}$

Aplicando la condición de perpendicularidad $-\left(\frac{p-1}{p}\right) = -\frac{1}{p} \rightarrow -p+1=-1 \rightarrow p=2$

115. Se calcula la pendiente de las rectas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, para comprobar si son paralelas, de donde se obtiene que $m_{AB} = -\frac{6}{4}$, y $m_{CD} = -\frac{6}{4}$; por tanto, son paralelas

117. Hallamos la perpendicular a r que pasa por P. Como r está en forma explícita tenemos su pendiente m=2. Cualquier recta perpendicular a r tendrá de pendiente –1/2, luego la ecuación del haz de rectas perpendiculares a r es y = $\frac{x}{2}$ + n

Como queremos que pase por el punto P, la ecuación anterior debe ser cierta para x=0 e y=6, por lo tanto: 6 = 0 + n, n = 6 y la recta buscada es

$y = -\frac{x}{2} + 6$.

Luego el punto de corte entre esta recta y r: R $\left(\frac{18}{5}, \frac{21}{5}\right)$

Si tenemos en cuenta que R es el punto medio del segmento PQ, podemos calcular el punto Q, pedido por el problema: Q=$\left(\frac{36}{5}, \frac{12}{5}\right)$

119. Calculamos los pies de la perpendicular desde *Q*:

• La recta *AC* pasa por *A* y tiene como vector director

AC= (4, −4) $\Rightarrow \frac{x+2}{4} = \frac{y-3}{-4} \Rightarrow x + y - 1 = 0$ y una recta perpendicular a esta pasa por *Q* y tiene vector director $\vec{n} = (-1, -1) \Rightarrow x - y - 1 = 0$. Si intersecamos estas dos rectas, tenemos:

Solucionario

$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = 0 \Rightarrow D = (1, 0).$

• La recta AB pasa por A y tiene como vector director $\overrightarrow{AB} = (4,2) \Rightarrow \frac{x+2}{4} = \frac{y-3}{2} \Rightarrow x - 2y + 8 = 0$ y una recta perpendicular a esta pasa por Q y tiene vector director $\vec{n} = (1, -2) \Rightarrow 2x + y - 11 = 0$. Si intersecamos estas dos rectas, tenemos:

$\begin{cases} x - 2y + 8 = 0 \\ 2x + y - 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{14}{5}, y = \frac{27}{5} \Rightarrow E = \left(\frac{14}{5}, \frac{27}{5}\right).$

La recta BC pasa por B y tiene como vector director $\overrightarrow{BC} = (0, -6) \Rightarrow x = 2$ y una recta perpendicular a esta pasa por Q y tiene vector director $\vec{n} = (1,0) \Rightarrow y = 3$. Si intersecamos estas dos rectas resulta que $F = (2, 3)$.

Estos puntos están alineados si se cumple que:

$$\frac{e_1 - d_1}{f_1 - e_1} = \frac{e_2 - d_2}{f_2 - e_2} \Rightarrow \frac{14/5 - 1}{2 - 14/5} = \frac{27/5 - 0}{3 - 27/5} \Rightarrow \frac{-9}{4} = \frac{-9}{4}$$

5 Más a fondo

120. El punto A es la intersección de las rectas

$A = \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 2y \rightarrow 6x + x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow A(0,0)$

El lado DC es paralelo a AB y pasa por C:

DC = x – 2y + K = 0 → 3-10+ K=0 → K=7,

DC = x - 2y + 7 = 0

Los lados AD y DC se intersecan en el punto D: D(-1, 3)

Área = d(D, C) . d(a, lado DC) = 14u^2

121. Las coordenadas del punto $B\left(\frac{89}{25}, \frac{-48}{25}\right)$

122.a. Pasa por el punto A (5, 3) y tiene pendiente −2→ y = -2 x + 13

b. Pasa por los puntos A (5, -2) y B (3, 2) → y = -2 x + 8

c. Forma un ángulo de 45° con el sentido positivo del eje de abscisas → y = x + 4

d. Pasa por el punto A (5, -11) y tiene por vector director v = (−2, 4) → y = -2 x - 1

123. Coordenadas de $A(7, 4)$

Ecuaciones de los lados: $l_a: y - 4 = \frac{2}{3}(x - 7)$; $l_b: y - 3 = -\frac{4}{7}(x + 1)$; $l_c: y + 3 = -8 \cdot (x - 3)$ $\quad h_{BC} = \frac{29}{\sqrt{13}}\,u$; $h_{AB} = \frac{52}{\sqrt{65}}\,u$; $h_{AC} = \frac{52}{\sqrt{65}}\,u$

124. El punto es P (10,-10)

125. Área $= \frac{b \cdot h}{2} = 6\,u^2 \rightarrow$ base (b)= d(A,B) = $\sqrt{41}$u y la altura (h) = d(C, $\overline{AB}$)=$\frac{|5m+3|}{\sqrt{41}}$

Área $= \frac{\sqrt{41} \cdot \frac{|5m+3|}{\sqrt{41}}}{2} = 6 \rightarrow |5m + 3| = 12 \rightarrow \begin{cases} 5m + 3 = 12 \rightarrow m = \frac{9}{5} \rightarrow C\left(4, \frac{9}{5}\right) \\ 5m + 3 = -12 \rightarrow m = -3 \rightarrow C(4, -3) \end{cases}$

126. Los puntos son $P_1(0,2)$ y $P_2(2,0)$

127. Se calculan las distancias del punto P (x,y) a ambas rectas y se igualan , de donde se obtiene que P$\left(\frac{29}{3}, \frac{16}{3}\right)$

128. La pareja b, (son perpendiculares, sus pendientes son -1/2 y 2).

129. Longitud del lado 1 = 3; longitud del lado 2 =$\sqrt{116}$ =2$\sqrt{29}$; longitud del lado 3 =$\sqrt{101}$

α ≈16º; β ≈ 67º; γ ≈ 97º

130. A=6 $\sqrt{3}$ u^2

131. Las coordenadas de sus vértices son:

A(6,0) B(3, 3$\sqrt{3}$) C(–3,3$\sqrt{3}$) D(–6, 0)

E(–3, –3$\sqrt{3}$) F(3,– 3$\sqrt{3}$)

Las ecuaciones de sus lados:

3x + $\sqrt{3}$y – 18 = 0; y = 3$\sqrt{3}$

3x – $\sqrt{3}$y + 18 = 0; 3x + $\sqrt{3}$y + 18 = 0

y = –3$\sqrt{3}$; 3x – $\sqrt{3}$y – 18 = 0

132. Las coordenadas de los vertices de las medianas del triángulo equilátero de lado 2 son:

$\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{3}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{3}{2}\right)$;

$\left(\frac{5\sqrt{3}}{6}, -\frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$; $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$;

Solucionario

133. La ecuación del rayo r y del rayo reflejado en el espejo son: x + y – 3 = 0; x – y – 3 = 0
134. a. las ecuaciones de dichas rectas son x - 4y = 5, x + y - 8 = 0; x - y + 4 = 0.
135. Como vienen dadas por su ecuación general, podemos aplicar directamente la fórmula que conocemos, pues también tienen los mismos coeficientes de *x* e *y* :

$$d(r,s)=\left|\frac{1-(-2)}{\sqrt{1^2+3^2}}\right|=\left|\frac{3}{\sqrt{10}}\right|=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

136. a) Primero hallamos la pendiente de la recta $\overline{AB}$, pues la altura es una recta perpendicular, que se traza desde el vértice C hasta $\overline{AB}$. Y por la condición de perpendicularidad entre rectas sus pendientes deben cumplir que $m_{AB}=-\frac{1}{m_h}$.

Luego $m_{AB}=\frac{1}{3}$, por tanto la pendiente de la recta h es -3

Entonces la ecuación de la recta h (altura) es ***y=24-3x***

b) Resolviendo el sistema que forman las ecuaciones de las rectas:

x-3y+2=0 y 3x+y-24=0, hallamos el punto de intersección entre las rectas $\overline{AB}$ y h: P (7,3)

Y por último la longitud de los segmentos en que la altura anterior corta al lado AB, la determinamos calculando la distancia de P a A y de P a B: d(P,A)=$\sqrt{10}$, d(P,B)=$\sqrt{40}$

137. Sabemos que $d(r,s)=\left|\frac{0-k}{\sqrt{(-3)^2+2^2}}\right|=\left|\frac{-k}{\sqrt{13}}\right|$

Luego si la distancia es 3:

$3=d(r,s)=\frac{|k|}{\sqrt{13}}\Leftrightarrow|k|=3\sqrt{13}\Leftrightarrow k=\pm3\sqrt{13}$

138. Debemos comparar los coeficientes de las dos rectas.

a) $\frac{2}{-1}\neq\frac{-3}{3}\Rightarrow$ r y s son secantes.

b) $\frac{-1}{9}=\frac{-1}{9}\neq\frac{2}{-1}\Rightarrow$ Son paralelas

c) Expresamos previamente las rectas en forma general

$$r:\ -x+1=2y+6 \quad\Rightarrow\quad r:\ x+2y+5=0$$
$$s:\ y=2x-4 \quad\Rightarrow\quad s:\ 2x-y-4=0$$

$$\frac{1}{2}\neq\frac{2}{-1}\Rightarrow r \text{ y } s \text{ son secantes.}$$

139. El punto de intersección entre dos rectas será el único que cumpla las ecuaciones de las dos rectas, por lo que obtendremos sus coordenadas resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas:

$$a)\ \begin{cases}2x-4y=5\\3x-6y=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6x-12y=15\\-6x+12y=4\end{cases}\quad 0=19$$

Lo cual es falso siempre, luego el sistema no tiene solución, o sea, *r* y *s* son paralelas.

$$b)\ \begin{cases}x=2+3k\\y=-1+4k\\3x+2y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x-2}{3}=k=\frac{y+1}{4}\\3x+2y=1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}4x-3y=11\\3x+2y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-12x+9y=-33\\12x+8y=4\end{cases}$$

$$17y=-29\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=-\frac{29}{17}\Rightarrow x=\frac{1-2y}{3}=\frac{1+\frac{58}{17}}{3}=\frac{25}{17}$$

Así, el punto de intersección es el de coordenadas $\left(\frac{25}{17},-\frac{29}{17}\right)$

140. El coseno del ángulo formado por dos rectas se puede encontrar a partir del formado por sus vectores directores: un vector director de *r* es r*u* = (1, 2), y uno de *s*, es r*v* = (1, 3), pues éstos son los denominadores de sus ecuaciones continuas. Ahora:

$$\cos(\widehat{r,s})=\left|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\right|=\left|\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right|=$$

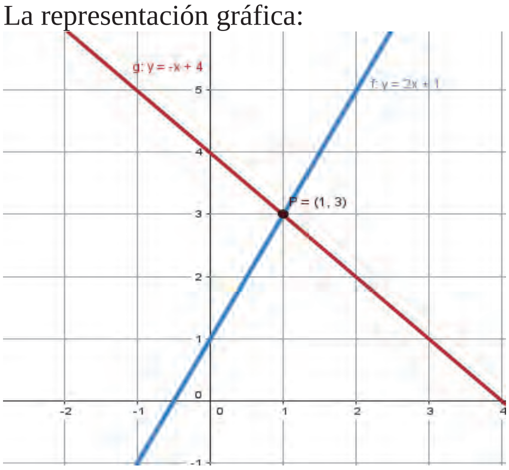
$$=\left|\frac{(1,2)\cdot(1,3)}{|(1,2)|\cdot|(1,3)|}\right|=\left|\frac{1\cdot1+2\cdot3}{\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2}}\right|=$$

$$=\left|\frac{7}{\sqrt{5}\sqrt{10}}\right|=\frac{7}{5\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$$

Página 199

Solucionario

141. a. Como la recta es paralela a 3x-y+5=0, las pendientes son iguales, por tanto m=3, y la ecuación de la recta que pasa por A es: ***3x-y=0***.
b. Al ser perpendiculares las rectas las pendientes cumplen que $m_r=-\frac{1}{m_s}$. Por tanto:
La pendiente de 3x+6y -2 = 0 es -1/2 y la ecuación de la recta que pasa por el punto B(7,-3) es: 2x - y - 17 = 0
142. Para hallar las coordenadas del punto de corte delas rectas resolvemos el sistema formado por ambas ecuaciones, de donde se obtiene: P (1,3)
La representación gráfica:



143. Para determinar si los triángulos son equiláteros, isósceles o escaleno, basta con hallar la longitud de sus lados, aplicando la distancia entre dos puntos, de donde obtenemos:
a. d (P,Q) = $\sqrt{82}$, d (Q,R)=$\sqrt{128}$, d (P,R)=$\sqrt{82}$ → el triángulo es isósceles
b. d (P,Q) = $\sqrt{65}$, d (Q,R)=$\sqrt{64}$, d (P,R)=$\sqrt{65}$ → el triángulo es isósceles
c. d (P,Q) = $\sqrt{34}$, d (Q,R)=$\sqrt{53}$, d (P,R)=$\sqrt{65}$ → el triángulo es escaleno
d. d (P,Q) = $\sqrt{130}$, d (Q,R)=$\sqrt{130}$, d (P,R) = $\sqrt{20}$ → el triángulo es isósceles
e. (P,Q) = $\sqrt{74}$, d (Q,R)=$\sqrt{73}$, d (P,R)=$\sqrt{25}$ → el triángulo es escaleno

144. a. $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = 3\sqrt{2}$ → p= $12\sqrt{2}$ u
b. $\overline{AB} = \sqrt{26}$; $\overline{BC}=\sqrt{104}$; $\overline{CD}$=7,07; $\overline{DA}$=6,32 → p= 28,69 u.
c. $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = 2\sqrt{13}$ → p = $8\sqrt{13}$ = 28,84u
d. $\overline{AB}$= 5 ; $\overline{BC}=\sqrt{41} = 6{,}4$; $\overline{CD}$=3; $\overline{DA}$=5 → p= 19,4 u.
e. $\overline{AB}$ = 5,1 ; $\overline{BC}$=6,32 ; $\overline{CD}$ = 7,62; $\overline{DA}$ = 10 → p= 29,04 u.
145.a. Triángulo obtusángulo en C; b. triángulo rectángulo en A; c. obtusángulo en B

146. Ángulo centrado en *F*:
$\overline{EF}$= (3, −7), $\overline{DF}$= (6, −4), $\overline{EF}\cdot\overline{DF}$= 46, $|\overline{EF}|$ =$\sqrt{58}$,

$$|\overline{DF}| = \sqrt{52} \Rightarrow \cos\hat{F} = \left|\frac{46}{\sqrt{58}\sqrt{52}}\right| = \frac{23}{\sqrt{754}}$$
$$\hat{F} = \text{arc}\cos\left(\frac{23}{\sqrt{754}}\right) = 33^{o}\,6'$$

• Ángulo centrado en *G*:
$\overline{EG}$= (6, −3), $\overline{DG}$= (9, 0), $\overline{EG}\cdot\overline{DG}$= 54, $\overline{EG}$ = 45, $\overline{DG}$ = 9

$$\cos\hat{G} = \left|\frac{54}{9\sqrt{45}}\right| = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \hat{G} = \text{arc}\cos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 26^{o}\,34'$$

• Ángulo centrado en *H*:
$\overline{EH}$= (4, −1), $\overline{DH}$= (7,2), $\overline{EH}\cdot\overline{DH}$= 26, $\overline{EH}$ = 17,

$$|\overline{DH}| = \sqrt{53} \Rightarrow \cos\hat{H} = \left|\frac{26}{\sqrt{17}\sqrt{53}}\right| = \frac{26}{\sqrt{901}}$$
$$\hat{H} = \text{arc}\cos\left(\frac{26}{\sqrt{901}}\right) = 29^{o}\,58'$$

147. a. Sea *A ′* = (*x*, *y*) el punto simétrico de *A* respecto de *B*.
Como *B* es el punto medio de *A ′* y *A*, tenemos que:

$$B = \left(\frac{2+x}{2}, \frac{1+y}{2}\right) = (0,-3) \Rightarrow \begin{cases} \frac{2+x}{2} = 0 \\ \frac{1+y}{2} = -3 \end{cases} \Rightarrow A' = (-2,-7)$$

⇒ *A*' = (−2, −7)

Solucionario

b. La recta *AB* pasa por el punto *A* y tiene vector director
$\overline{AB}= (-2, -4) \Rightarrow \frac{x-2}{-2}=\frac{y-1}{-4} \Rightarrow 2x - y - 3 = 0.$
Su recta perpendicular pasa por *C* y tiene como vector director
$\vec{n} = (2, -1) \Rightarrow \frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{-1} \Rightarrow x + 2y + 1 = 0.$
La intersección de la recta que une *A* y *B* con su perpendicular es: $\Rightarrow x = 1, y = -1 \Rightarrow H = (1, -1)$
Sea $C' = (x, y)$ el punto simétrico de *C* respecto de la recta
AB. Como *H* es el punto medio de *C* y *C'* resulta que:

$$H = \left(\frac{3+x}{2}, \frac{-2+y}{2}\right) = (1,-1) \Rightarrow \begin{cases} \frac{3+x}{2} = 1 \\ \frac{-2+y}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C' = (-1,0)$$

c) Veamos si los lados del cuadrilátero son todos iguales o no, y si los lados son perpendiculares entre ellos:

- $d(A,C) = \sqrt{(3-2)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{10}$
- $d(A,C') = \sqrt{(-1-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{10}$
- $d(B,C') = \sqrt{(-1-0)^2 + (0+3)^2} = \sqrt{10}$
- $\overrightarrow{AC'} = (-3,-1), \overrightarrow{C'B} = (1,-3) \Rightarrow \overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{C'B} = 0$
- $\overrightarrow{C'B} = (1,-3), \overrightarrow{BC} = (3,1) \Rightarrow \overrightarrow{C'B} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$
- $\overrightarrow{BC} = (3,1), \overrightarrow{CA} = (-1,3) \Rightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$

Es un cuadrado y $A = d(B,C') \cdot d(B,C) = \sqrt{10}\sqrt{10} = 10\,u^2$

148. a. Calculamos el punto común a esta familia de rectas: $P = (-3,2)$
b. Sustituimos el punto *P* en la familia de rectas: $\Rightarrow m + 2(m - 1) + (m + 2) = 0 \Rightarrow m = 0 \Rightarrow y = 2$
c.La recta de la familia que es paralela a *r* ha de cumplir que: $\frac{m}{1}=\frac{m-1}{-3} \Rightarrow m = \frac{1}{4} \Rightarrow x - 3y + 9 = 0.$
149. Debemos calcular el punto simétrico de *A* respecto de la recta
$r : -x + y = -3$. La recta perpendicular a *r* pasa por *A* y su vector director es $\vec{n}= (-1,1) \Rightarrow$
$\frac{x-3}{-1}=\frac{y-4}{1} \Rightarrow x + y - 7 = 0$
$\Rightarrow H = (5,2)$
Sea $A'(x, y)$ el punto simétrico de *A* respecto de la recta *r*.
Como *H* es el punto medio de *A* y *A'* tenemos que: $A' = (7, 0)$
La ecuación del rayo reflejado es la recta *A'C* que pasa por *A'* y su vector director es $\overrightarrow{A'C}= (4, 8) \Rightarrow -2x + y = -14.$
150.
a. $\vec{r}= (-4,5), \vec{s}= (-5, -4) \Rightarrow \vec{r}\cdot \vec{s}= 20 - 20 = 0 \Rightarrow$ las rectas son perpendiculares. Calculamos el punto de corte: $\Rightarrow M = (2,5)$
b. Primera solución: Los vértices *A* y *C* estarán en la mediatriz del segmento *BD*, que es la recta *r*, y a una distancia de *M* de $\sqrt{164}$ *u*. *A* y *C* serán de la forma $x = t$, e $y = (30 - 5t)/4$.
Entonces, ha de cumplirse que: $d(M,A) = d(M,C) = \sqrt{164} \Rightarrow t = -6, t = 10 \Rightarrow A=(-6,15), C=(10,-5)$
Los vértices *B* y *D* estarán en la mediatriz del segmento
AC, que es la recta *s*, y a una distancia de *M* de $\sqrt{41}$ *u*. By *D* serán de la forma $x = t$, e
$y = (17 + 4t)/5$. Por lo tanto:
$d(M,B) = d(M,D) = \sqrt{41} \Rightarrow t = 7, t = -3 \Rightarrow$
$B = (7, 9), D = (-3,1)$
Segunda solución: Se efectúa el mismo procedimiento pero cambiando la recta *r* por la *s*, y viceversa. El resultado es el siguiente: $E = (-2, 10)$, $F = (12, 13)$, $G = (6, 0)$ y $H = (-8, -3)$.
c. Calculamos las ecuaciones de los lados del rombo a partir de la primera solución del apartado b).
• La recta *AB* pasa por *A* y tiene como vector director
$\overrightarrow{AB}= (13, -6) \Rightarrow \frac{x+6}{13}=\frac{y-15}{-6} \Rightarrow 6x + 13y - 159 = 0$
• La recta *BC* pasa por *B* y tiene como vector director
$\overrightarrow{BC}= (3, -14) \Rightarrow \frac{x-7}{3}=\frac{y-9}{-14} \Rightarrow 14x + 3y - 125 = 0.$

Solucionario

• La recta CD pasa por C y tiene como vector director.

• La recta DA pasa por D y tiene como vector director

$\overrightarrow{DA} = (-3,14) \Rightarrow \frac{x+3}{-3} = \frac{y-1}{14} \Rightarrow 14x + 3y + 39 = 0.$

151.

d(R, P) = 18,25u; d(R,Q)=12,08u, d(P,Q) = 15,26u. Forman un triángulo

152. La bisectriz del primer cuadrante tiene como ecuación $y = x$; así, el punto C será de la forma (x, x).

Como es un triángulo isósceles, el punto debe cumplir que:

$d(C,A) = d(C,B) \Rightarrow x = 2,5$

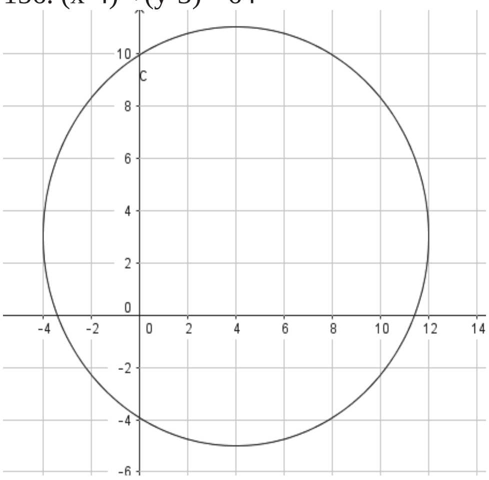
$C = (2,5; 2,5)$

153. s: $y-2=\frac{3+\sqrt{3}}{-3+\sqrt{3}}(x+1)$; t: $y-2=\frac{-3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}(x+1)$

154. $6x - 7y = 1$

155. Vértices: $A = (-5, 11)$, $B = (9, 16)$, $C = (-9, 4)$ y $D = (5, 9)$. Lados: r': $-5x +14y -101 = 0$, s': $7x-4y +1 = 0$

156. $(x-4)^2+(y-3)^2=64$



157. La abscisa y la ordenada al origen son: x=1, y=-1/2

La forma general de la ecuación es: x-2y-1=0

$\overrightarrow{CD} = (-13,6) \Rightarrow \frac{x-10}{-13} = \frac{y+5}{6} \Rightarrow 6x + 13y + 5 = 0$

Calculamos los lados del triángulo:

• El lado AB pasa por el punto A y tiene como vector director

$AB = (5,5) \Rightarrow \frac{x-2}{5} = \frac{y+2}{5} \Rightarrow -x + y = -4.$

• El lado BC pasa por el punto B y tiene vector director

$BC = (-4,5; -0,5) \Rightarrow \frac{x-7}{-4,5} = \frac{y-3}{-0,5} \Rightarrow 0,5x - 4,5y + 10 = 0$

• El lado AC pasa por el punto A y tiene vector director

$AC = (0,5; 4,5) \Rightarrow \frac{x-2}{0,5} = \frac{y+2}{4,5} \Rightarrow -4,5x + 0,5y + 10 = 0$

158. p = 26.255u; A = 29u²

159. $O = (0, 0)$, $B = (8, 0)$, $C = (10,5; 7,6)$, $D = (4; 12,3)$, $E(-2,5; 7,6)$, $F = (4; 5,5)$ $H = (0,8; 10)$, $G = (7,2; 10)$. Área 110,1 u^2

160. AC=4,472u

161. S (9, 1) y R (11, 5).

162. AC = 5,385 u; CB = 4; p = 14,770 u y A = 10u².

163. AB = BC = DC = AD = 5 u; p=20 u y A=20 u².

165)

p =20.261 u y A=22 u².

166)

74º 03´17´; 116 º 33'54´´ ; 11º 18´36´´ ;

p=19,087 u ; A= 16,5u²

Página 202

Solucionario

1.

- Vectorial: $(x, y) = (2, -3) + k(2, -5),\ k \in \mathbb{R}$
- Paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x = 2 + 2k \\ y = -3 - 5k \end{array}\right\},\ k \in \mathbb{R}$
- Continua: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+3}{-5}$
- General: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+3}{-5} \Rightarrow 5x + 2y - 4 = 0$
- Explícita: $5x + 2y - 4 = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{5}{2}x + 2$
- Punto-pendiente: $m = -\dfrac{5}{2} \Rightarrow y + 3 = -\dfrac{5}{2}(x - 2)$
- Canónica: $\left.\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 2 \\ y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{4}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{x}{4/5} + \dfrac{y}{2} = 1$

2. b) 48 u^2; c) (162/29, - 262/29)
3. La recta AB es la recta x + 4 = 0, que es paralela al eje Y.

• La recta BG pasa por B y tiene como vector director

$\overline{BG} = (2,2) \Rightarrow (x, y) = (-4,2) + (2,2)k$, $k \in$ |R .

• La recta *GF* es la recta $y = 4$, que es paralela al eje *X*.

• La recta *FE* pasa por *F* y tiene como vector director

$\overline{FE} = (-1, -6) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1 - k; \\ y = 4 - 6k \end{array}\right\},k \in$ |R .

• La recta *AC* pasa por *A* y tiene como vector director

$\overrightarrow{AC} = (5,2) \Rightarrow \frac{x+4}{5} = \frac{y-5}{2}$.

• La recta *CD* es perpendicular a la recta *AC*, por tanto, tendrá como vector director $\vec{n} = (2, -5) \Rightarrow m = -52 \Rightarrow y - 7 = -52(x - 1)$.

$\vec{n} = (2, -5) \Rightarrow m = -\frac{5}{2} \Rightarrow y - 7 = -\frac{5}{2}(x - 1)$.

• La recta *DE* pasa por el punto *D*, que es la intersección entre la recta *CD* y la recta $y = 0$, por tanto, $D = (19/5, 0)$ y su vector director es $DE = (-19/5, -2) \Rightarrow -10x + 19y + 38 = 0$.

$\left.\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = -2 \\ y = 0 \Rightarrow x = 19/5 \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{x}{19/5} + \dfrac{y}{-2} = 1$

5. Las dos condiciones del enunciado se traducen en:

$$r \parallel s \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{-3} \\ d(O,r) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = \dfrac{2b}{-3} \\ \dfrac{2}{\sqrt{a^2+b^2}} = 3 \end{array}\right\}$$

$$a = \frac{-4}{3\sqrt{13}},\ b = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

6. a) La recta *BC* pasa por el punto *B* y tiene vector director

$\overline{BC} = (4, -8) \Rightarrow \dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y-6}{-8} \Rightarrow 2x + y - 4 = 0$

$\left.\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 4 \\ y = 0 \Rightarrow x = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} = 1$

b) Altura→

$$d(A, BC) = \frac{|2 \cdot (-4) + 1 \cdot 2 - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

c) La mediana *BM*, donde *M* $= \left(\frac{-4+3}{2}, \frac{2-2}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ es el punto medio de *AC*, pasa por *B* y tiene como vector director

$\overline{BM} = \left(\frac{1}{2}, -6\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -1 + \dfrac{1}{2}k \\ y = 6 - 6k \end{array}\right\},k \in \mathbb{R}$

d) Base triángulo: $d(B,C) = \sqrt{(3+1)^2 + (-2-6)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

$= 4\sqrt{5} \Rightarrow A = \dfrac{b \cdot a}{2} = \dfrac{(4\sqrt{5})(2\sqrt{5})}{2} = 20\ u^2$

e) ACB= 33º41´24´´

7. El punto *C* donde se refleja el rayo es el punto medio del segmento *A 'B '*, entonces:

$$C = \frac{1}{2}\left(\frac{169}{58} + \frac{575}{58}, \frac{31}{58} + \frac{205}{58}\right) = \left(\frac{186}{29}, \frac{59}{29}\right)$$

8. D= (5 / 2, 6), *E* = (9, 6), *F* = (9, 43 / 5); *y* = 2*x* / 5 + 5; *y* = 6; *x* = 9; *A* = 169 / 20 u^2

Página 201


ZONA
UD. 5
FUNCIONES Y LÍMITES

Euclides, el padre de la geometría

Euclides (325 a. C.-265 a. C.) fue un matemático y geómetra griego, autor de la obra *Los elementos* en la que describe de manera formal el estudio de elementos del plano, resumidos en cinco postulados. En ella aparece la primera definición de la línea recta: «Es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella».

Arquitecto

Diseñaría proyectos arquitectónicos novedosos, que embellezcan mi ciudad, a través de la forma, el color, la luz, etc.
Trabajaría con vectores en las superficies regladas.
También podría ayudar a mi familia, asesorándoles a la hora de construir o remodelar sus viviendas o negocios, así como obtener permisos y licencias para hacer sus obras.
Pero para ser un buen arquitecto me propongo estudiar mucho, sobre todo comprender y conocer muy bien todo lo relacionado con las matemáticas y especialmente con esta unidad.

¿Imposible?

«Dos rectas paralelas se cortan en el infinito»

Esta polémica afirmación corresponde al matemático e ingeniero francés Jean-Victor Poncelet (1788 - 1867). En la geometría de Poncelet, al igual que en la geometría proyectiva, dos rectas en un plano pueden cortarse o cruzarse, pero, no pueden ser paralelas, ya que considera que hasta estas se cortan en un punto del infinito denominado punto impropio.

– **Accede** al enlace http://links.edebe.com/yzz y obtendrás más información sobre la geometría proyectiva. ¿De qué principios parte?
– **Busca** las diferencias sustanciales entre los principios de la geometría euclidiana y la proyectiva.

Medidores láser de distancias

Un medidor láser, también conocido como telémetro láser, para medir distancias, utiliza el tiempo que tarda un pulso de luz láser en reflejarse en un punto y volver al origen. El tiempo transcurrido recibe el nombre de tiempo de vuelo. Una de las aplicaciones de los medidores láser es calcular la distancia entre la Tierra y la Luna.

– **Accede** al enlace http://links.edebe.com/gmnqh9 y **contesta:**
• **Busca** las diferencias sustanciales entre los principios de la geometría euclidiana y la proyectiva.
• ¿Qué fórmula emplean los medidores láser para calcular la distancia entre dos puntos?
• ¿Cuál sería el tiempo de vuelo si la distancia medida es de 300 m?
• ¿Por qué crees que cuando medimos la distancia entre dos puntos muy próximos o muy lejanos los medidores pierden precisión?
• ¿Por qué se utiliza luz tipo láser y no de otra tipología?

El 5.º postulado de Euclides a debate

De los cinco postulados de **Euclides,** el quinto de ellos ha sido motivo de controversia, ya que es menos evidente y más complejo de demostrar que los anteriores.

– **Formen** grupos de 3-4 personas y **describan** el contenido de los cuatro primeros postulados accediendo a http://links.edebe.com/5ujz.
– **Busquen** diversas reformulaciones del quinto postulado, y qué matemáticos posteriores fueron los más críticos al respecto. Pueden encontrar más información en http://links.edebe.com/3ez3.
– A partir de la reformulación de dicho postulado, **indiquen** los principios de la geometría que se plantean.

203

Solucionario

¿Imposible?

• Respuesta sugerida: La geometría proyectiva parte de los siguientes principios:
Dos puntos definen una recta.
Todo par de rectas se cortan en un punto.

• Respuesta sugerida: La geometría euclidiana es aquella que estudia las propiedades del plano y el espacio tridimensional y la geometría proyectiva estudia las incidencias de puntos y rectas sin tener en cuenta la medida. En proyectiva se permite demostrar todo lo demostrable en euclídea, sin tener que recurrir a una métrica.

• Cuando dos rectas son paralelas se dice que se cortan en un punto del infinito conocido como *punto impropio.*

Medidores láser de distancias

• Fórmula: $D = ct/2$, donde c es la velocidad de la luz y t es la cantidad de tiempo para el viaje de ida y vuelta entre el medidor y el destino.

• Sustituyendo 300 m en la fórmula anterior, obtenemos el tiempo de vuelo:

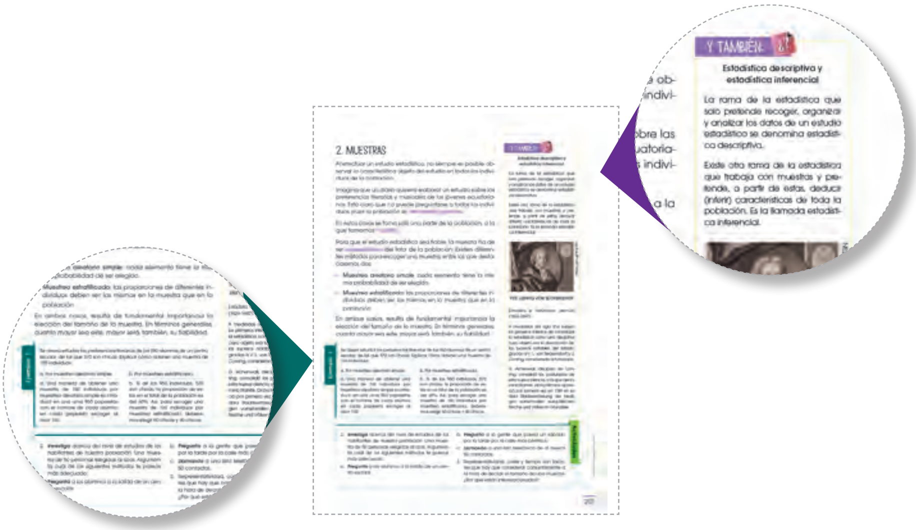
• $300 = ct/2 \rightarrow t = 600/c$ segundos, donde c es la velocidad de la luz que equivale a 299 792 458 m/s. Por lo tanto, el tiempo de vuelo es de 2×10^{-6} segundos.

• En el caso de distancias cortas se cometen imprecisiones al determinar el momento de la salida y de la llegada del haz luminoso. En el caso de distancias largas puede haber pequeñas variaciones de la velocidad de la luz, reflexiones no deseadas, etcétera.

• Respuesta sugerida: Porque viajan en forma justa a relaciones constantes a través de la atmósfera y viajan distancias mucho más largas sin perder intensidad, es menos probable que se disperse y conserva gran parte de su intensidad original cuando se refle refleja en el objetivo.

RECURSOS PARA FOMENTAR EL INGENIO EN EL AULA

Estadistica



UNIDAD 6


6 Estadística

CONTENIDOS:

1. Repaso de conceptos básicos
2. Muestras
3. Tablas estadísticas
   3.1 Tablas para datos no agrupados
   3.2 Tablas para datos agrupados
4. Gráficos
   - Diagrama de barras
   - Pictogramas
   - Diagrama de sectores
   - Histogramas
   - Polígono de frecuencias
   - Cartograma
   - Pirámide de población
   4.1 Gráficos evolutivos y comparativos
5. Tablas y gráficos con tics
6. Análisis de datos. Medidas de tendencia central
7. Medidas de dispersión para datos no agrupados
8. Medidas de dispersión para datos agrupado
9. Medidas de posición
10. Uso de TIC
11. Estrategias de resolución de problemas

204

Noticia:

Inflación negativa en julio, según datos del INEC

Agosto 7, 2015 Últimas noticias económicas.

La inflación mensual en julio de 2015 fue negativa (-0,08%) por primera vez en el año, según el último reporte del Índice de Precios publicado por el Instituto Nacional de Estadística y Censos (INEC). El Instituto señala que tres divisiones de gasto explican principalmente la variación negativa: la de alimentos y bebidas no alcohólicas, transporte y la de recreación y cultura, cuyas incidencias inflacionarias son de -0,0413%, -0,0466% y -0,0311% respectivamente. En julio de 2014, la inflación fue de 0,40%, mientras que en julio de 2009 también se registró una cifra similar de -0,07%, según las cifras del INEC. El INEC informa, además, que para el séptimo mes del año el país registra una inflación acumulada de 2,99% en comparación con el 2,31% que alcanzó en julio de 2014. Mientras, la inflación anual se ubicó en 4,36%.

(http://tinyurl.com/na2p9sg).

Película:

Ciudad mágica, de William A. Wellman (1947). Una empresa que se dedica a elaborar sondeos y busca una ciudad en la que la opinión de cuyos habitantes sea representativa de la de todo el país.

EN CONTEXTO:

La tabla muestra los datos de reciclaje del vidrio de cuatro comunidades autónomas en 2009

Comunidad	Habitantes	Kilos de vidrio recogido
A	8 302 923	78 888 840
B	1 345 473	22 637 624
C	1 095 426	28 822 970
D	2 103 992	25 829 030

¿Qué comunidad recicla más vidrio?

1. **Calcula** la cantidad de vidrio reciclado por habitante en cada comunidad.
2. **Elabora** un gráfico comparativo de la cantidad total de vidrio reciclado y la cantidad de vidrio reciclado por habitante en cada comunidad.

La cantidad total de vidrio reciclado, ¿es un indicador del porcentaje de reciclaje de una comunidad?

205

Eje temático	Contenidos
Estadistica	1.Repaso de conceptos básico. (206) 2. Muestras (207) 3. Tablas estadísticas (208-209) 4. Gráficos (210) 5. Tablas y gráficos con ayuda de Tics (215) 6. Análisis de datos. Medidas de tendencia central (217) 7. Medidas de dispersión para datos no agrupados (220) 8. Medidas de dispersión para datos agrupados (223) 9. Medidas de posición (224) 10. Uso de TIC (226) 11. Estrategias de resolución de problemas (207)

Indicadores para la evaluación del criterio

- I.M.5.9.1. Calcula, con y sin apoyo de las TIC, las medidas de centralización y dispersión para datos agrupados y no agrupados; representa la información en gráficos estadísticos apropiados y los interpreta, juzgando su validez. (J.2., I.3.)

Objetivo integrador del área por subnivel

- OI.5.6. Aplicar perspectivas multidisciplinares a la resolución colaborativa de situaciones problemáticas, partiendo del análisis de procesos sociales, naturales, económicos y artísticos, por medio del uso técnico y responsable de diversas fuentes, la fundamentación científica, la experimentación y la tecnología.
- OI.2.7. Comunicarse en forma efectiva a través del lenguaje artístico, corporal, oral y escrito, con los códigos adecuados, manteniendo pautas básicas de comunicación y enriqueciendo sus producciones con recursos multimedia.

Objetivos del área por subnivel

- O.M.5.6. Desarrollar la curiosidad y la creatividad a través del uso de herramientas matemáticas al momento de enfrentar y solucionar problemas de la realidad nacional, demostrando actitudes de orden, perseverancia y capacidades de investigación.

Destrezas con criterios de desempeño

Estadística

- M.5.3.1. Calcular e interpretar la media, mediana, moda, rango, varianza y desviación estándar para datos no agrupados y agrupados, con apoyo de las TIC.
- M.5.3.2. Resolver y plantear problemas de aplicación de las medidas de tendencia central y de dispersión para datos agrupados, con apoyo de las TIC.
- M.5.3.3. Juzgar la validez de las soluciones obtenidas en los problemas de aplicación de las medidas de tendencia central y de dispersión para datos agrupados dentro del contexto del problema, con apoyo de las TIC.
- M.5.3.5. Determinar los cuantiles (cuartiles, deciles y percentiles) para datos no agrupados y para datos agrupados.
- M.5.3.6. Representar en diagramas de caja los cuartiles, mediana, valor máximo y valor mínimo de un conjunto de datos.

Criterio de evaluación

- CE.M.5.9. Emplea la estadística descriptiva para resumir, organizar, graficar e interpretar datos agrupados y no agrupados.

Elementos del perfil de salida a los que se contribuye

- J.2. Actuamos con ética, generosidad, integridad, coherencia y honestidad en todos nuestros actos.
- I.3. Sabemos comunicarnos de manera clara en nuestra lengua y en otras, utilizamos varios lenguajes como el numérico, el digital, el artístico y el corporal; asumimos con responsabilidad nuestros discursos.

Básicos imprescindibles | Básicos deseables

Eje temático	Destrezas con criterio de desempeño
	Calcular e interpretar la media, mediana, moda, rango, varianza y desviación estándar para datos no agrupados y agrupados, con apoyo de las TIC.
	Resolver y plantear problemas de aplicación de las medidas de tendencia central y de dispersión para datos agrupados, con apoyo de las TIC.
	Juzgar la validez de las soluciones obtenidas en los problemas de aplicación de las medidas de tendencia central y de dispersión para datos agrupados dentro del contexto del problema, con apoyo de las TIC.
	Determinar los cuantiles (cuartiles, deciles y percentiles) para datos no agrupados y para datos agrupados.
	Representar en diagramas de caja los cuartiles, mediana, valor máximo y valor mínimo de un conjunto de datos.
	Calcular e interpretar el coeficiente de variación de un conjunto de datos (agrupados y no agrupados).

LOGO INSTITUCIONAL	NOMBRE DE LA INSTITUCIÓN	AÑO LECTIVO

PLAN DE UNIDAD TEMÁTICA

1. DATOS INFORMATIVOS:

Docente:	Nombre del docente que ingresa la información	Área/asignatura:	MATEMÁTICA	Grado/ Curso:	1° BACHILLERATO	Paralelo:	

N.º de unidad de planificación:	6	Título de unidad de planificación:	EL PROCESO ESTADÍSTICO	Objetivos específicos de la unidad de planificación:	Producir, comunicar y generalizar informaciónde manera escrita, verbal, simbólica, gráfica y/otecnológica mediante la aplicación de conocimientos Matemáticos y el manejo organizado ,responsable y honesto de las fuentes de datos para comprender otras disciplinas, entender las necesidades y potencialidades de nuestro país y tomar decisiones con responsabilidad social. Desarrollar la curiosidad y la creatividad en el uso de herramientas matemáticas al momento de enfrentar y solucionar problemas de la Realidad nacional demostrando actitudes de orden, perseverancia y capacidades de investigación el entorno social y económico, con un pensamiento crítico y reflexivo.

PERÍODOS	30	SEMANA DE INICIO:	

2. PLANIFICACIÓN

DESTREZAS CON CRITERIOS DE DESEMPEÑO A SER DESARROLLADAS:	CRITERIOS DE EVALUACIÓN
• Calcular e interpretar la media, mediana, moda, rango, varianza y desviación estándar para datos no agrupados y agrupados con apoyo de las TIC. • Juzgar la validez de las soluciones obtenidas en los problemas de aplicación de las medidas de tendencia central y de dispersión para datos agrupados dentro del contexto del problema, con apoyo de las TIC. • Calcular e interpretar el coeficiente de variación de un conjunto de datos (agrupados y no agrupados). • Determinar los cuantiles (cuartiles, deciles y percentiles) para datos no agrupados y para datos agrupados. • Representar en diagramas de caja los cuartiles, mediana, valor máximo y valor mínimo de un conjuntos de datos.	CE.M.5.9. Emplea la estadística descriptiva para resumir, organizar, graficar e interpretar datos agrupados y no agrupados.

<table>
<tr><td>ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE</td><td>RECURSOS</td><td colspan="2">INDICADORES DE LOGRO</td><td>TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN</td></tr>
<tr><td></td><td>• Texto
• Cuaderno
• Videos (sitios web)
• Pizarra
• Calculadora</td><td colspan="2">I.M.5.9.1. Calcula, con y sin apoyo de las TIC, las medidas de centralización y dispersión para datos agrupados y no agrupados; representa la información en gráficos estadísticos apropiados y
Los interpreta, juzgando su validez.
(J.2., I.3.)</td><td>Comprobar el desarrollo de las destrezas necesarias para la aplicación de la estadística descrptiva, medidas de tendencia central y de dispersión, para el análisis de datos agrupados y no agrupados. Además de calcular e interpretar el coeficiente de variación, determinar los cuantiles y deciles, y realizar</td></tr>
<tr><td colspan="5">ELEMENTOS DEL PERFIL DE SALIDA</td></tr>
<tr><td colspan="5">J.2. Actuamos con ética, generosidad, integridad, coherencia y honestidad en todos nuestros actos.
I.3. Sabemos comunicarnos de manera clara en nuestra lengua y en otras, utilizamos varios lenguajes como el numérico, el digital, el artístico y el corporal; asumimos con Responsabilidad nuestros discursos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">ELABORADO</td><td>REVISADO</td><td colspan="2">APROBADO</td></tr>
<tr><td colspan="2">Docente:</td><td>Director del área :</td><td colspan="2">Vicerrector:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Firma:</td><td>Firma:</td><td colspan="2">Firma:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fecha:</td><td>Fecha:</td><td colspan="2">Fecha:</td></tr>
</table>

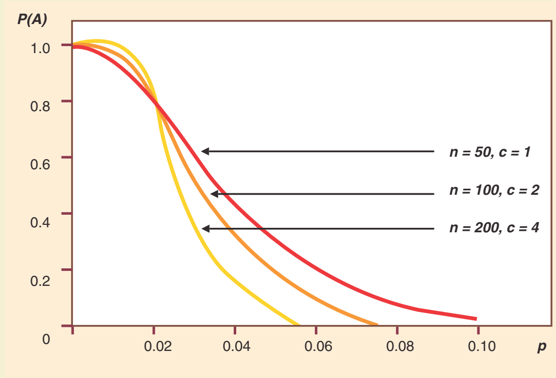
Planes de muestreo

Desde la Segunda Guerra Mundial, los planes de muestreo para aceptación se han convertido en procedimientos estándar para asegurar la calidad de los productos manufacturados. Con este propósito se ha desarrollado una gran variedad de sistemas de planes de muestreo para aceptación. Tres de los sistemas más empleados son MIL-STD-105D, MIL-STD-414 y el *Dodge-Romig Sampling Inspection Tables.*

Un plan básico de muestreo para aceptación consiste en seleccionar n artículos de un lote de tamaño N y aceptar el lote si el número de artículos defectuosos es menor o igual a un número de aceptación c, previamente estipulado.

Un factor muy importante en un plan de muestreo es la probabilidad de aceptar el lote $P(A)$ dada una proporción supuesta conocida de artículos defectuosos p.

Las gráficas que muestran dicha probabilidad en función de p reciben el nombre de *curvas características de operación,* CO.



La paradoja de San Petersburgo

La esperanza matemática de un juego de azar se calcula multiplicando el valor de cada premio por la probabilidad de éste y sumando todos estos productos. Los hermanos Bernoulli plantearon en el siglo XVIII un juego similar al siguiente: se lanza una moneda hasta que salga una cruz. Si sale en la primera tirada, el jugador A paga al B un euro; si sale en la segunda, dos euros; si sale en la tercera, cuatro euros; y así sucesivamente. ¿Cuál es la esperanza matemática del jugador B? O, lo que es lo mismo, ¿cuánto tiene que pagar de antemano el jugador B al A para que el juego resulte equitativo?

El premio que recibe el jugador B depende de la tirada n en que aparece la primera cruz, por lo que puede ser:

$$1, 2, 4, 8, \ldots, 2^{n+1} \text{ euros}$$

Por otra parte, la probabilidad de que salga cruz en la tirada 1, 2, 3, ..., n es, respectivamente:

$$\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \ldots, \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Por lo tanto, la esperanza matemática es:

$$1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + 2^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ldots = \infty$$

En resumen, el jugador B tendría que pagar al A infinitos euros, para que éste osase jugar a un juego tan peligroso para sus ahorros. De no hacerlo así, el jugador B siempre jugaría con ventaja, al menos en teoría.

La estadística, ¿mejora nuestra salud?

Actualmente, y sobre todo en determinados ámbitos, la toma de decisiones no puede estar sujeta a suposiciones, sino que debe fundamentarse en métodos científicos con una base estadística.

Los procesos de control de calidad constituyen una de las aplicaciones más importantes en las que interviene la toma de decisiones apoyadas sobre dichos métodos, y en los que la estadística aparece en la planificación, la recogida de datos y el análisis y la deducción de conclusiones posteriores.

Inicialmente el control de calidad se empleó en el ámbito industrial: control de costes, precios, beneficios, plazos de entrega… Sin embargo, en la actualidad también tiene utilidad en la prestación de servicios sociales como, por ejemplo, el servicio de asistencia sanitaria y su repercusión en la calidad de la atención sanitaria y de la salud en particular.

Así, la estadística se usa para controlar la seguridad alimentaria con el muestreo de alimentos elaborados o de animales de granja, para evitar pandemias como en el caso de las vacas locas o de la gripe aviar; o en los controles de calidad aplicados en las diferentes secciones de los laboratorios de análisis clínicos, bancos de sangre, monitorización de fármacos…

Pruebas de normalidad

Como ya sabemos, para ajustar una tabla de frecuencias de tamaño n a la distribución normal, comparamos las frecuencias relativas de la tabla con las correspondientes probabilidades obtenidas con una distribución normal con la misma media y la misma desviación típica. De esta comparación podemos deducir, *grosso modo,* si los resultados obtenidos se parecen o no.

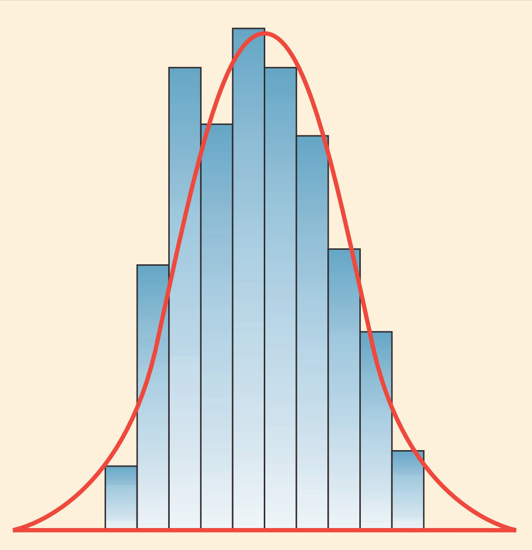
Si deseamos realizar la comparación con mayor precisión, podemos acudir a una prueba de normalidad, como por ejemplo la de Kolmogorov-Smirnov. Esta prueba consiste en:

— Calcular las frecuencias relativas acumuladas de la tabla.

— Hallar los valores que da la distribución normal.

— Obtener las diferencias en valor absoluto entre ambos resultados y tomar la mayor de ellas, d_m.

Entonces, si $d_m \leq \dfrac{136}{\sqrt{m}}$, podremos asegurar, con un riesgo del 5 %, que el ajuste es bueno y que, por lo tanto, la población se comporta según una distribución normal.



Nombre: ______________________ Fecha: ______________

En la tabla de la derecha aparece el número de habitaciones de las viviendas de un barrio.

Número de habitaciones	Frecuencia absoliuta
1	20
2	50
3	60
4	20

1. ¿Qué porcentaje de pisos tienen 2 o menos habitaciones? ¿Y más de 3 habita-ciones?
2. Construye un diagrama de barras horizontales y un diagrama de sectores de este estudio estadístico. 1
3. Al tirar 50 veces dos dados y sumar los puntos, hemos obtenido los siguientes resultados: 4, 3, 8, 12, 6, 2, 7, 9, 11, 5, 3, 7, 12, 10, 9, 4, 6, 8, 11, 10, 2, 6, 10, 12, 3, 5, 7, 7, 11, 6, 11, 5, 4, 2, 9, 12, 10, 3, 2, 5, 7, 4, 3, 5, 6, 9, 11, 8, 6 y 6. Determina la población y la va-riable estadística.

— Construye la correspondiente tabla de distribución de frecuencias.

— Construye un diagrama de barras, un diagrama de barras de frecuencias acumuladas y un polígono de frecuencias que reflejen los resultados obtenidos.

12. Construye un diagrama de sectores para representar la inversión publicitaria de un país: el 44 % es publicidad televisiva, el 33 % aparece en los diarios, el 14 % en las revistas, el 6,4 % en radio, el 2,2 % es exterior (vallas publicitarias...) y el 0,4 % se anuncia en el cine. Escribe al lado de cada sector la frecuencia relativa expresada en números decimales.

13. En la siguiente tabla aparece la tasa global de fecundidad de tres países a lo largo del tiempo.

Confecciona el gráfico evolutivo de cada país según los datos de la tabla y ela bo ra un gráfico comparativo con los datos de los distintos países.

PAÍS \ AÑO	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
España	2,20	1,64	1,36	1,18	1,22	1,35	146
Francia	1,95	1,81	1,78	1,70	1,82	1,93	1,98
China	62,63	2,64	2,22	1,87	1,74	1,67	1,60

a) Representamos por x el porcentaje de pisos que tienen 2 o menos habitaciones.

$$20 + 50 = 70$$

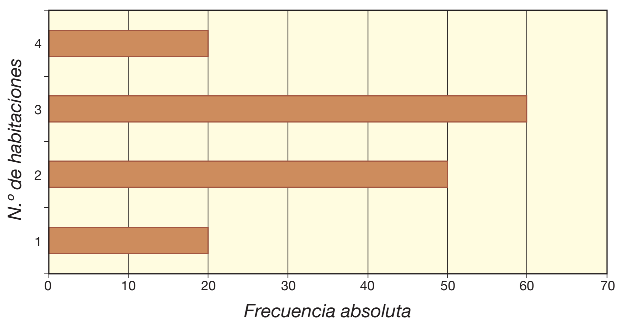
$$\frac{x}{100} = \frac{70}{150} \Rightarrow x = \frac{100 \cdot 70}{150} = 46{,}67$$

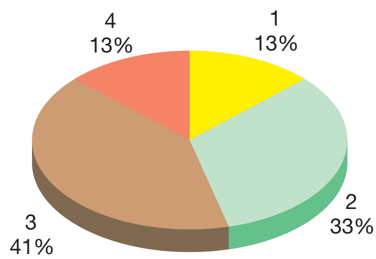
El 46,67 % de pisos tiene 2 o menos habitaciones.

Representamos por y el porcentaje de pisos que tiene más de 3 habitaciones.

$$\frac{y}{100} = \frac{20}{150} \Rightarrow y = \frac{100 \cdot 20}{150} = 13{,}33$$

El 13,33 % de los pisos tiene más de 3 habitaciones.

b) 



Tomando en cuenta las siguientes indicaciones.

a) Elaborar graficos de barras y de pastel simples, acerca del porcentaje de personas hombres y mujeres mayores de edad vivos en el Ecuador.

b) El porcentaje de personas de acuerdo a su etnia en el Ecuador.

c) El porcentaje de personas de acuerdo a su edad en el Ecuador.

El docente puede encontrar esa información en el Instituto Ecuatoriano de Estadísticas y Censos:

2.3. Gráficos estadísticos con ordenador

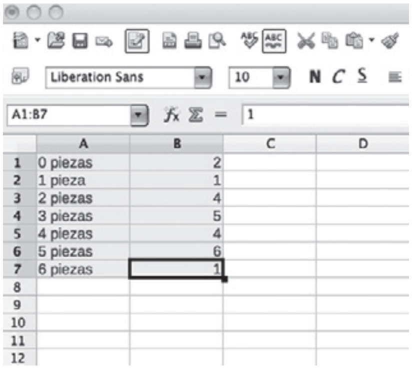
Podemos confeccionar gráficos estadísticos con una hoja de cálculo. Veamos un ejemplo utilizando la aplicación del programa OpenOffice, dispo-nible gratuitamente en http://www.openoffice.org/

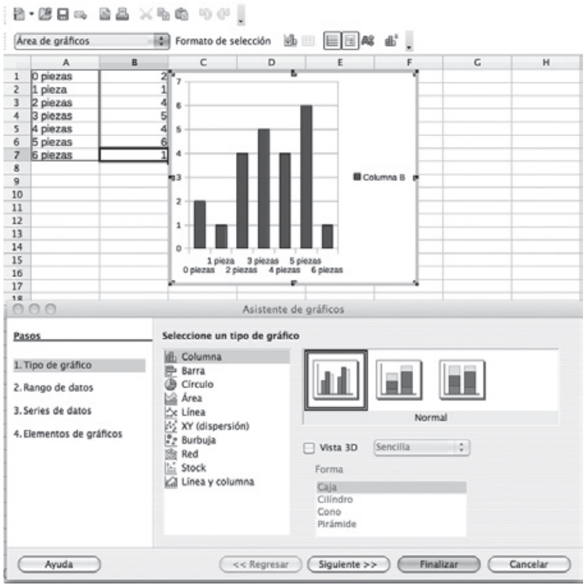
— Abrimos el programa Hoja de cálculo. Consta de un conjunto de celdas orga-nizadas en filas y columnas en las que podemos colocar ordenadamente la información. Copiamos en ella los datos de un estudio sobre el número de piezas de fruta y verdura consumidas en un día por los alumnos de una clase. Utilizamos el ratón o bien el cursor para pasar de una celda a otra.

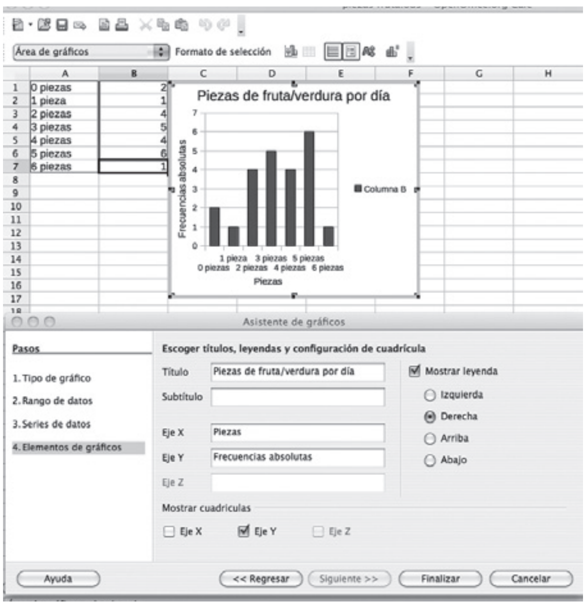
— A continuación, nos colocamos en la celda A1, pulsamos el botón del ratón y lo arrastramos hasta la celda B7 para seleccionar el rango que queremos representar. Todas las celdas quedan sombreadas.

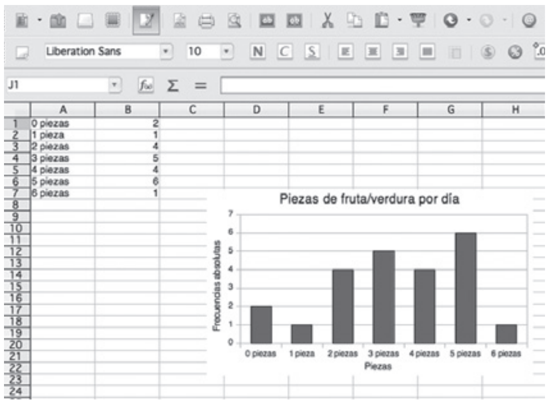
— Abrimos el menú desplegable Insertar y escogemos la opción Gráfico.

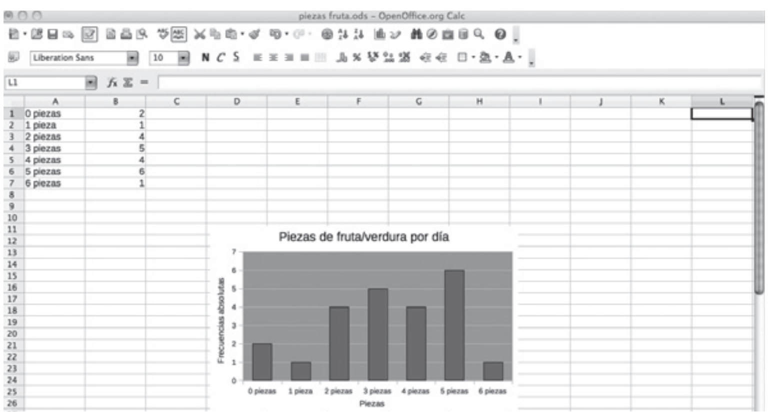
— Aparecen el gráfico y una serie de ventanas, que ofrecen diferentes posibili- dades. Elegimos las más adecuadas y pasamos a la siguiente ventana pulsan-do la opción Siguiente hasta obtener el gráfico deseado y entonces marcamos la opción Finalizar.











Los diferentes menús permiten variar el tipo y las características del gráfico, así como los títulos que aparecen.

CICLO DEL APRENDIZAJE

¿Cómo dinamizo el aula?

Conceptualización

- Definir movimiento obrero, feminismo, indigenismo, ecologismo, ecofeminismo.
- Identificar las características de los movimientos artísticos del siglo XIX y relacionarlos con el poder.

Aplicación

- Valorar las reivindicaciones feministas, ecologistas e indigenistas, reconociendo la validez de las mismas y actuando con respeto ante las mujeres, los indígenas y el medioambiente.
- Elaborar carteles con mensajes de concienciación sobre la igualdad de género, la conservación de la naturaleza, así como para condenar las actitudes racistas y etnocéntricas contra los miembros de pueblos y nacionalidades originarias de Ecuador y América.
- Utilizar los medios de comunicación con sentido crítico, sabiendo que sus mensajes pueden estar motivados por poderes que no son manifiestos. Comparar cómo una misma noticia es enfocada por distintos medios de comunicación. Comparar el contenido de distintos tipos de comunicación.

Reflexión

- ¿Todas las pinturas del siglo XIX son iguales? ¿La técnica y el tema de una pintura reflejan una forma de pensar?
- ¿De qué forma las clases populares han reaccionado y se han organizado ante la desigualdad social, la discriminación de género y étnica?

Experiencia

- Observar obras de arte del siglo XIX para identificar en ellas la influencia del poder y la política del momento.

BANCO DE PREGUNTAS

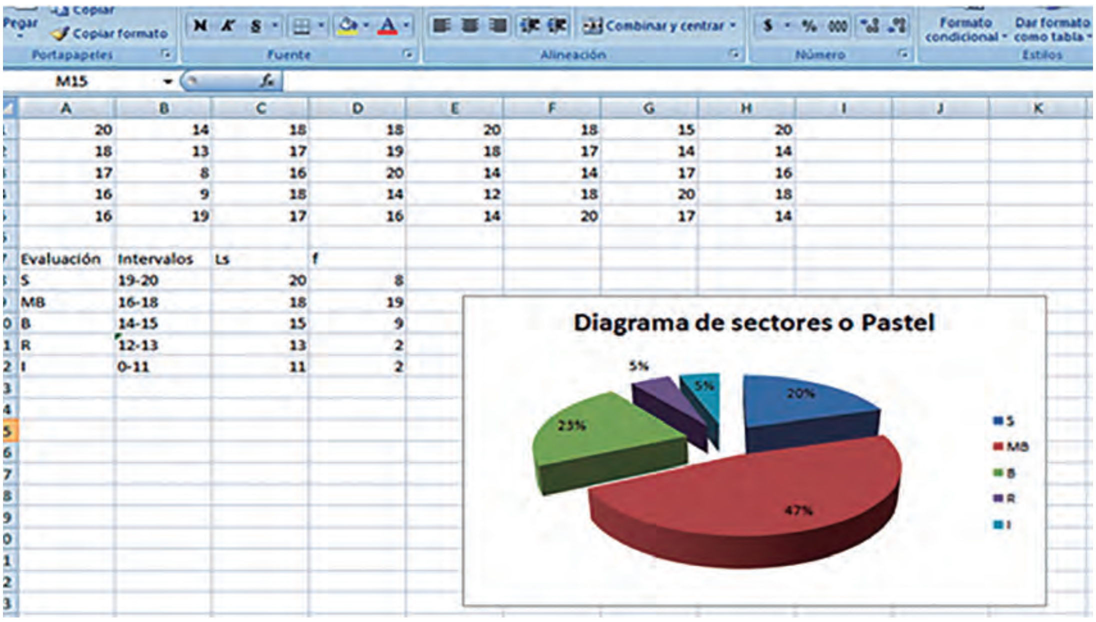
1. Un estadístico es una característica de una población.
2. Un parámetro es una característica de una población.
3. Las variables discretas pueden adoptar cualquiera de los valores de un cierto intervalo.
4. Las variables continuas pueden adoptar cualquiera de los valores de un cierto intervalo.
5. La variable X = "cantidad de lluvia que cae en Castellón en el mes de febrero", es un ejemplo de variable aleatoria discreta.
6. La variable X = "número de días de lluvia en Castellón en el mes de febrero", es un ejemplo de variable aleatoria discreta.
7. La Estadística es la ciencia que en líneas generales, recoge, organiza e interpreta los datos numéricos.
8. La Estadística sólo comprende el muestreo y la estadística descriptiva.
9. Una muestra es el conjunto de todos los posibles valores que puede tomar la variable considerada.
10. La estadística descriptiva incluye la recogida, organización y análisis descriptivo de los datos.
11. La Estadística se interesa sólo de la recogida, organización y visualización de los datos.
12. La inferencia estadística supone la extracción de conclusiones o toma de decisiones sobre una muestra, a partir de los valores de una población.
13. La inferencia estadística supone la extracción de conclusiones o toma de decisiones sobre una población, a partir de los valores de una muestra.
14. La frecuencia (absoluta) de una medida es el número de veces que se ha observado esa medida.
15. El límite inferior de un intervalo determinado es el menor valor posible para ese intervalo.
16. La marca de clase de un intervalo es la media entre los límites superior e inferior de ese intervalo.
17. La frecuencia acumulada para un intervalo dado es la suma de las frecuencias absolutas de los intervalos anteriores, pero sin incluir la frecuencia absoluta del intervalo considerado.
18. La frecuencia relativa para un intervalo dado es la suma de las frecuencias absolutas de los intervalos anteriores incluyendo el actual, dividida por el tamaño muestral.
19. La marca de clase de un intervalo se calcula como (límite superior - límite inferior)/2, donde los límites superior e inferior son los del intervalo considerado.
20. Un histograma de frecuencias absolutas y un histograma de frecuencias relativas para la misma distribución de frecuencias, tendrán siempre la misma forma.
21. Un polígono de frecuencias para un conjunto de datos, se obtiene uniendo las marcas de clase del histograma correspondiente.
22. Una población es parte de una muestra.
23. La suma de frecuencias relativas en una distribución de frecuencias siempre es igual a 1 (100%).

1. F	9. F	17. F	25. F	33. F	41. V
2. V	10. V	18. F	26. V	34. V	42. V
3. F	11. F	19. F	27. F	35. F	43. F
4. V	12. F	20. V	28. F	36. V	44. F
5. F	13. V	21. V	29. V	37. V	45. V
6. V	14. V	22. F	30. V	38. F	46. V
7. V	15. V	23. V	31. V	39. F	
8. F	16. V	24. V	32. F	40. V	

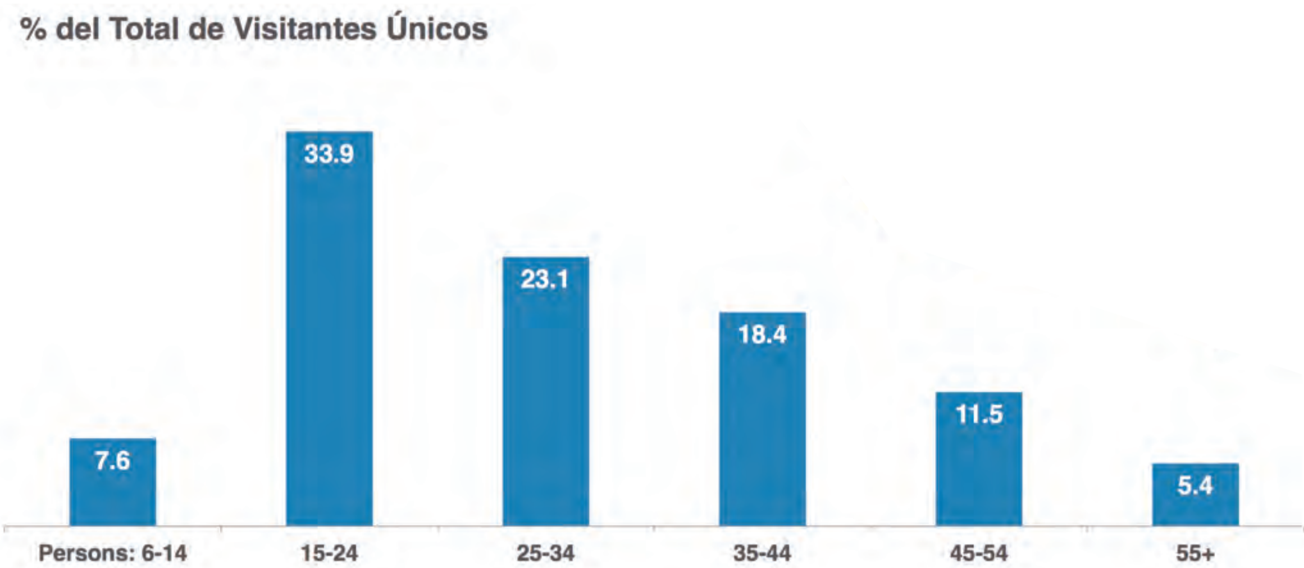
RECURSOS PROPIOS DEL ÁREA

La Hoja de Cálculo Excel puede convertirse en una poderosa herramienta para crear entornos de aprendizaje que enriquezcan la representación (modelado), comprensión y solución de problemas, en el área de la estadística y probabilidad. Excel ofrece funcionalidades que van más allá de la tabulación, cálculo de fórmulas y graficación de datos:

- En estadística descriptiva representa todos los tipos de gráficos y calcula la media, moda, mediana, recorrido, varianza y desviación típica.
- En estadística bidimensional representa la nube de puntos y la recta de regresión. Calcula el centro de gravedad, las desviaciones típicas marginales, la covarianza, el coeficiente de correlación, la recta de regresión y buscar objetivos.
- En la distribución binomial, calcula cualquier probabilidad, la media, varianza y desviación típica.
- En la distribución normal, calcula cualquier probabilidad en la normal estándar N(0, 1) y en cualquier normal N(m, s) y genera la tabla N(0, 1)
- En inferencia estadística calcula los intervalos de confianza, el tamaño de la muestra y se puede aplicar al contraste de hipótesis, tanto en el bilateral como en el unilateral.
- En probabilidad simula todo tipo de lanzamientos.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	20	14	18	18	20	18	15	20
2	18	13	17	19	18	17	14	14
3	17	8	16	20	14	14	17	16
4	16	9	18	14	12	18	20	18
5	16	19	17	16	14	20	17	14
6								
7	Evaluación	Intervalos	Ls	f				
8	S	19-20	20	8				
9	MB	16-18	18	19				
10	B	14-15	15	9				
11	R	12-13	13	2				
12	I	0-11	11	2				



Orientación didáctica

- Es importante que el alumnado vea la aplicación de la estadística en la vida cotidiana. Para ello, los estudios estadísticos deben estar contextualizados en ámbitos cercanos al alumno/a.

  Más que memorizar la definición de los conceptos estadísticos, es necesario que los alumnos los entiendan y los identifiquen.
- El alumno/a debe advertir que en los casos en que se encuentre con muchos valores distintos puede agrupar éstos en intervalos.

  Después de llevar a cabo el estudio de los diferentes tipos de gráficos estadísticos, es conveniente que los alumnos lo apliquen a la interpretación de informaciones que, bajo esta forma, aparecen en distintos medios de comunicación.

  Debe tenerse en cuenta que más importante que el cálculo de parámetros estadísticos (actualmente la mayoría de las calculadoras puede efectuarlos) es que los alumnos aprendan a interpretarlos.

  La enseñanza del manejo de la calculadora en modo estadístico se hará atendiendo a las pequeñas diferencias que pueda haber debido a las marcas y los modelos; pero el profesor/a debe asegurarse de que los alumnos saben efectuar los cálculos sin ella. El profesor/a hará reflexionar a los alumnos sobre todas las conclusiones, matemáticamente correctas, pero a veces sin significado práctico, que pueden derivarse de los propios datos estadísticos.

Página 204 - 205

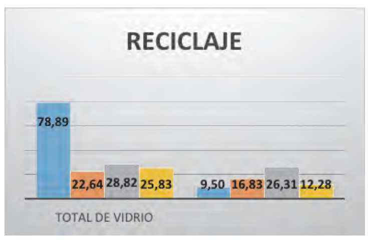
Solucionario de la sección: en contexto

La comunidad A recicla más vidrio

1. La cantidad de vidrio reciclado por habitante en cada comunidad es:

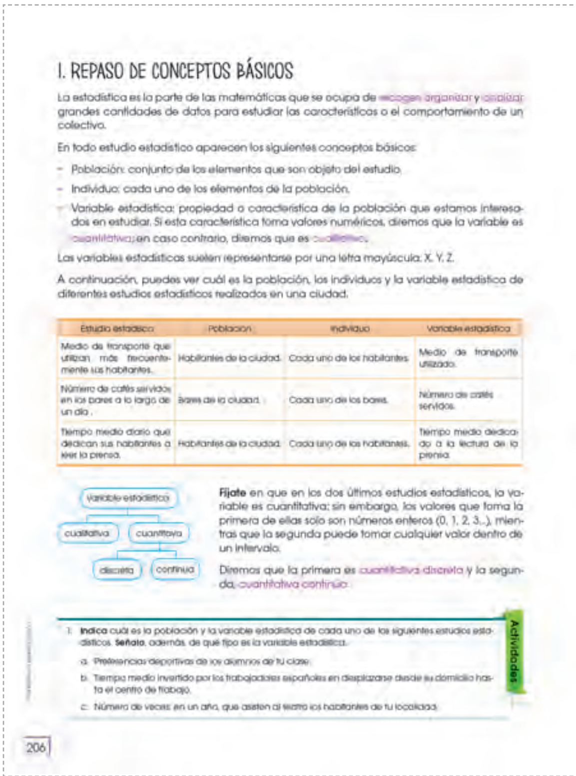
A 9.50	C 26.31
B 16.83	D 12.28

2.



La cantidad total de vidrio reciclado, no es un indicador del porcentaje de reciclaje de una comunidad.

Página 206



1. REPASO DE CONCEPTOS BÁSICOS

La estadística es la parte de las matemáticas que se ocupa de recoger, organizar y analizar grandes cantidades de datos para estudiar las características o el comportamiento de un colectivo.

En todo estudio estadístico aparecen los siguientes conceptos básicos:

- Población: conjunto de los elementos que son objeto del estudio.
- Individuo: cada uno de los elementos de la población.
- Variable estadística: propiedad o característica de la población que estamos interesados en estudiar. Si esta característica toma valores numéricos, diremos que la variable es cuantitativa; en caso contrario, diremos que es cualitativa.

Las variables estadísticas suelen representarse por una letra mayúscula: X, Y, Z.

A continuación, puedes ver cuál es la población, los individuos y la variable estadística de diferentes estudios estadísticos realizados en una ciudad.

Estudio estadístico	Población	Individuo	Variable estadística
Medio de transporte que utilizan más frecuentemente sus habitantes.	Habitantes de la ciudad.	Cada uno de los habitantes.	Medio de transporte utilizado.
Número de cafés servidos en los bares a lo largo de un día.	Bares de la ciudad.	Cada uno de los bares.	Número de cafés servidos.
Tiempo medio diario que dedican sus habitantes a leer la prensa.	Habitantes de la ciudad.	Cada uno de los habitantes.	Tiempo medio dedicado a la lectura de la prensa.

Fíjate en que en los dos últimos estudios estadísticos, la variable es cuantitativa; sin embargo, los valores que toma la primera de ellas solo son números enteros (0, 1, 2, 3...), mientras que la segunda puede tomar cualquier valor dentro de un intervalo.

Diremos que la primera es cuantitativa discreta y la segunda, cuantitativa continua.

Actividades

1. **Indica** cuál es la población y la variable estadística de cada uno de los siguientes estudios estadísticos. **Señala**, además, de qué tipo es la variable estadística.
   a. Preferencias deportivas de los alumnos de tu clase.
   b. Tiempo medio invertido por los trabajadores españoles en desplazarse desde su domicilio hasta el centro de trabajo.
   c. Número de veces, en un año, que asisten al teatro los habitantes de tu localidad.

206

Solucionario

Ejercicio 1

a. Población: El colegio

Variable estadística: Preferencias deportivas

Tipo de variable estadística: cualitativa

b. Población: España

Variable estadística: Tiempo medio invertido por los trabajadores en desplazarse desde su domicilio hasta el centro de trabajo.

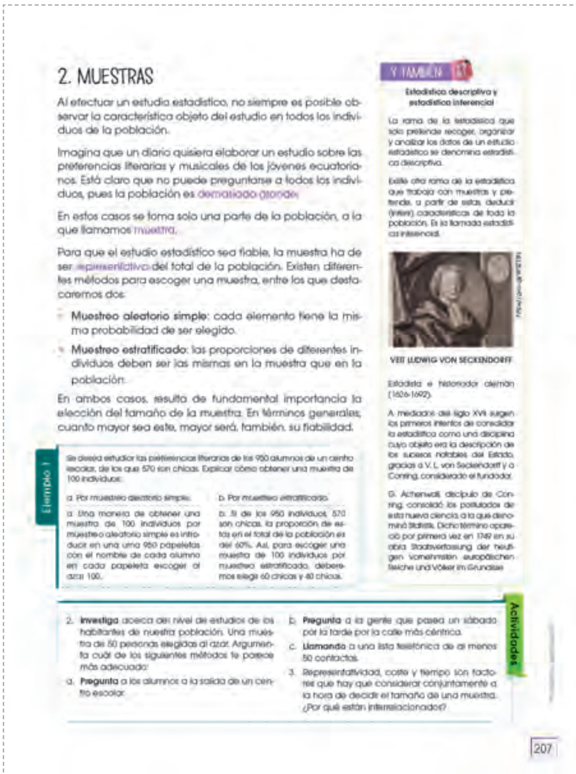
Tipo de variable estadística: cuantitativa

c. Población: La localidad

Variable estadística: Número de veces, en un año, que asisten al teatro.

Tipo de variable estadística: cuantitativa

Página 207



2. MUESTRAS

Al efectuar un estudio estadístico, no siempre es posible observar la característica objeto del estudio en todos los individuos de la población.

Imagina que un diario quisiera elaborar un estudio sobre las preferencias literarias y musicales de los jóvenes ecuatorianos. Está claro que no puede preguntarse a todos los individuos, pues la población es demasiado grande.

En estos casos se toma solo una parte de la población, a la que llamamos muestra.

Para que el estudio estadístico sea fiable, la muestra ha de ser representativa del total de la población. Existen diferentes métodos para escoger una muestra, entre los que destacaremos dos:

- **Muestreo aleatorio simple**: cada elemento tiene la misma probabilidad de ser elegido.
- **Muestreo estratificado**: las proporciones de diferentes individuos deben ser las mismas en la muestra que en la población.

En ambos casos, resulta de fundamental importancia la elección del tamaño de la muestra. En términos generales, cuanto mayor sea este, mayor será, también, su fiabilidad.

Ejemplo 1

Se desea estudiar las preferencias literarias de los 950 alumnos de un centro escolar, de los que 570 son chicas. Explicar cómo obtener una muestra de 100 individuos:

a. Por muestreo aleatorio simple.

b. Por muestreo estratificado.

a. Una manera de obtener una muestra de 100 individuos por muestreo aleatorio simple es introducir en una urna 950 papeletas con el nombre de cada alumno en cada papeleta escoger al azar 100.

b. Si de los 950 individuos, 570 son chicas, la proporción de estas en el total de la población es del 60%. Así, para escoger una muestra de 100 individuos por muestreo estratificado, deberemos elegir 60 chicas y 40 chicos.

Y TAMBIÉN

Estadística descriptiva y estadística inferencial

La rama de la estadística que solo pretende recoger, organizar y analizar los datos de un estudio estadístico se denomina estadística descriptiva.

Existe otra rama de la estadística que trabaja con muestras y pretende, a partir de estas, deducir (inferir) características de toda la población. Es la llamada estadística inferencial.

VEIT LUDWIG VON SECKENDORFF

Estadista e historiador alemán (1626-1692).

A mediados del siglo XVII surgen los primeros intentos de consolidar la estadística como una disciplina cuyo objeto era la descripción de los sucesos notables del Estado, gracias a V. L. von Seckendorff y a Conring, considerado el fundador.

G. Achenwall, discípulo de Conring, consolidó los postulados de esta nueva ciencia, a la que denominó Statistik. Dicho término apareció por primera vez en 1749 en su obra Staatsverfassung der heutigen Vornehmsten europäischen Reiche und Völker im Grundrisse.

Actividades

2. **Investiga** acerca del nivel de estudios de los habitantes de nuestra población. Una muestra de 50 personas elegidas al azar. Argumenta cuál de los siguientes métodos te parece más adecuado:
   a. **Pregunta** a los alumnos a la salida de un centro escolar.
   b. **Pregunta** a la gente que pasea un sábado por la tarde por la calle más céntrica.
   c. **Llamando** a una lista telefónica de al menos 50 contactos.
3. Representatividad, coste y tiempo son factores que hay que considerar conjuntamente a la hora de decidir el tamaño de una muestra. ¿Por qué están interrelacionados?

207

Solucionario

Ejercicio 2

El método más adecuado, depende de la muestra escogida, pues el b) puede ser más adecuado si se le pregunta 100 personas, pues en el c, sólo se le pregunta a 50.

Ejercicio 3

La representatividad, coste y tiempo sí están interrelacionados y son factores que hay que considerar la hora de decidir el tamaño de una muestra porque este, debe ser suficientemente grande para resultar representativa de la población, pero, a la vez, suficientemente pequeña para que sea posible manejarla.

Solucionario

Ejercicio 4

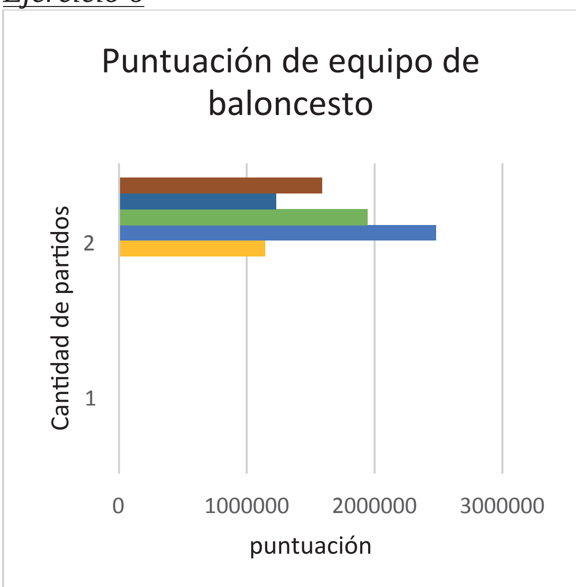
x_i	f_i
75	2
80	5
83	1
85	3
92	2
101	3
107	1
110	3
	20

Ejercicio 5

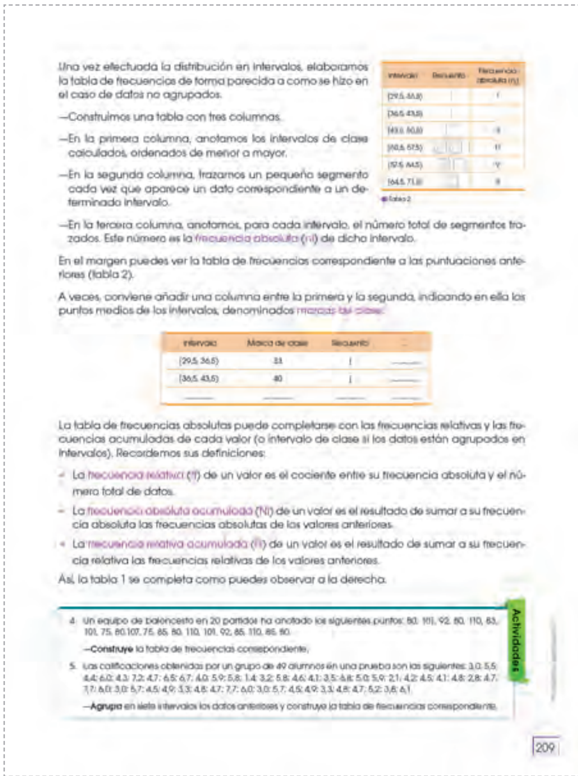
Calificaciones	*alumnos*
[1,4-2,3)	2
[2,3-3,2)	4
[3,2-4,1)	5
[4,1-5,0)	19
[5,0-5,9)	7
[5,9-6,8)	8
[6,8-7,7)	4
N	49

Solucionario

Ejercicio 6



Página 209



Una vez efectuada la distribución en intervalos, elaboramos la tabla de frecuencias de forma parecida a como se hizo en el caso de datos no agrupados.

—Construimos una tabla con tres columnas.

—En la primera columna, anotamos los intervalos de clase calculados, ordenados de menor a mayor.

—En la segunda columna, trazamos un pequeño segmento cada vez que aparece un dato correspondiente a un determinado intervalo.

—En la tercera columna, anotamos, para cada intervalo, el número total de segmentos trazados. Este número es la frecuencia absoluta (n_i) de dicho intervalo.

En el margen puedes ver la tabla de frecuencias correspondiente a las puntuaciones anteriores (tabla 2).

A veces, conviene añadir una columna entre la primera y la segunda, indicando en ella los puntos medios de los intervalos, denominados marcas de clase.

Intervalo	Marca de clase	Recuento	
[29,5, 36,5)	33	|	
[36,5, 43,5)	40	|	

La tabla de frecuencias absolutas puede completarse con las frecuencias relativas y las frecuencias acumuladas de cada valor (o intervalo de clase si los datos están agrupados en intervalos). Recordemos sus definiciones:

- La frecuencia relativa (f_i) de un valor es el cociente entre su frecuencia absoluta y el número total de datos.
- La frecuencia absoluta acumulada (N_i) de un valor es el resultado de sumar a su frecuencia absoluta las frecuencias absolutas de los valores anteriores.
- La frecuencia relativa acumulada (F_i) de un valor es el resultado de sumar a su frecuencia relativa las frecuencias relativas de los valores anteriores.

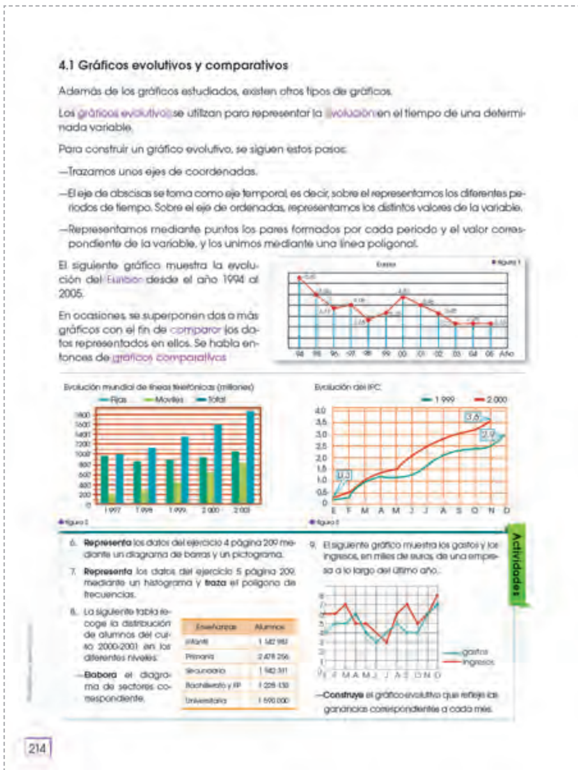
Así, la tabla 1 se completa como puedes observar a la derecha.

Actividades

4. Un equipo de baloncesto en 20 partidos ha anotado los siguientes puntos: 80, 101, 92, 80, 110, 83, 101, 75, 80, 107, 75, 85, 80, 110, 101, 92, 85, 110, 85, 80.
   —**Construye** la tabla de frecuencias correspondiente.
5. Las calificaciones obtenidas por un grupo de 49 alumnos en una prueba son las siguientes: 3,0; 5,5; 4,4; 6,0; 4,3; 7,2; 4,7; 6,5; 6,7; 4,0; 5,9; 5,8; 1,4; 3,2; 5,8; 4,6; 4,1; 3,5; 6,8; 5,0; 5,9; 2,1; 4,2; 4,5; 4,1; 4,8; 2,8; 4,7; 7,7; 6,0; 3,0; 5,7; 4,5; 4,9; 3,3; 4,8; 4,7; 7,7; 6,0; 3,0; 5,7; 4,5; 4,9; 3,3; 4,8; 4,7; 5,2; 3,8; 6,1.
   —**Agrupa** en siete intervalos los datos anteriores y construye la tabla de frecuencias correspondiente.

209

Página 214



4.1 Gráficos evolutivos y comparativos

Además de los gráficos estudiados, existen otros tipos de gráficos.

Los gráficos evolutivos se utilizan para representar la evolución en el tiempo de una determinada variable.

Para construir un gráfico evolutivo, se siguen estos pasos:

—Trazamos unos ejes de coordenadas.

—El eje de abscisas se toma como eje temporal, es decir, sobre el representamos los diferentes periodos de tiempo. Sobre el eje de ordenadas, representamos los distintos valores de la variable.

—Representamos mediante puntos los pares formados por cada periodo y el valor correspondiente de la variable, y los unimos mediante una línea poligonal.

El siguiente gráfico muestra la evolución del Euribor desde el año 1994 al 2005.

En ocasiones, se superponen dos o más gráficos con el fin de comparar los datos representados en ellos. Se habla entonces de gráficos comparativos.

Actividades

6. **Representa** los datos del ejercicio 4 página 209 mediante un diagrama de barras y un pictograma.
7. **Representa** los datos del ejercicio 5 página 209 mediante un histograma y **traza** el polígono de frecuencias.
8. La siguiente tabla recoge la distribución de alumnos del curso 2000-2001 en los diferentes niveles:
   —**Elabora** el diagrama de sectores correspondiente.

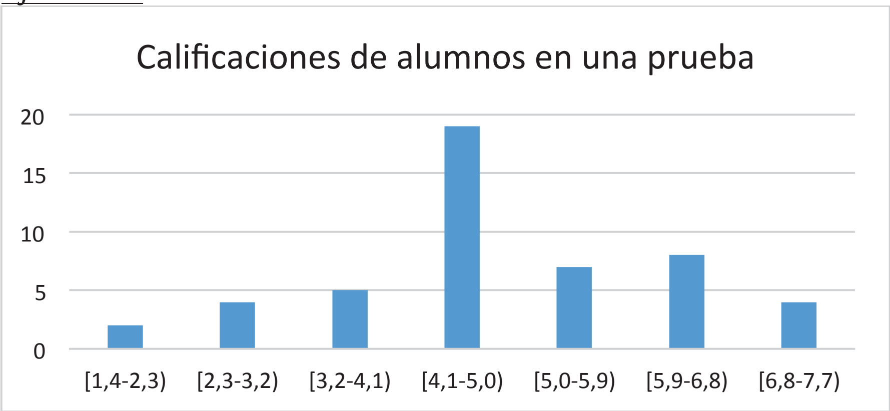
Enseñanzas	Alumnos
Infantil	1 142 [illegible]
Primaria	2 478 256
Secundaria	1 [illegible]
Bachillerato y FP	1 228 [illegible]
Universitaria	1 590 000

9. El siguiente gráfico muestra los gastos y los ingresos, en miles de euros, de una empresa a lo largo del último año.
   —**Construye** el gráfico evolutivo que refleje las ganancias correspondientes a cada mes.

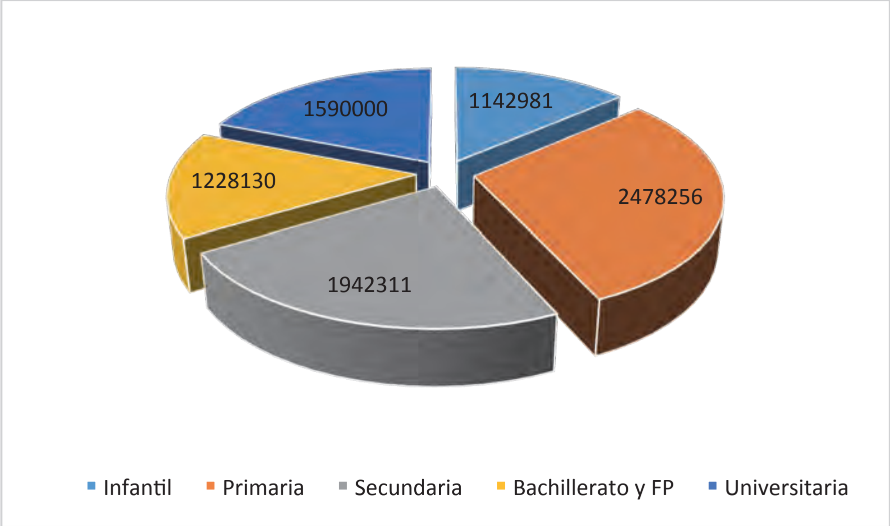
214

Solucionario

Ejercicio 7



Ejercicio 8



Ejercicio 9

Solucionario

Ejercicio 10

$\bar{x}$=90,6 Me=85 Mo=80

Ejercicio 11

$\bar{x}$=1,9 Me=3 Mo=2

Ejercicio 12

$\bar{x}$=98,5 Me=97,5 Mo=97

Solucionario

Ejercicio 13

xi	fi	xi*fi	$\lvert xi-\bar{x}\rvert$
0	1	0	2.45
1	1	1	1.45
2	11	22	0.45
3	4	12	0.55
4	2	8	1.55
5	0	0	2.55
6	1	6	3.55
	20	***49***	***12.55***

$$\bar{x}=\frac{49}{20}=2,45$$

$$D_m=\frac{12,55}{20}=0,6275$$

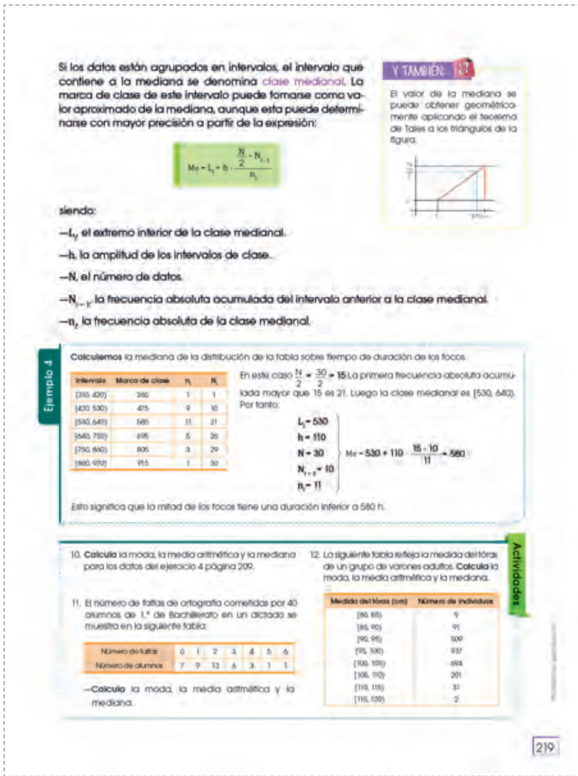
Ejercicio 14

xi	fi	xi*fi	$\lvert xi-\bar{x}\rvert$
10	7	70	2.9
11	3	33	1.9
12	5	60	0.9
13	1	13	0.1
14	3	42	1.1
15	7	105	2.1
16	4	64	3.1
	30	***387***	***12.1***

$$\bar{x}=\frac{387}{30}=12,9$$

$$D_m=\frac{12,1}{30}=0,4033$$

Página 219



Si los datos están agrupados en intervalos, el intervalo que contiene a la mediana se denomina clase medianal. La marca de clase de este intervalo puede tomarse como valor aproximado de la mediana, aunque esta puede determinarse con mayor precisión a partir de la expresión:

$$Me = L_i + h \cdot \frac{\frac{N}{2} - N_{i-1}}{n_i}$$

siendo:

—L_i, el extremo inferior de la clase medianal.

—h, la amplitud de los intervalos de clase.

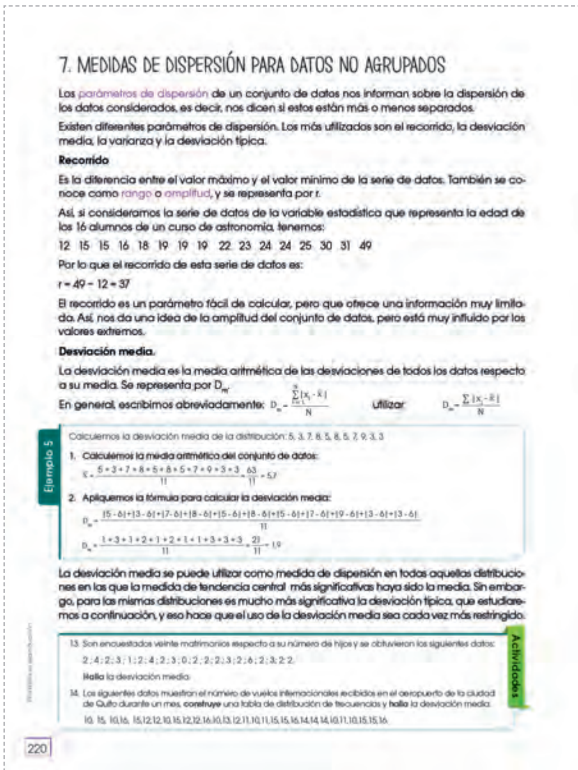
—N, el número de datos.

—N_{i-1}, la frecuencia absoluta acumulada del intervalo anterior a la clase medianal.

—n_i, la frecuencia absoluta de la clase medianal.

Y TAMBIÉN: El valor de la mediana se puede obtener geométricamente aplicando el teorema de Tales a los triángulos de la figura.

Página 220



7. MEDIDAS DE DISPERSIÓN PARA DATOS NO AGRUPADOS

Los parámetros de dispersión de un conjunto de datos nos informan sobre la dispersión de los datos considerados, es decir, nos dicen si estos están más o menos separados.

Existen diferentes parámetros de dispersión. Los más utilizados son el recorrido, la desviación media, la varianza y la desviación típica.

Recorrido

Es la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de la serie de datos. También se conoce como rango o amplitud, y se representa por r.

Así, si consideramos la serie de datos de la variable estadística que representa la edad de los 16 alumnos de un curso de astronomía, tenemos:

12 15 15 16 18 19 19 19 22 23 24 24 25 30 31 49

Por lo que el recorrido de esta serie de datos es:

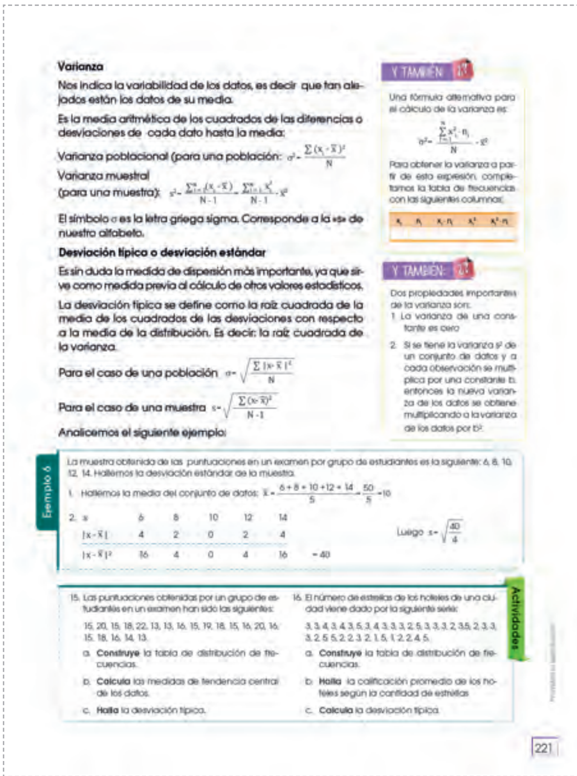
r = 49 − 12 = 37

El recorrido es un parámetro fácil de calcular, pero que ofrece una información muy limitada. Así, nos da una idea de la amplitud del conjunto de datos, pero está muy influido por los valores extremos.

Desviación media.

La desviación media es la media aritmética de las desviaciones de todos los datos respecto a su media. Se representa por D_m.

Página 221



Varianza

Nos indica la variabilidad de los datos, es decir que tan alejados están los datos de su media.

Es la media aritmética de los cuadrados de las diferencias o desviaciones de cada dato hasta la media:

Varianza poblacional (para una población: $\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N}$

Varianza muestral
(para una muestra): $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})}{N-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{N-1} - \bar{x}^2$

El símbolo σ es la letra griega sigma. Corresponde a la «s» de nuestro alfabeto.

Desviación típica o desviación estándar

Es sin duda la medida de dispersión más importante, ya que sirve como medida previa al cálculo de otros valores estadísticos.

La desviación típica se define como la raíz cuadrada de la media de los cuadrados de las desviaciones con respecto a la media de la distribución. Es decir: la raíz cuadrada de la varianza.

Para el caso de una población $\sigma = \sqrt{\frac{\sum |x - \bar{x}|^2}{N}}$

Para el caso de una muestra $s = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{N-1}}$

Analicemos el siguiente ejemplo:

Y TAMBIÉN:

Una fórmula alternativa para el cálculo de la varianza es:

$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \cdot n_i}{N} - \bar{x}^2$

Para obtener la varianza a partir de esta expresión, completamos la tabla de frecuencias con las siguientes columnas:

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$

Y TAMBIÉN:

Dos propiedades importantes de la varianza son:

1. La varianza de una constante es cero
2. Si se tiene la varianza s^2 de un conjunto de datos y a cada observación se multiplica por una constante b, entonces la nueva varianza de los datos se obtiene multiplicando a la varianza de los datos por b^2.

Ejemplo 6

La muestra obtenida de las puntuaciones en un examen por grupo de estudiantes es la siguiente: 6, 8, 10, 12, 14. Hallemos la desviación estándar de la muestra.

1. Hallemos la media del conjunto de datos: $\bar{x} = \frac{6+8+10+12+14}{5} = \frac{50}{5} = 10$

2.

x	6	8	10	12	14	
$\lvert x - \bar{x} \rvert$	4	2	0	2	4	
$\lvert x - \bar{x} \rvert^2$	16	4	0	4	16	= 40

Luego $s = \sqrt{\frac{40}{4}}$

Actividades

15. Las puntuaciones obtenidas por un grupo de estudiantes en un examen han sido las siguientes:
15, 20, 15, 18, 22, 13, 13, 16, 15, 19, 18, 15, 16, 20, 16, 15, 18, 16, 14, 13.
    a. **Construye** la tabla de distribución de frecuencias.
    b. **Calcula** las medidas de tendencia central de los datos.
    c. **Halla** la desviación típica.

16. El número de estrellas de los hoteles de una ciudad viene dado por la siguiente serie:
3, 3, 4, 3, 4, 3, 5, 3, 4, 3, 3, 3, 2, 5, 3, 3, 3, 2, 3,5, 2, 3, 3, 3, 2, 5, 5, 2, 2, 3, 2, 1, 5, 1, 2, 2, 4, 5.
    a. **Construye** la tabla de distribución de frecuencias.
    b. **Halla** la calificación promedio de los hoteles según la cantidad de estrellas
    c. **Calcula** la desviación típica.

221

Solucionario

Ejercicio 15

a)

xi	*fi*	*xi*fi*	$(xi - \bar{x})^2$
13	3	39	11.2225
14	1	14	5.5225
15	5	75	1.8225
16	4	64	0.1225
18	3	54	2.7225
19	1	19	7.0225
20	2	40	13.3225
22	1	22	31.9225
	20	***327***	***73.68***

b)

$\bar{x} = \frac{327}{20} = 16{,}35$;   Me=16;   Mo=15

c) $s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x-\bar{x})^2}{N-1}}$

$s = \sqrt{\frac{73{,}68}{19}} = 1{,}97$

Ejercicio 16

xi	*fi*	*Fr*	*xi*fi*	$(xi - \bar{x})^2$
1	2	0.053	2	4.55
2	9	0.237	18	1.28
3	16	0.421	48	0.02
4	4	0.105	16	0.75
5	7	0.184	35	3.49
	38	***1.000***	***119***	***10.09***

b. La calificación promedio de los hoteles es: $\bar{x} = \frac{119}{38} = 3{,}13$

c. $s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x-\bar{x})^2}{N-1}}$

$s = \sqrt{\frac{10.09}{37}} = 0{,}52$

Solucionario

Ejercicio 17

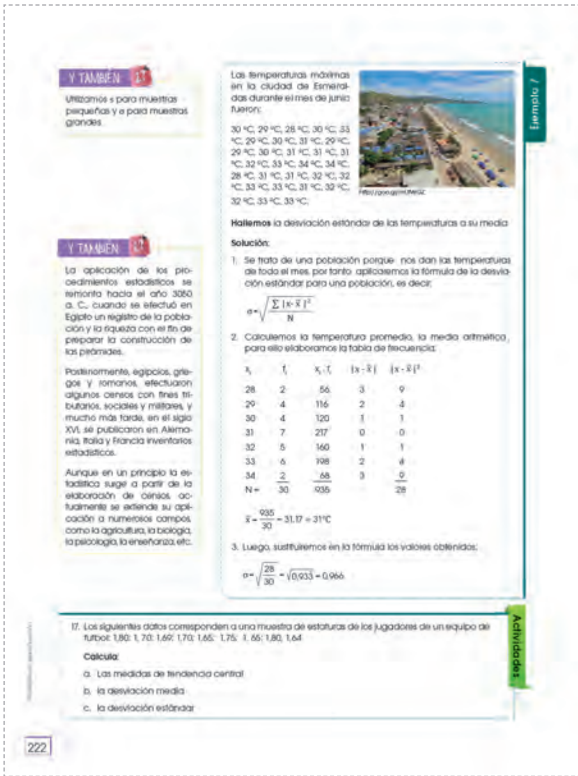
xi	fi	Fr	$xi*fi$	$(xi-\bar{x})^2$
1.64	1	0.111	1.64	0.005
1.65	2	0.222	3.3	0.003
1.69	1	0.111	1.69	0.000
1.70	2	0.222	3.4	0.000
1.75	1	0.111	1.75	0.002
1.80	2	0.222	3.6	0.008
	9	***1.000***	***15.38***	***0.02***

$\bar{x}=\frac{15,38}{9}=1,71$ Me=1,70; Mo=1,65-1,70-1,80

b) $D_m=\frac{0,288}{9}=0,032$

c) $s=\sqrt{\frac{0,019}{9-1}}=0,0487$

Página 222



Solucionario

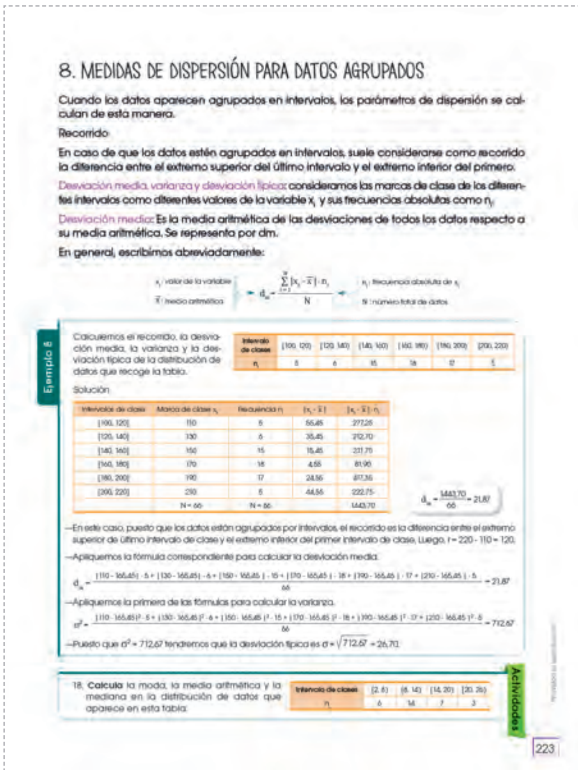
Ejercicio 18

Interv.	xi	Frec.(ni)	xi*fi	|xi - x |	|xi - x |· ni
[2, 8)	5	6	30	7,4	44,4
[8, 14)	11	14	154	1,4	19,6
[14, 20)	17	7	119	4,6	32,2
[20, 26)	23	3	69	10,6	31,8
		30	***372***	***24***	***128***

$\bar{x}=\frac{372}{30}=12,4$

$D_m=\frac{128}{30}=4,3$

Página 223



Página 235

Solucionario

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. El tiempo invertido por los participantes en una prueba de atletismo en cubrir el circuito es una variable estadística: c) Cuantitativa continua.
2. Al realizar un estudio estadístico es conveniente escoger una muestra) Si la población es muy grande.
3. Un profesor efectúa un examen para conocer el nivel de sus alumnos al empezar el curso.
   a) Porque recoge, ordena y analiza datos para estudiar el comportamiento de un colectivo.
   b) La población: alumnos de la clase. Variable estadística: puntuación obtenida en el examen.
   c) Suponiendo que el profesor pone notas numéricas, e independientemente de si estas son números enteros o con uno o dos decimales, se trata de una variable cuantitativa discreta.
4. La frecuencia absoluta de un valor de la variable estadística es el número de veces que se repite dicho valor.

La frecuencia relativa de un valor de la variable estadística es el resultado de dividir la frecuencia absoluta de dicho valor por el número total de datos.

La suma de las frecuencias absolutas de todos los posibles valores de una variable estadística coincide con el número total de datos:

$$N1 + \ldots + nN = \Sigma ni = N$$

La suma de las frecuencias relativas de todos los posibles valores de una variable estadística es 1 si se expresan en forma fraccionaria o decimal y es 100 si se expresan en porcentaje:

$$\frac{n_1}{N} + \ldots + \frac{n_N}{N} = \frac{n_1 + \ldots + n_N}{N} = \frac{N}{N} = 1$$

5. Respuesta abierta

6.

a) Sí es necesario tomar una muestra

b) Una forma de escoger la muestra, es por provincias, hacer el estudio en las provincias de mayor población.

7. Varias respuestas

8. Tabla de frecuencias

xi	*ni*	*fr*	*fa*
0	8	0,33	8
1	4	0,17	12
2	6	0,25	18
3	3	0,13	21
4	2	0,08	23
5	1	0,04	24
	24		

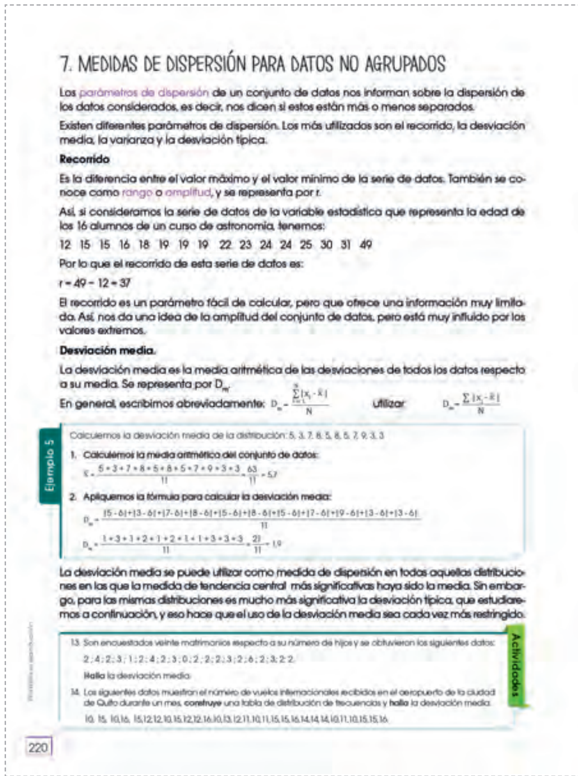
9. Tabla de frecuencias

intervalo		ni	fr	fa
250	297,5	3	0,06	3
297,5	345	4	0,08	7
345	392,5	13	0,26	20
392,5	440	6	0,12	26
440	487,5	9	0,18	35
487,5	535	1	0,02	36
535	582,5	6	0,12	42
582,5	630	4	0,08	46
630	677,5	2	0,04	48
677,5	725	2	0,04	50
		50	***1***	

Página 217

Solucionario

Confecciona las tablas adecuadas y determina la moda, la mediana, la media aritmética, el recorrido, la desviación media, la varianza y la desviación típica de la siguiente distribución de datos. x¯ = 6,6; Me=6,1; Re=14;¯2=14,58;¯=3,8



7. MEDIDAS DE DISPERSIÓN PARA DATOS NO AGRUPADOS

Los parámetros de dispersión de un conjunto de datos nos informan sobre la dispersión de los datos considerados, es decir, nos dicen si estos están más o menos separados.

Existen diferentes parámetros de dispersión. Los más utilizados son el recorrido, la desviación media, la varianza y la desviación típica.

Recorrido

Es la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de la serie de datos. También se conoce como rango o amplitud, y se representa por r.

Así, si consideramos la serie de datos de la variable estadística que representa la edad de los 16 alumnos de un curso de astronomía, tenemos:

12 15 15 16 18 19 19 19 22 23 24 24 25 30 31 49

Por lo que el recorrido de esta serie de datos es:

r = 49 − 12 = 37

El recorrido es un parámetro fácil de calcular, pero que ofrece una información muy limitada. Así, nos da una idea de la amplitud del conjunto de datos, pero está muy influido por los valores extremos.

Desviación media.

La desviación media es la media aritmética de las desviaciones de todos los datos respecto a su media. Se representa por D_m.

En general, escribimos abreviadamente: $D_m = \frac{\sum_{i=1}^{N} |x_i - \bar{x}|}{N}$ utilizar $D_m = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{N}$

Ejemplo 5

Calculemos la desviación media de la distribución: 5, 3, 7, 8, 5, 8, 5, 7, 9, 3, 3

1. Calculemos la media aritmética del conjunto de datos:

$\bar{x} = \frac{5+3+7+8+5+8+5+7+9+3+3}{11} = \frac{63}{11} = 5{,}7$

2. Apliquemos la fórmula para calcular la desviación media:

$D_m = \frac{|5-6|+|3-6|+|7-6|+|8-6|+|5-6|+|8-6|+|5-6|+|7-6|+|9-6|+|3-6|+|3-6|}{11}$

$D_m = \frac{1+3+1+2+1+2+1+1+3+3+3}{11} = \frac{21}{11} = 1{,}9$

La desviación media se puede utilizar como medida de dispersión en todas aquellas distribuciones en las que la medida de tendencia central más significativas haya sido la media. Sin embargo, para las mismas distribuciones es mucho más significativa la desviación típica, que estudiaremos a continuación, y eso hace que el uso de la desviación media sea cada vez más restringido.

Actividades

13. Son encuestados veinte matrimonios respecto a su número de hijos y se obtuvieron los siguientes datos:

2 ; 4 ; 2 ; 3 ; 1 ; 2 ; 4 ; 2 ; 3 ; 0 ; 2 ; 2 ; 2 ; 3 ; 2 ; 6 ; 2 ; 3; 2 2.

Halla la desviación media.

14. Los siguientes datos muestran el número de vuelos internacionales recibidos en el aeropuerto de la ciudad de Quito durante un mes, **construye** una tabla de distribución de frecuencias y **halla** la desviación media.

10, 15, 10,16, 15,12,12,10,15,12,12,16,10,13,12,11,10,11,15,15,16,14,14,14,10,11,10,15,15,16.

220

Página 220

Solucionario

1. Son encuestados veinte matrimonios respecto a su número de hijos y se obtuvieron los siguientes datos:

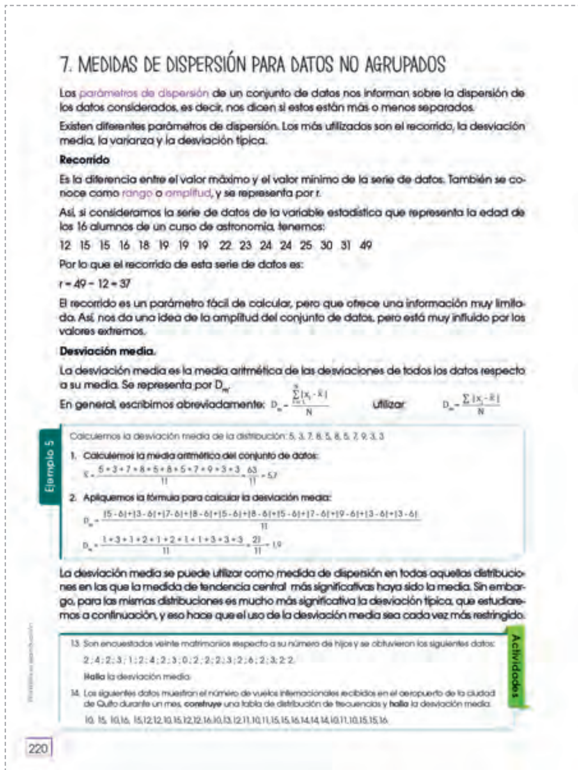
   2 ; 4 ; 2 ; 3 ; 1 ; 2 ; 4 ; 2 ; 3 ; 0 ; 2 ; 2 ; 2 ; 3 ; 2 ; 6 ; 2 ; 3; 2; 2;

   Halla la desviación media.

2. Los siguientes datos muestran el número de vuelos internacionales recibidos en el aeropuerto de la ciudad de Quito durante un mes, construye una tabla de distribución de frecuencias y halla la desviación media.

   10, 15, 10,16, 15,12,12,10,15,12,12,16,10,13,12,11,10,11,15,15,16,14,14,14,10,11,10,15,15,16.

1. Dm= 0,9
2. Dm=2,03



7. MEDIDAS DE DISPERSIÓN PARA DATOS NO AGRUPADOS

Los parámetros de dispersión de un conjunto de datos nos informan sobre la dispersión de los datos considerados, es decir, nos dicen si estos están más o menos separados.

Existen diferentes parámetros de dispersión. Los más utilizados son el recorrido, la desviación media, la varianza y la desviación típica.

Recorrido

Es la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de la serie de datos. También se conoce como rango o amplitud, y se representa por r.

Así, si consideramos la serie de datos de la variable estadística que representa la edad de los 16 alumnos de un curso de astronomía, tenemos:

12 15 15 16 18 19 19 19 22 23 24 24 25 30 31 49

Por lo que el recorrido de esta serie de datos es:

r = 49 − 12 = 37

El recorrido es un parámetro fácil de calcular, pero que ofrece una información muy limitada. Así, nos da una idea de la amplitud del conjunto de datos, pero está muy influido por los valores extremos.

Desviación media.

La desviación media es la media aritmética de las desviaciones de todos los datos respecto a su media. Se representa por D_m.

En general, escribimos abreviadamente: $D_m = \frac{\sum_{i=1}^{N} |x_i - \bar{x}|}{N}$ utilizar $D_m = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{N}$

Ejemplo 5

Calculemos la desviación media de la distribución: 5, 3, 7, 8, 5, 8, 5, 7, 9, 3, 3

1. Calculemos la media aritmética del conjunto de datos:

$\bar{x} = \frac{5+3+7+8+5+8+5+7+9+3+3}{11} = \frac{63}{11} = 5{,}7$

2. Apliquemos la fórmula para calcular la desviación media:

$D_m = \frac{|5-6|+|3-6|+|7-6|+|8-6|+|5-6|+|8-6|+|5-6|+|7-6|+|9-6|+|3-6|+|3-6|}{11}$

$D_m = \frac{1+3+1+2+1+2+1+1+3+3+3}{11} = \frac{21}{11} = 1{,}9$

La desviación media se puede utilizar como medida de dispersión en todas aquellas distribuciones en las que la medida de tendencia central más significativas haya sido la media. Sin embargo, para las mismas distribuciones es mucho más significativa la desviación típica, que estudiaremos a continuación, y eso hace que el uso de la desviación media sea cada vez más restringido.

Actividades

13. Son encuestados veinte matrimonios respecto a su número de hijos y se obtuvieron los siguientes datos:

2 ; 4 ; 2 ; 3 ; 1 ; 2 ; 4 ; 2 ; 3 ; 0 ; 2 ; 2 ; 2 ; 3 ; 2 ; 6 ; 2 ; 3; 2 2.

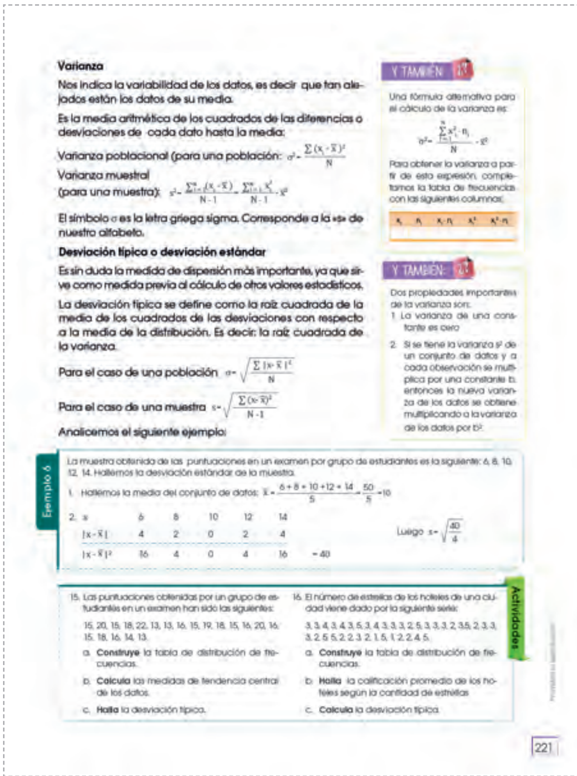
Halla la desviación media.

14. Los siguientes datos muestran el número de vuelos internacionales recibidos en el aeropuerto de la ciudad de Quito durante un mes, **construye** una tabla de distribución de frecuencias y **halla** la desviación media.

10, 15, 10,16, 15,12,12,10,15,12,12,16,10,13,12,11,10,11,15,15,16,14,14,14,10,11,10,15,15,16.

220

Página 221



Varianza

Nos indica la variabilidad de los datos, es decir que tan alejados están los datos de su media.

Es la media aritmética de los cuadrados de las diferencias o desviaciones de cada dato hasta la media:

Varianza poblacional (para una población: $\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N}$

Varianza muestral (para una muestra): $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})}{N-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{N-1} - \bar{x}^2$

El símbolo σ es la letra griega sigma. Corresponde a la «s» de nuestro alfabeto.

Desviación típica o desviación estándar

Es sin duda la medida de dispersión más importante, ya que sirve como medida previa al cálculo de otros valores estadísticos.

La desviación típica se define como la raíz cuadrada de la media de los cuadrados de las desviaciones con respecto a la media de la distribución. Es decir: la raíz cuadrada de la varianza.

Para el caso de una población $\sigma = \sqrt{\frac{\sum |x - \bar{x}|^2}{N}}$

Para el caso de una muestra $s = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{N-1}}$

Analicemos el siguiente ejemplo:

Y TAMBIÉN

Una fórmula alternativa para el cálculo de la varianza es:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \cdot n_i}{N} - \bar{x}^2$$

Para obtener la varianza a partir de esta expresión, completamos la tabla de frecuencias con las siguientes columnas:

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$

Y TAMBIÉN

Dos propiedades importantes de la varianza son:

1. La varianza de una constante es cero
2. Si se tiene la varianza s^2 de un conjunto de datos y a cada observación se multiplica por una constante b, entonces la nueva varianza de los datos se obtiene multiplicando a la varianza de los datos por b^2.

Ejemplo 6

La muestra obtenida de las puntuaciones en un examen por grupo de estudiantes es la siguiente: 6, 8, 10, 12, 14. Hallemos la desviación estándar de la muestra.

1. Hallemos la media del conjunto de datos: $\bar{x} = \frac{6+8+10+12+14}{5} = \frac{50}{5} = 10$

2.

x	6	8	10	12	14	
$\lvert x - \bar{x} \rvert$	4	2	0	2	4	
$\lvert x - \bar{x} \rvert^2$	16	4	0	4	16	= 40

Luego $s = \sqrt{\frac{40}{4}}$

Actividades

15. Las puntuaciones obtenidas por un grupo de estudiantes en un examen han sido las siguientes:

15, 20, 15, 18, 22, 13, 13, 16, 15, 19, 18, 15, 16, 20, 16, 15, 18, 16, 14, 13.

a. **Construye** la tabla de distribución de frecuencias.

b. **Calcula** las medidas de tendencia central de los datos.

c. **Halla** la desviación típica.

16. El número de estrellas de los hoteles de una ciudad viene dado por la siguiente serie:

3, 3, 4, 3, 4, 3, 5, 3, 4, 3, 3, 3, 2, 5, 3, 3, 3, 2, 3,5, 2, 3, 3, 3, 2, 5, 5, 2, 2, 3, 2, 1, 5, 1, 2, 2, 4, 5.

a. **Construye** la tabla de distribución de frecuencias.

b. **Halla** la calificación promedio de los hoteles según la cantidad de estrellas

c. **Calcula** la desviación típica.

221

Solucionario

1. Las puntuaciones obtenidas por un grupo de estudiantes en un examen han sido las siguientes:

15, 20, 15, 18, 22, 13, 13, 16, 15, 19, 18, 15, 16, 20, 16, 15, 18, 16, 14, 13.

a) Construye la tabla de distribución de frecuencias.

b) Calcula las medidas de tendencia central de los datos.

c) Halla la desviación típica.

2. El número de estrellas de los hoteles de una ciudad viene dado por la siguiente serie:

3, 3, 4, 3, 4, 3, 5, 3, 4, 3, 3, 3, 2, 5, 3, 3, 3, 2, 3,5, 2, 3, 3, 3, 2, 5, 5, 2, 2, 3, 2, 1, 5, 1, 2, 2, 4, 5.

2.1 Construir la tabla de distribución de frecuencias.

2.2 Halla la calificación promedio de los hoteles según la cantidad de estrellas

2.3 Calcula la desviación típica

1 b) $\bar{x}$=16.35, Me=16, Mo=15, c) s=1.97 2.2 $\bar{x}$=3,2 2.3 $\bar{}$=1,27

Página 226

Solucionario

ºLa siguiente tabla recoge el número de canastas en juego encestadas por dos jugadores de baloncesto en los diez últimos partidos.

— Calcula la media aritmética de canastas y la desviación típica para cada uno de los jugadores. ¿Cuál de ellos tiene un rendimiento más regular?

x¯A = 4,7, ¯_A = 1,79; x¯ B = 3,7, ¯_B = 0,78. Es más regular el jugador B.

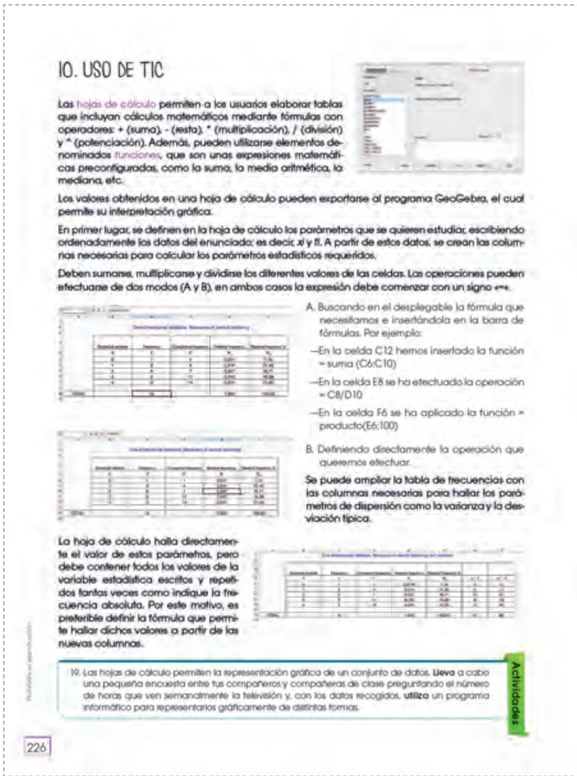
Las calificaciones obtenidas por un grupo de 40 alumnos en una prueba son las siguientes:

3,0; 5,5; 4,4; 6,0; 4,3; 7,2; 4,7; 6,5; 6,7; 4,0; 5,9; 5,8; 1,4; 3,2; 5,8; 4,6; 4,1; 3,5; 6,8; 5,0; 5,9; 2,1; 4,2; 4,5; 4,1; 4,8; 2,8; 4,7; 7,7; 6,0; 3,0; 5,7; 4,5; 4,9; 3,3; 4,8; 4,7; 5,2; 3,8 y 6,1.

a) Agrupa estos datos en intervalos de amplitud 1.

b) Si para superar la prueba se debía obtener como mínimo 5,2 puntos, ¿qué porcentaje de alumnos superó la prueba? b) 36%

Juagador A	5	3	6	7	3	2	8	4	4	5
Jugador B	4	4	4	2	5	4	3	4	4	3



10. USO DE TIC

Las hojas de cálculo permiten a los usuarios elaborar tablas que incluyan cálculos matemáticos mediante fórmulas con operadores: + (suma), - (resta), * (multiplicación), / (división) y ^ (potenciación). Además, pueden utilizarse elementos denominados funciones, que son unas expresiones matemáticas preconfiguradas, como la suma, la media aritmética, la mediana, etc.

Los valores obtenidos en una hoja de cálculo pueden exportarse al programa GeoGebra, el cual permite su interpretación gráfica.

En primer lugar, se definen en la hoja de cálculo los parámetros que se quieren estudiar, escribiendo ordenadamente los datos del enunciado; es decir, xi y fi. A partir de estos datos, se crean las columnas necesarias para calcular los parámetros estadísticos requeridos.

Deben sumarse, multiplicarse y dividirse los diferentes valores de las celdas. Las operaciones pueden efectuarse de dos modos (A y B), en ambos casos la expresión debe comenzar con un signo «=».

A. Buscando en el desplegable la fórmula que necesitamos e insertándola en la barra de fórmulas. Por ejemplo:

—En la celda C12 hemos insertado la función = suma (C6:C10)

—En la celda E8 se ha efectuado la operación = C8/D10

—En la celda F6 se ha aplicado la función = producto(E6:100)

B. Definiendo directamente la operación que queremos efectuar.

Se puede ampliar la tabla de frecuencias con las columnas necesarias para hallar los parámetros de dispersión como la varianza y la desviación típica.

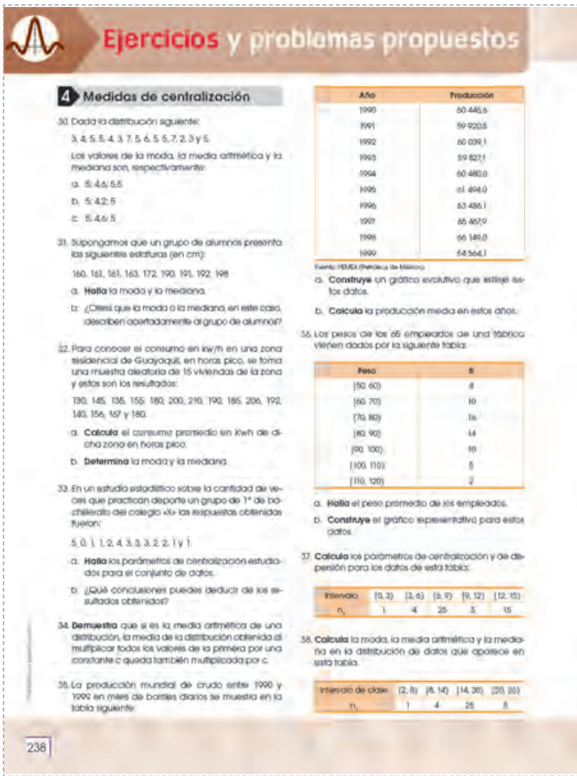
La hoja de cálculo halla directamente el valor de estos parámetros, pero debe contener todos los valores de la variable estadística escritos y repetidos tantas veces como indique la frecuencia absoluta. Por este motivo, es preferible definir la fórmula que permite hallar dichos valores a partir de las nuevas columnas.

Actividades

19. Las hojas de cálculo permiten la representación gráfica de un conjunto de datos. **Lleva** a cabo una pequeña encuesta entre tus compañeros y compañeras de clase preguntando el número de horas que ven semanalmente la televisión y, con los datos recogidos, **utiliza** un programa informático para representarlos gráficamente de distintas formas.

226

Página 238



Solucionario

31. Supongamos que un grupo de alumnos presenta las siguientes estaturas (en cm):

160, 161, 161, 163, 172, 190, 191, 192, 198

a. Halla la moda y la mediana.

b. ¿Crees que la moda o la mediana, en este caso, describen acertadamente al grupo de alumnos?

$\bar{x}$ =176,4, Me=172, Mo=161

Paraconocerelconsumoenkwhenuna zona residencial de Guayaquil, en horas pico, se toma una muestra aleatoria de 15 viviendas de la zona y estos son los resultados:

130, 145, 135, 155, 180, 200, 210, 190, 185, 206, 192, 140, 156, 167 y 180.

a. Calcula el consumo promedio en Kwh de dicha zona en horas pico

b. Determina la moda y la mediana

1. Mo= X; 2.a) $\bar{x}$ =171,4 b) Mo=180Me=180

En un estudio estadístico sobre la cantidad de veces que practican deporte un grupo de 1ro de bachillerato del colegio «X» las respuestas obtenidas fueron:

5, 0, 1, 1, 2, 4, 3, 3, 3, 2, 2, 1 y 1.

a) Halla los parámetros de centralización estudiados para el conjunto de datos.

b) ¿Qué conclusiones puedes deducir de los resultados obtenidos?

a) $\bar{x}$ =2,2, Me=2, Mo=1

Demuestra que si es la media aritmética de una distribución, la media de la distribución obtenida al multiplicar todos los valores de la primera por una constante c queda también multiplicada por c.

35. La producción mundial de crudo entre 1990 y 1999 en miles de barriles diarios se muestra en la tabla siguiente: ejerc. 35 pág.212 Modalidad de Human. y C. Sociales

Año	Producción
1990	60446,6
1991	59920,5
1992	60039,1
1993	59827,1
1994	60480,0
1995	61494,0
1996	63486,1
1997	65467,9
1998	66149,0
1999	64564,1

Solucionario

a) Construye un gráfico evolutivo que refleje estos datos.

b) Calcula la producción media en estos años.

b) 62187,4

Los pesos de los 65 empleados de una fábrica vienen dados por la siguiente tabla:

Peso	fi
(50,60)	8
(60,70)	10
(70,80)	16
(80,90)	14
(90,100)	10
(100,110)	5
(110, 120)	2

Halla el peso promedio de los empleados.

Construye el gráfico representativo para estos datos

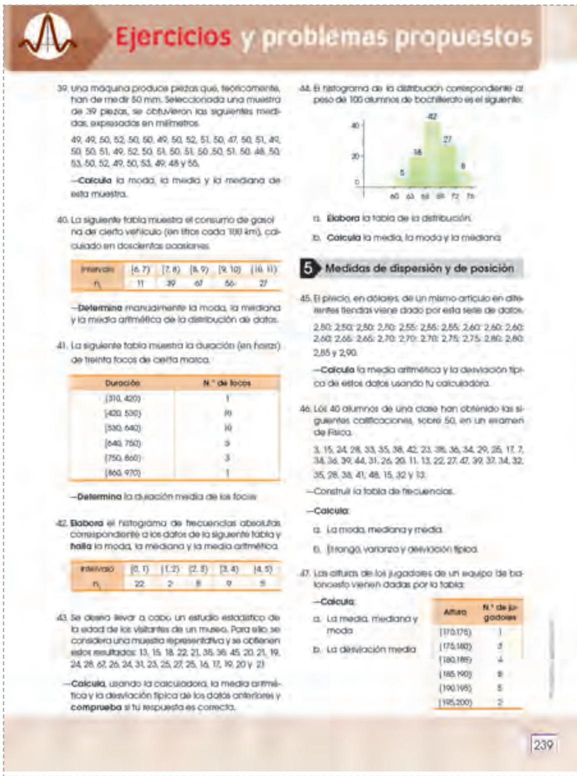
$\bar{x} = 79{,}8$

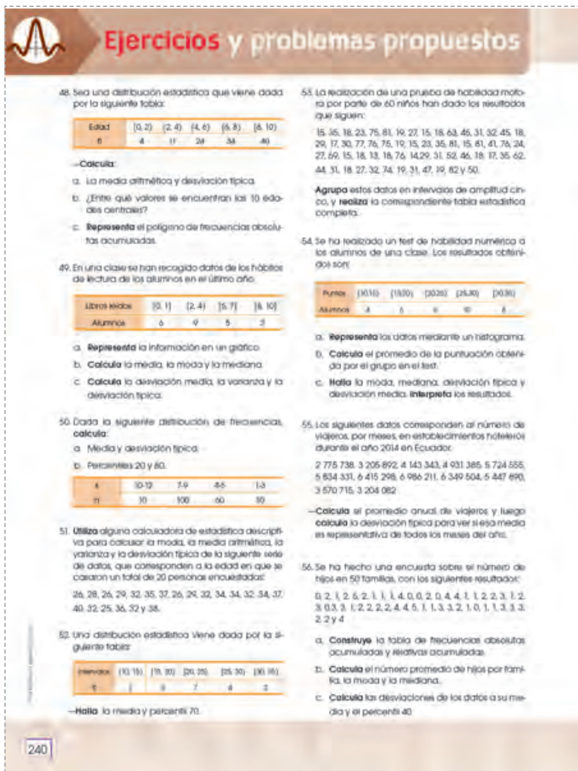
Una máquina produce piezas que, teóricamente, han de medir 50 mm. Seleccionada una muestra de 39 piezas, se obtuvieron las siguientes medidas, expresadas en milímetros.

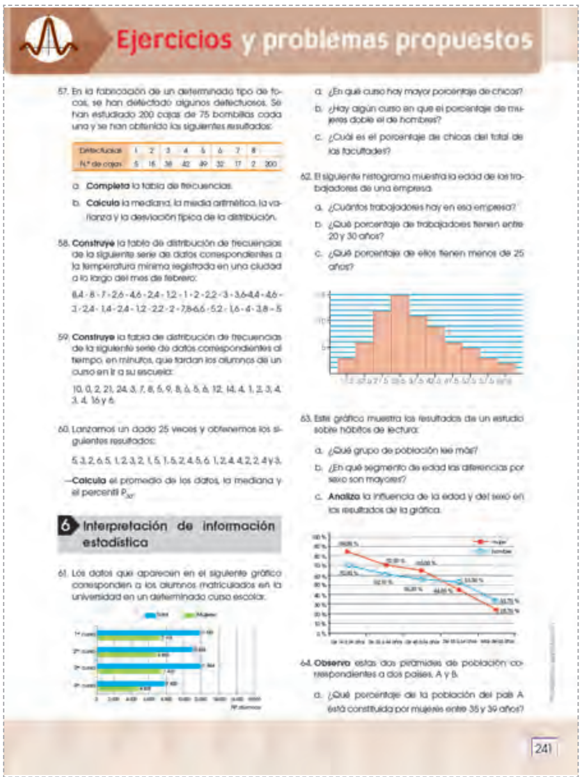
49, 49, 50, 52, 50, 50, 49, 50, 52, 51, 50, 47, 50, 51, 49, 50, 50, 51, 49, 52, 50, 51, 50, 51, 50 ,50, 51, 50, 48, 50, 53, 50, 52, 49, 50, 53, 49, 48 y 55.

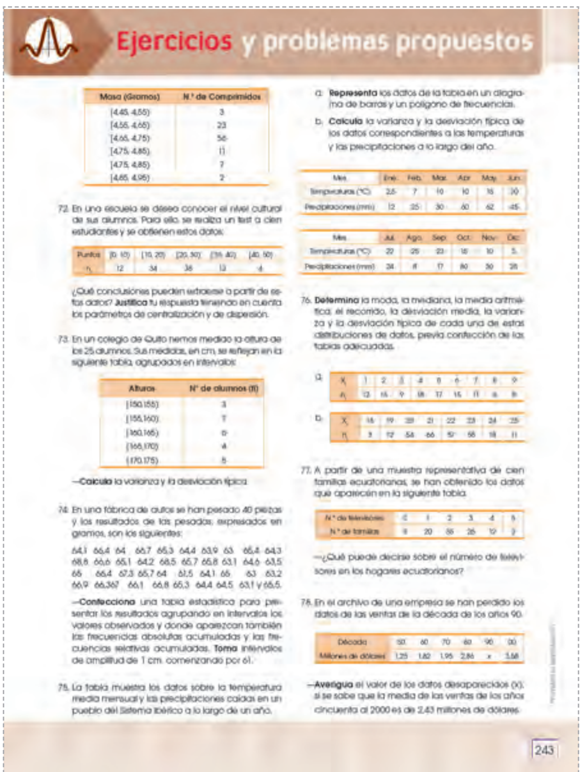
Calcula la moda, la media y la mediana de esta muestra.

La siguiente tabla muestra el consumo de gasolina de cierto vehículo (en litros cada 100 km), calculado en doscientas ocasiones.


Ejercicios y problemas propuestos
239


Ejercicios y problemas propuestos
240


Ejercicios y problemas propuestos
241


Ejercicios y problemas propuestos
243

Solucionario

Intervalo	(6, 7)	(7, 8)	(8, 9)	(9, 10)	(10, 11)
n_i	11	39	67	56	27

Determina manualmente la moda, la mediana y la media aritmética de la distribución de datos.

$\bar{x}$=8,74, Me=8,75; Mo=8,5

La siguiente tabla muestra la duración (en horas) de treinta bombillas de cierta marca.

Duración	Nº de Bombillas
(310, 420)	1
(420, 530)	10
(530, 640)	10
(640, 750)	5
(750, 860)	3
(860, 970)	1

Determina la duración media de las bombillas.

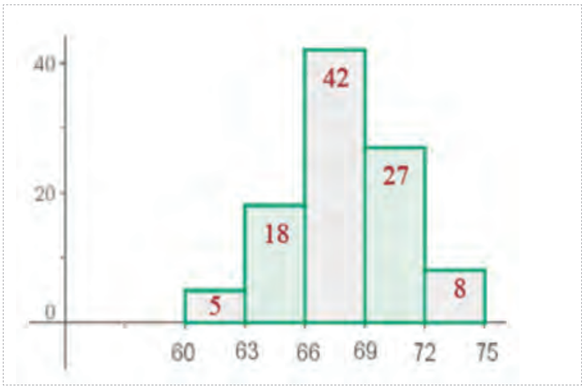
42. Elabora el histograma de frecuencias absolutas correspondiente a los datos de la siguiente tabla y halla la moda, la mediana y la media aritmética.

43. Se desea llevar a cabo un estudio estadístico de la edad de los visitantes de un museo. Para ello, se considera una muestra representativa y se obtienen estos resultados: 13, 15, 18, 22, 21, 35, 38, 45, 20, 21, 19, 24, 28, 67, 26, 24, 31, 23, 25, 27, 25, 16, 17, 19, 20 y 21.

— Calcula, usando la calculadora, la media aritmética y la desviación típica de los datos anteriores y comprueba si tu respuesta es correcta.

44. El histograma de la distribución correspondiente al peso de 100 alumnos de Bachillerato es el siguiente:

Solucionario



Elabora la tabla de la distribución.

Calcula la media, la moda y la mediana

$\bar{x}$ =67,95, Me= 67,93 Mo= 67,85

5. Medidas de dispersión y de posición

El precio, en dólares, de un mismo artículo en diferentes tiendas viene dado por esta serie de datos.

Ejercicios y problemas propuestos

87. Dadas las siguientes notas de Estadística correspondientes a 30 alumnos:

5.3 6.5 6 5 7.5 8 7 6.5 6 4.5

4.5 3.5 4 7 6.5 5 7 4.5 5 5.5

7.5 6.5 1 6 9.5 4 6 7.5 7 7.5

a. **Calcula** la distribución de frecuencias.

b. **Determina** el porcentaje de suspendidos.

c. **Calcula** el porcentaje de alumnos con nota entre 5 y 7.5 ambos inclusive.

d. ¿Qué nota mínima hay que sacar para superar al 90% de los alumnos?

88. La siguiente tabla muestra la distribución de edades de un grupo de jóvenes que participan en unas competencias deportivas.

Edades	[10,12)	[12,14)	[14,16)	[16,18)	[18,20)
Frecuencia	4	11	24	34	40

—**Calcula** la media, mediana y moda.

89. Los datos siguientes corresponden a las faltas a clases en un mes de un grupo de estudiantes de bachillerato de un colegio «X»:

2, 4, 3, 1, 1, 4, 3, 5, 0, 7, 0, 2, 8, 3, 8, 0, 2, 3, 8, 1, 9, 0, 6, 3, 8, 3, 1, 4, 2, 8, 0, 2, 0, 4, 3, 1, 1, 5, 1, 9, 1, 8, 3 y 1.

a. ¿Cuál es el promedio de faltas de los estudiantes de bachillerato en el colegio?

b. ¿Cuál es el valor que corresponde a la mediana, y los cuartiles 1 y 3?

c. **Interpreta** los resultados.

90. **Determina** la moda, mediana y el primer y segundo cuartil de los para los datos:

2, 4, 3, 0, 2, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 0, 1, 4, 0, 1, 3, 4, 0, 1, y 2.

91. Los datos siguientes representan la temperatura del fluido de descarga de una planta para el tratamiento de aguas negras durante varios días consecutivos.

43	47	51	48	52	50	46
49	45	52	46	51	44	49
46	51	49	45	44	50	48
50	49	50				

Calcula:

a. La distribución de frecuencias de los datos.

b. La media y la mediana.

c. La varianza y la desviación típica.

d. El percentil 5 y 95 de la temperatura.

e. Porcentaje de días en que la temperatura es superior a 45, pero menor a 50.

f. **Representa** gráficamente la distribución y **comenta** el gráfico obtenido.

92. El entrenador de un equipo de baloncesto duda entre seleccionar a Carmen o a Tania. Los puntos conseguidos por cada una, en una semana de entrenamiento, fueron estos:

1 8 2 3 2 2 2 4 1 9 2 5 1 6

1 8 2 6 1 8 2 8 2 2 1 7 1 8

a. ¿Cuál de las dos tiene mejor promedio?

b. **Calcula** la desviación típica.

c. ¿Cuál de las dos es más regular?

93. A una academia de baile en la ciudad de Manta asisten jóvenes de las siguientes edades:

14 16 16 19 17 17 15 17 17 15

19 15 15 16 17 14 15 16 17 16

16 15 16 18 14 15 14 17 13 18

16 16 16 16 17 15 17 14 16 16

18 18 16 18 17 17 17 17 15 16

a. **Construye** la tabla completa de frecuencias.

b. **Calcula** la moda.

c. **Determina** su media aritmética, varianza y desviación típica.

d. **Halla** el valor de la mediana, del percentil 29 y el cuartil 3.

94. En un grupo de 30 niños, se ha medido el peso, en kilogramos, de cada uno de ellos, obteniendo los siguientes resultados:

30	31	28	25	33	34	31
32	26	39	32	35	37	29
32	40	35	38	31	36	34
35	30	28	27	32	33	29
30	31					

245

2,50; 2,50; 2,50; 2,50; 2,55; 2,55; 2,55; 2,60; 2,60; 2,60; 2,60; 2,65; 2,65; 2,70; 2,70; 2,70; 2,75; 2,75; 2,80; 2,80; 2,85 y 2,90.

Calcula la media aritmética y la desviación típica de estos datos usando tu calculadora.

$\bar{x}$ = 2.6, σ=0,12

Los 40 alumnos de una clase han obtenido las siguientes puntuaciones, sobre 50, en un examen de Física.

3, 15, 24, 28, 33, 35, 38, 42, 23, 38, 36, 34, 29, 25, 17, 7, 34, 36, 39, 44, 31, 26, 20, 11, 13, 22, 27, 47, 39, 37, 34, 32, 35, 28, 38, 41, 48, 15, 32 y 13.

-Construir la tabla de frecuencias.

-Calcula:

a) La moda, mediana y media.

b) El rango, varianza y desviación típica.

Intervalo	[0, 1)	[1, 2)	[2, 3)	[3, 4)	[4, 5)
n_i	22	2	8	9	5

Solucionario

Las alturas de los jugadores de un equipo de baloncesto vienen dadas por la tabla:

Altura	No de jugadores
[170,175)	1
[175,180)	3
[180,185)	4
[185,190)	8
[190,195)	5
[195,200)	2

a. La media, mediana y moda

b. La desviación media

a. $\bar{x}$ =1,866, Me= 1,872, Mo= 187,5

48. Sea una distribución estadística que viene dada por la siguiente tabla:

Edad	[0, 2)	[2, 4)	[4, 6)	[6, 8)	[8,10)
f_i	4	11	24	34	40

Calcula:

La media aritmética y desviación típica.

¿Entre qué valores se encuentran las 10 edades centrales?

Representa el polígono de frecuencias absolutas acumuladas.

$\bar{x} = 6,2$; $\sigma = 2,18$

En una clase se han recogido datos de los hábitos de lectura de los alumnos en el último año.

Libros leídos	[0, 1)	[2, 4)	[5, 7)	[8, 10)
Alumnos	6	9	5	2

a) Representa la información en un gráfico.

b) Calcula la media, la moda y la mediana.

c) Calcula la desviación media, la varianza y la desviación típica.

$\bar{x}$ =3,55; Me= 3; Mo= 3; Dm= 2,11; var = 6,69; σ= 2,59;

50. Dada la siguiente distribución de frecuencias, calcula:

a) Media y desviación típica.

b) Percentiles 20 y 80.

x	n
10 -12	10
7 - 9	100
4 - 6	60
1 - 3	30

$= 6{,}35$; $s=2{,}41$; $P_{20}=4$; $P_{80}=8{,}6$

51. Utiliza alguna calculadora de estadística descriptiva para calcular la moda, la media aritmética, la varianza y la desviación típica de la siguiente serie de datos, que corresponden a la edad en que se casaron un total de 20 personas encuestadas:

26, 28, 26, 29, 32, 35, 37, 26, 29, 32, 34, 34, 32, 34, 37, 40, 32, 25, 36, 32 y 38.

52. Una distribución estadística viene dada por la siguiente tabla:

Intervalos	(10, 15)	(15, 20)	(20, 25)	(25, 30)	(30, 35)
fi	3	5	7	4	2

Halla la media y percentil 70

$\bar{x} = 21.3$; $P_{70} = 24.8$

La realización de una prueba de habilidad motora por parte de 60 niños han dado los resultados que siguen:

15, 35, 18, 23, 75, 81, 19, 27, 15, 18, 63, 45, 31, 32, 45, 18, 29, 17, 30, 77, 76, 75, 19, 15, 23, 35, 81, 15, 81, 41, 76, 24, 27, 69, 15, 18, 13, 18, 76, 14,29, 31, 52, 46, 18, 17, 35, 62, 44, 31, 18, 27, 32, 74, 19, 31, 47, 19, 82 y 50.

Agrupa estos datos en intervalos de amplitud cinco, realizando la correspondiente tabla estadística completa.

Se ha realizado un test de habilidad numérica a los alumnos de una clase. Los resultados obtenidos son:

Puntos	(10, 15)	(15, 20)	(20, 25)	(25, 30)	(30, 35)
Alumnos	4	6	6	10	8

Solucionario

a. Representa los datos mediante un histograma.

b. Calcula el promedio de la puntuación obtenida por el grupo en el test.

c. Halla la moda, mediana, desviación típica y desviación media. Interpreta los resultados.

55. Los siguientes datos corresponden al número de viajeros por meses, en establecimientos hoteleros durante el año 2014 en Ecuador.

    2 775 738, 3 205 892, 4 143 343, 4 931 385,

    5 724 555, 5 834 331, 6 415 298, 6 986 211,

    6 349 504, 5 447 890, 3 570 715, 3 204 082

    Calcula el promedio anual de viajeros y luego calcula la desviación típica para ver si esa media es representativa de todos los meses del año.

$\bar{x} = 4.882.412$ viajeros, $= 1.390.381$ viajeros.

58. Construye la tabla de distribución de frecuencias de la siguiente serie de datos correspondientes a la temperatura mínima registrada en una ciudad a lo largo del mes de febrero:

    8,4 - 8 - 7 - 2,6 - 4,6 - 2,4 - 1,2 - 1 - 2 - 2,2 - 3 - 3,6-4,4 - 4,6 - 3 - 2,4 - 1,4 - 2,4 - 1,2 - 2,2 - 2 - 7,8-6,6 - 5,2 - 1,6 - 4 - 3,8 – 5

59. Construye la tabla de distribución de frecuencias de la siguiente serie de datos correspondientes al tiempo, en minutos, que tardan los alumnos de un curso en ir a su escuela:

    10, 0, 2, 21, 24, 3, 7, 8, 5, 9, 8, 6, 5,6, 12, 14, 4, 1, 2, 3, 4, 3, 4, 16 y 6.

60. Lanzamos un dado 25 veces y obtenemos los siguientes resultados:

    5, 3, 2, 6, 5, 1, 2, 3, 2, 1, 5, 1, 5, 2, 4, 5, 6, 1, 2, 4, 4, 2, 2, 4 y 3.

-Calcula el promedio de los datos, la mediana y el percentil P30.

$\bar{x} = 3,2$, Me=3; $P_{30} = 2$

73. En un colegio de Quito hemos medido la altura de los 25 alumnos. Sus medidas, en cm, se reflejan en la siguiente tabla agrupados en intervalos:

Alturas	No de alumnos (fi)
(150, 155)	3
(155, 160))	7
(160, 165)	6
(165, 170)	4
(170, 175)	5

Solucionario

Calcula la varianza y la desviación típica.

varianza=42.95, σ=06.55

88. La siguiente tabla muestra la distribución de edades de un grupo de jóvenes que participan en unas competencias deportivas:

Alturas	No de alumnos (fi)
(10, 12)	4
(12, 14)	11
(14, 16)	24
(16, 18)	34
(18, 20)	40

Calcula la media, mediana y moda

$\bar{x}$ =15' 35, Me= 15' 3846; Mo=15'1765

Los datos siguientes corresponden a las faltas a clases en un mes de un grupo de estudiantes de bachillerato de un colegio «X»:

2, 4, 3, 1, 1, 4, 3, 5, 0, 7, 0, 2, 8, 3, 8, 0, 2, 2, 8, 1, 9, 0, 6, 3, 8, 3, 1, 4, 2, 8, 0, 2, 0, 4, 3, 1, 1, 5, 1, 9, 1, 8, 3 y 1.

¿Cuál es el promedio de faltas de los estudiantes de bachillerato en el colegio?

¿Cuál es el valor que corresponde a la mediana, y los cuartiles 1 y 3?

Interpreta los resultados.

$\bar{x}$ = 2,19

Determina la moda, mediana y el primer y segundo cuartil de los para los datos

2, 4, 3, 0, 2, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 0, 1, 4, 0, 1, 3, 4, 0, 1, y 2.

Mo = 1, Mediana = 1,5, Q1=1 y Q3=3

91 Los datos siguientes representan la temperatura del fluido de descarga de una planta para el tratamiento de aguas negras durante varios días consecutivos.

43	47	51	48	52	50	46	49	45	52	46	51	44
49	46	51	49	45	44	50	48	50	49	50		

Calcula:

La distribución de frecuencias de los datos.

Solucionario

La media y la mediana.

La varianza y la desviación típica.

El percentil 5 y 95 de la temperatura.

Porcentaje de días en que la temperatura es superior a 45 pero menor a 50.

Representa gráficamente la distribución y comenta el gráfico obtenido.

El entrenador de un equipo de baloncesto duda entre seleccionar a Carmen o a Tania. Los puntos conseguidos por cada una, en una semana de entrenamiento, fueron estos:

1 8 2 3 2 2 2 4 1 9 2 5 1

6 1 8 2 6 1 8 2 8 2 2 1 7 1 8

a) ¿Cuál de las dos tiene mejor promedio?

b) Calcula la desviación típica.

c) ¿Cuál de las dos es más regular?

93. A una academia de baile en la ciudad de Manta asisten jóvenes de las siguientes edades:

14 16 16 19 17 17 15 17 17 15

19 15 15 16 17 14 15 16 17 16

16 15 16 18 14 15 14 17 13 18

16 16 15 16 17 15 17 14 16 16

18 18 16 18 17 17 17 17 15 16

a) Construye la tabla completa de frecuencias.

b) Calcula la moda.

c) Determina su media aritmética, varianza y desviación típica.

d) Halla el valor de la mediana, del percentil 29 y el cuartil 3.

b) $\mathrm{Mo} = 16$; c) $\bar{x} = 16,12$; c) $s^2 = 1,79$; $s = 1,34$ d) $\mathrm{Me} = 16$; $P_{29} = 15$; $Q_3 = 17$

Solucionario

En la siguiente tabla aparece el peso (en gramos) de 100 comprimidos de un determinado medicamento.

a) Construye el histograma y el polígono de frecuencias.

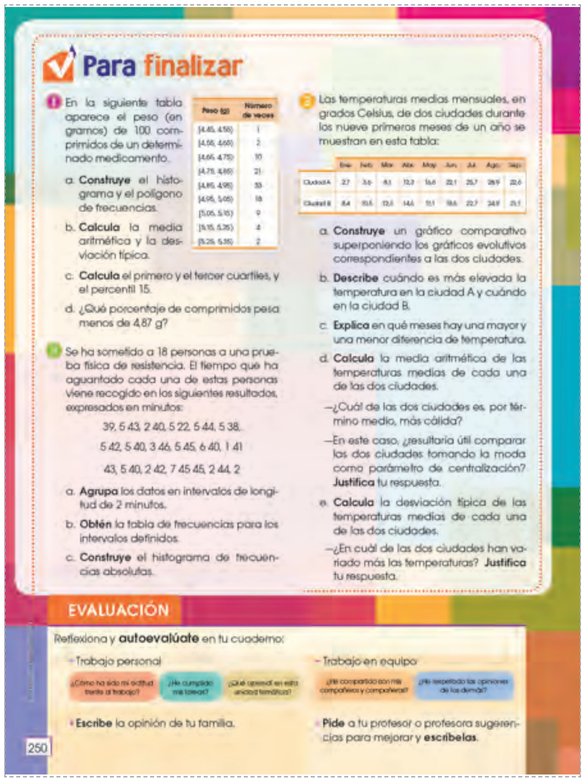
b) Calcula la media aritmética y la desviación típica.

Alturas	No de alumnos (fi)
(4,45, 4,55)	1
(4,55, 4,65)	2
(4,65, 4,75)	10
(4, 75, 4,85)	21
(4,85, 4,95)	33
(4,95, 5,05)	18
(5,05, 5,15)	9
(5,15, 5, 25)	4
(5, 25, 5,35)	2

c) Calcula el primero y el tercer cuartiles, y el percentil 15.

d) ¿Qué porcentaje de comprimidos pesa menos de 4,87 g?

b) $\bar{x} = 4{,}91$, $\sigma = 0{,}15$; c) $Q_1 = 4{,}81$, $Q_3 = 4{,}99$, $P_{15} = 4{,}76$; d) 40,6%



Para finalizar

1 En la siguiente tabla aparece el peso (en gramos) de 100 comprimidos de un determinado medicamento.

Peso (g)	Número de veces
[4,45, 4,55)	1
[4,55, 4,65)	2
[4,65, 4,75)	10
[4,75, 4,85)	21
[4,85, 4,95)	33
[4,95, 5,05)	18
[5,05, 5,15)	9
[5,15, 5,25)	4
[5,25, 5,35)	2

a. **Construye** el histograma y el polígono de frecuencias.

b. **Calcula** la media aritmética y la desviación típica.

c. **Calcula** el primero y el tercer cuartiles, y el percentil 15.

d. ¿Qué porcentaje de comprimidos pesa menos de 4,87 g?

2 Se ha sometido a 18 personas a una prueba física de resistencia. El tiempo que ha aguantado cada una de estas personas viene recogido en los siguientes resultados, expresados en minutos:

39, 5 43, 2 40, 5 22, 5 44, 5 38,

5 42, 5 40, 3 46, 5 45, 6 40, 1 41

43, 5 40, 2 42, 7 45 45, 2 44, 2

a. **Agrupa** los datos en intervalos de longitud de 2 minutos.

b. **Obtén** la tabla de frecuencias para los intervalos definidos.

c. **Construye** el histograma de frecuencias absolutas.

3 Las temperaturas medias mensuales, en grados Celsius, de dos ciudades durante los nueve primeros meses de un año se muestran en esta tabla:

	Ene.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ago.	Sep.
Ciudad A	2,7	3,6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	22,1	25,7	28,9	22,6
Ciudad B	8,4	10,5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	22,7	24,9	[illegible]

a. **Construye** un gráfico comparativo superponiendo los gráficos evolutivos correspondientes a las dos ciudades.

b. **Describe** cuándo es más elevada la temperatura en la ciudad A y cuándo en la ciudad B.

c. **Explica** en qué meses hay una mayor y una menor diferencia de temperatura.

d. **Calcula** la media aritmética de las temperaturas medias de cada una de las dos ciudades.

—¿Cuál de las dos ciudades es, por término medio, más cálida?

—En este caso, ¿resultaría útil comparar las dos ciudades tomando la moda como parámetro de centralización? **Justifica** tu respuesta.

e. **Calcula** la desviación típica de las temperaturas medias de cada una de las dos ciudades.

—¿En cuál de las dos ciudades han variado más las temperaturas? **Justifica** tu respuesta.

EVALUACIÓN

Reflexiona y **autoevalúate** en tu cuaderno:

- Trabajo personal

¿Cómo ha sido mi actitud frente al trabajo? ¿He cumplido mis tareas? ¿Qué aprendí en esta unidad temática?

- Trabajo en equipo

¿He compartido con mis compañeros y compañeras? ¿He respetado las opiniones de los demás?

- **Escribe** la opinión de tu familia.

- **Pide** a tu profesor o profesora sugerencias para mejorar y **escríbelas**.

250

Actividades Complementarias

1. Calcula los parámetros de centralización y de dispersión para los datos de esta tabla:

Intervalo	(0, 3)	(3, 6)	(6, 9)	(9, 12)	(12, 15)
n_i	1	4	25	5	15

$\bar{x} = 9,24$; Me=8,76, Mo=7,5; $\sigma 2 = 8,8$; $\sigma = 2,98$

2. Calcula la moda, la media aritmética y la mediana en la distribución de datos que aparece en esta tabla.

Intervalo	(2, 8)	(8, 14)	(14, 20)	(20, 26)
n_i	6	14	7	3

$\bar{x} = 12,4$, Me=11,9; Mo=11

Ejemplos de números factoriales

2! = 2 · 1 = 2
3! = 3 · 2 · 1 = 6
4! = 4 · 3 · 2 · 1 = 24
5! = 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 120
6! = 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 720
7! = 7 · 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 5 040
8! = 8 · 7 · 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 40 320

CALCULADORA

Las calculadoras científicas permiten obtener directamente el valor de un número factorial.

La tecla o combinación de teclas que se debe pulsar depende del modelo de calculadora. Generalmente, el factorial viene representado por los símbolos: **!** o ***x*!**

1. Números factoriales

Cuando efectuamos cálculos matemáticos frecuentemente aparecen productos del tipo:

3 · 2 · 1 5 · 4 · 3 · 2 · 1 8 · 7 · 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1

Si te fijas, los factores de estos productos son, respectivamente, los 3, 5 y 8 primeros números naturales.

Para abreviar la escritura de estos productos se utiliza el símbolo **!,** que se lee **factorial.** Así:

Producto	Escritura	Lectura
3 · 2 · 1	3!	3 factorial
5 · 4 · 3 · 2 · 1	5!	5 factorial
8 · 7 · 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1	8!	8 factorial

Los números naturales que se obtienen al efectuar estos productos se denominan **números factoriales.**

Dado cualquier número natural n, *mayor que 1, se llama* **n *factorial*** *(o* ***factorial de*** **n***), y se simboliza por* **n!,** *al número natural que se obtiene al efectuar el producto de los* n *primeros números naturales.*

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

2. Números combinatorios

Ciertos cocientes de números factoriales tienen gran importancia en matemáticas por su aplicación a la resolución de diversos problemas, como podrás comprobar a lo largo de esta unidad.

Observa los siguientes cocientes:

$$\frac{7!}{2!\cdot 5!} \qquad \frac{9!}{3!\cdot 6!} \qquad \frac{6!}{4!\cdot 2!}$$

Estos cocientes son del tipo $\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$, donde n y k son dos números naturales cualesquiera, tales que $k \le n$. Los representaremos simbólicamente del modo siguiente:

$$\binom{7}{2} \qquad \binom{9}{3} \qquad \binom{6}{4}$$

Y los leeremos 7 **sobre** 2, 9 **sobre** 3 y 6 **sobre** 4. Estos cocientes se denominan **números combinatorios** y su resultado es siempre un número natural.

Dados cualesquiera números naturales n *y* k, *tales que* k ≤ n, *se llama* ***número combinatorio*** **n** ***sobre*** **k**, *y se simboliza por* $\binom{n}{k}$, *al número natural que se obtiene al efectuar el cociente* $\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$.

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} = \frac{\boldsymbol{n!}}{\boldsymbol{k!\cdot(n-k)!}}$$

Así, por ejemplo:

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!\cdot(7-2)!} = \frac{7!}{2!\cdot 5!} = \frac{7\cdot \overset{3}{\cancel{6}}\,\cancel{5!}}{\cancel{2}\cdot\cancel{5!}} = 7\cdot 3 = 21$$

Como en el caso de los números factoriales, conviene extender la definición de número combinatorio al caso $k = 0$. Así:

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{0}} = \frac{n!}{0!\cdot(n-0)!} = \frac{\cancel{n!}}{1\cdot\cancel{n!}} = \mathbf{1}$$

CALCULADORA

Algunas calculadoras científicas permiten también obtener directamente el valor de un número combinatorio.

Como en el caso de los números factoriales, la tecla o combinación de teclas que se debe pulsar depende del modelo de calculadora.

— Consulta el manual de tu calculadora y obtén el valor de los siguientes números combinatorios:

$$\binom{7}{4} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{9}{3}$$

Cálculo de números combinatorios

En la práctica, se utiliza la siguiente expresión para el cálculo de números combinatorios:

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} = \frac{\overbrace{\boldsymbol{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}}^{k \text{ factores}}}{\boldsymbol{k!}}$$

Observa que esta expresión es la que se obtiene al simplificar la de la definición:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} =$$

$$= \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot\cancel{(n-k)!}}{k!\cdot\cancel{(n-k)!}}$$

Así, para calcular, por ejemplo, $\binom{8}{5}$ hacemos:

$$\binom{8}{5} = \frac{\overbrace{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}^{5 \text{ factores}}}{5!}$$