Bachillerat General Unificado

MATEMÁTICA

2.º Curso

GUÍA DEL DOCENTE

DISTRIBUCIÓN GRATUITA
PROHIBIDA SU VENTA

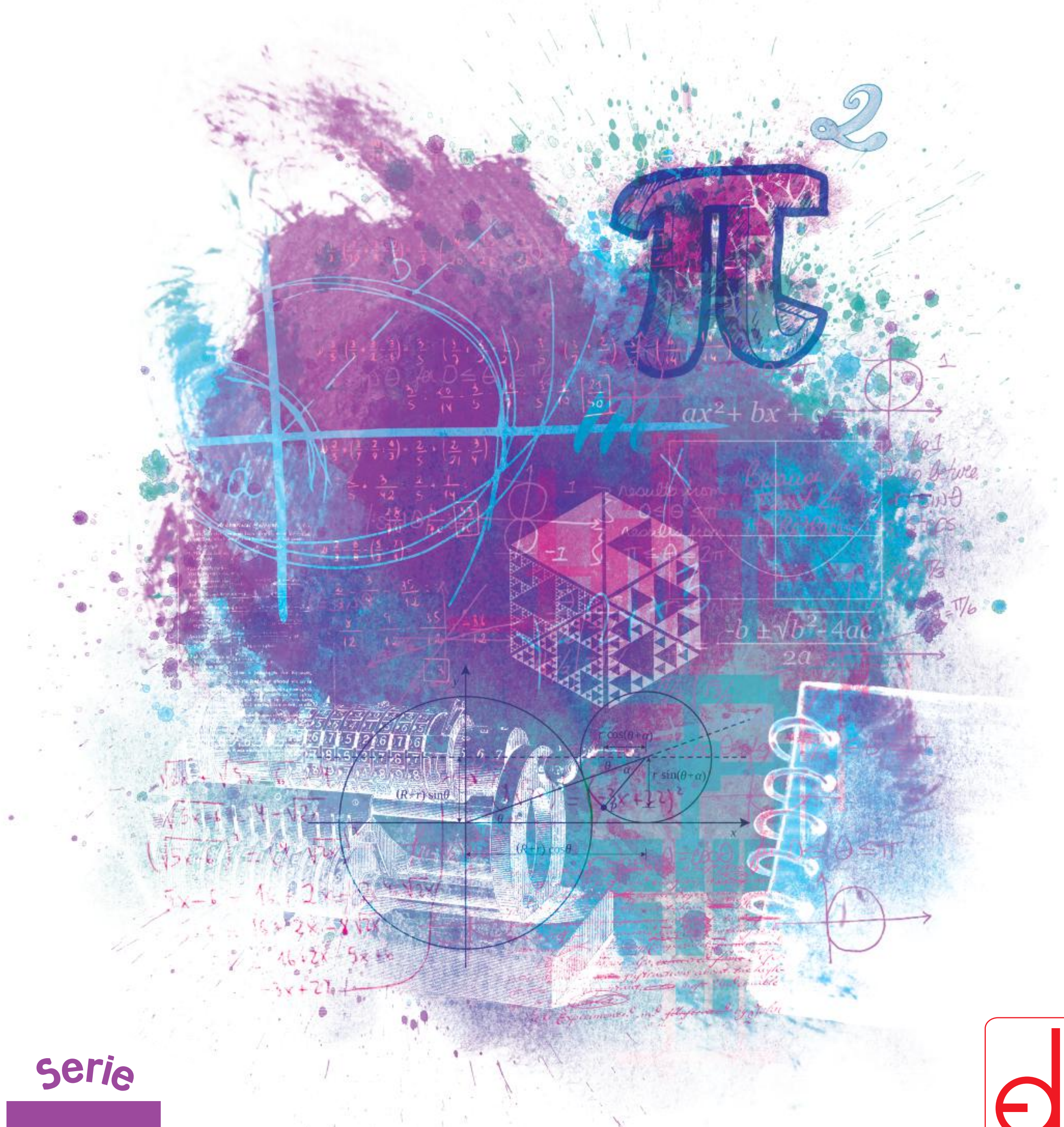
Ministerio de Educación

Transformar la educación
MISIÓN DE TODOS

Matemática

2 BGU

GUÍA DEL DOCENTE



Serie Ingenios

EDITORIAL DON BOSCO

edebé

PRESIDENTE DE LA REPÚBLICA
Rafael Correa Delgado

MINISTRO DE EDUCACIÓN
Augusto Espinosa Andrade

Viceministro de Educación
Freddy Peñafiel Larrea

Viceministro de Gestión Educativa
Wilson Rosalino Ortega Mafla

Subsecretario de Fundamentos Educativos (E)
Miguel Ángel Herrera Pavo

Subsecretaria de Administración Escolar
Mirian Maribel Guerrero Segovia

Directora Nacional de Currículo (S)
María Cristina Espinosa Salas

Directora Nacional de Operaciones y Logística
Ada Leonora Chamorro Vásquez

Ministerio de **Educación**

Editorial Don Bosco
OBRAS SALESIANAS DE COMUNICACIÓN

Marcelo Mejía Morales
Gerente general

Eder Acuña Reyes
Dirección editorial

Sylvia Freile Montero
Adaptación y edición de contenidos

Sylvia Freile Montero
Creación de contenidos nuevos

Luis Felipe Sánchez
Coordinación de estilo

Luis Felipe Sánchez
Revisión de estilo

Pamela Cueva Villavicencio
Coordinación gráfica

Pamela Cueva Villavicencio
Diagramación

Darwin Parra
Ilustración

Darwin Parra
Diseño de portada e ilustración

En alianza con

Grupo edebé
Proyecto: Matemáticas 1
Bachillerato primer curso

Antonio Garrido González
Dirección general

José Luis Gómez Cutillas
Dirección editorial

José Francisco Vílchez Román
Dirección de edición de Educación Secundaria

Santiago Centelles Cervera
Dirección pedagógica

Juan López Navarro
Dirección de producción

Equipo de edición Grupo edebé
© grupo edebé, 2008
Paseo San Juan Bosco, 62
08017 Barcelona
www.edebe.com

EDITORIAL DON BOSCO

ISBN 978-9942-23-049-2
Primera impresión: julio 2016
Este libro fue evaluado por la Universidad Tecnológica Equinoccial, y obtuvo la certificación curricular del Ministerio de Educación el el 30 de mayo de 2016.

ADVERTENCIA
Un objetivo manifiesto del Ministerio de Educación es combatir el sexismo y la discriminación de género en la sociedad ecuatoriana y promover, a través del sistema educativo, la equidad entre mujeres y hombres. Para alcanzar este objetivo, promovemos el uso de un lenguaje que no reproduzca esquemas sexistas, y de conformidad con esta práctica preferimos emplear en nuestros documentos oficiales palabras neutras, tales como las personas (en lugar de los hombres) o el profesorado (en lugar de los profesores), etc. Sólo en los casos en que tales expresiones no existan, se usará la forma masculina como genérica para hacer referencia tanto a las personas del sexo femenino como masculino. Esta práctica comunicativa, que es recomendada por la Real Academia Española en su Diccionario Panhispánico de Dudas, obedece a dos razones: (a) en español es posible <referirse a colectivos mixtos a través del género gramatical masculino>, y (b) es preferible aplicar <la ley lingüística de la economía expresiva> para así evitar el abultamiento gráfico y la consiguiente ilegibilidad que ocurriría en el caso de utilizar expresiones como las y los, os/as y otras fórmulas que buscan visibilizar la presencia de ambos sexos.

Ministerio de Educación

Este libro de texto que tienes en tus manos es una herramienta muy importante para que puedas desarrollar los aprendizajes de la mejor manera. Un libro de texto no debe ser la única fuente de investigación y de descubrimiento, pero siempre es un buen aliado que te permite descubrir por ti mismo la maravilla de aprender.

El Ministerio de Educación ha realizado un ajuste curricular que busca mejores oportunidades de aprendizaje para todos los estudiantes del país en el marco de un proyecto que propicia su desarrollo personal pleno y su integración en una sociedad guiada por los principios del Buen Vivir, la participación democrática y la convivencia armónica.

Para acompañar la puesta en marcha de este proyecto educativo, hemos preparado varios materiales acordes con la edad y los años de escolaridad. Los niños y niñas de primer grado recibirán un texto que integra cuentos y actividades apropiadas para su edad y que ayudarán a desarrollar el currículo integrador diseñado para este subnivel de la Educación General Básica. En adelante y hasta concluir el Bachillerato General Unificado, los estudiantes recibirán textos que contribuirán al desarrollo de los aprendizajes de las áreas de Ciencias Naturales, Ciencias Sociales, Lengua y Literatura, Matemática y Lengua Extranjera-Inglés.

Además, es importante que sepas que los docentes recibirán guías didácticas que les facilitarán enriquecer los procesos de enseñanza y aprendizaje a partir del contenido del texto de los estudiantes, permitiendo desarrollar los procesos de investigación y de aprendizaje más allá del aula.

Este material debe constituirse en un apoyo a procesos de enseñanza y aprendizaje que, para cumplir con su meta, han de ser guiados por los docentes y protagonizados por los estudiantes.

Esperamos que esta aventura del conocimiento sea un buen camino para alcanzar el Buen Vivir.

Ministerio de Educación

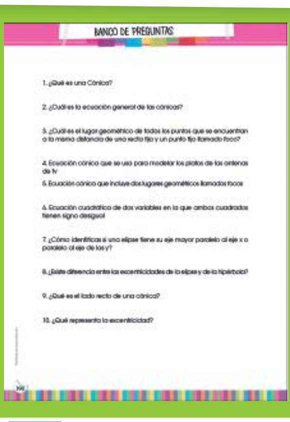
2016

CÓMO ES LA GUÍA. PROGRAMACIÓN Y ORIENTACIONES DE LAS UNIDADES DIDÁCTICAS

Conoce tu guía

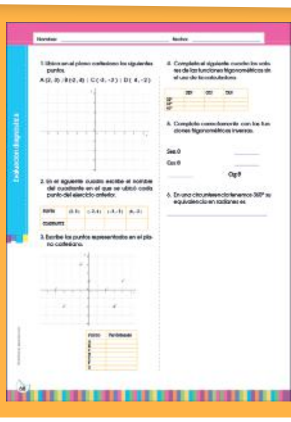
Unidad 0

Banco de preguntas


BANCO DE PREGUNTAS

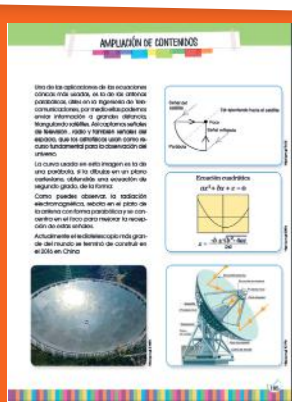
1. ¿Qué es una Cónica?
2. ¿Cuál es la ecuación general de las cónicas?
3. ¿Cuál es el lugar geométrico de todos los puntos que se encuentran a la misma distancia de una recta fija y un punto fijo llamado foco?
4. Ecuación cónica que se usa para modelar los platos de las antenas de tv
5. Ecuación cónica que incluye dos lugares geométricos llamados focos
6. Ecuación cuadrática de dos variables en la que ambos cuadrados tienen signo desigual
7. ¿Cómo identificas si una elipse tiene su eje mayor paralelo al eje x o paralelo al eje de las y?
8. ¿Existe diferencia entre las excentricidades de la elipse y de la hipérbola?
9. ¿Qué es el lado recto de una cónica?
10. ¿Qué representa la excentricidad?

Evaluación diagnóstica



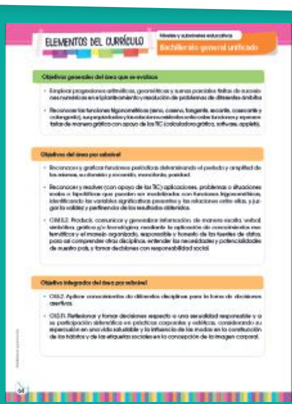
Recursos propios del área

Ampliación de contenidos



Recursos para fomentar el ingenio

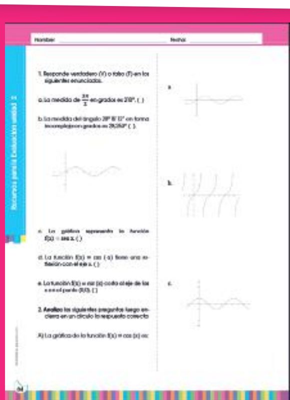
Elementos del currículo



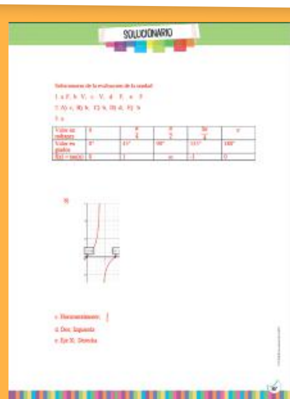
Trabajo inclusivo

Ciclo de aprendizaje

Recursos para la evaluación



Solucionarios



INGENIOS: El proyecto educativo de Editorial Don Bosco

La sociedad actual se enfrenta a nuevos retos que solo pueden superarse con educación, esfuerzo y talento personal y social.

INGENIOS es el proyecto de Editorial Don Bosco que promueve el desarrollo óptimo de los potenciales individuales de cada alumno, contribuye a mejorar la calidad de su educación y le permite afrontar con garantías de éxito los retos del futuro y alcanzar un mayor nivel de felicidad.

INGENIOS contempla las esencias del talento y los contextos del talento, contribuyendo a un modelo de escuela que potencia al máximo el desarrollo de la persona.

Las esencias del talento

Talento analítico y crítico

Aprender a pensar, utilizar rutinas de pensamiento, valorar el pensamiento... Toda una actitud ante la vida.

Talento creativo

Dejar aflorar la imaginación, la expresividad... en la resolución de problemas y retos.

Talento emprendedor

Iniciativa, imaginación, trabajo en equipo, comunicación, constancia... Persigue tus sueños.

Talento emocional

Talento que permite gestionar de manera eficaz las emociones y las hace fluir adecuadamente.

Talento social

Sensible a la justicia social para lograr un mundo mejor.

Talento cooperativo

Para aprender con y de los demás, y generar productos de valor.

Los contextos del talento

El desarrollo del talento se lleva a cabo en un contexto determinado, relacionado con un **modelo de escuela** y **de sociedad**:

1. **Un aprendizaje en un contexto práctico y funcional.** El proyecto INGENIOS integra el trabajo del desarrollo de las destrezas con criterios de desempeño y las inteligencias múltiples.
   - El aprendizaje se sitúa en contextos reales, próximos y significativos para los alumnos, mediante actividades prácticas y funcionales.
   - Las destrezas con criterios de desempeño se programan, se trabajan (actividades, tareas y proyectos) y se evalúan (rúbricas).
2. **Unas propuestas educativas abiertas al mundo.** Una gran parte del conocimiento se adquiere en contextos no formales, por ello nuestros libros están «abiertos al mundo» (aprendizaje 360º). Para ello:
   - Proponemos temas que despiertan el interés y la curiosidad y mueven a indagar y ampliar el conocimiento.
   - Invitamos al alumno a aprender fuera del aula.
3. **Un entorno innovador y tecnológico.** El proyecto INGENIOS ha adquirido un compromiso con la innovación y las nuevas tecnologías, avanzando en la Escuela del Siglo XXI. En ese sentido, los principales elementos de innovación son:
   - Cultura del pensamiento. Dar valor al pensar; enseñar a pensar.
   - Espíritu emprendedor. El emprendimiento es una oportunidad para desarrollar capacidades, y una necesidad social.
   - Compromiso TIC. La tecnología al servicio de la persona (humanismo tecnológico) en formatos amigables y compatibles.
4. **Un modelo de escuela integradora.** La **diversidad** de la sociedad tiene su reflejo en la escuela y una escuela para todos debe ofrecer respuestas a esa diversidad. Además, una mayor equidad contribuye a mejorar los resultados académicos. INGENIOS apuesta por el enfoque preventivo, y lo concreta en:
   - Itinerarios alternativos para acceder al conocimiento basados en las IM.
   - Adaptaciones curriculares y actividades multinivel.
5. **Una sociedad con valores.** La actual sociedad necesita personas con una sólida formación en valores para lograr una convivencia más positiva y afrontar los retos del futuro. INGENIOS se apoya en:
   - Valores universalmente aceptados, con un mensaje adaptado a la nueva realidad.
   - La adquisición de compromisos firmes en la mejora de la sociedad.

Programación y orientaciones de las unidades didácticas

En las aulas que han asumido la cultura del pensamiento se enseña a pensar; se deja tiempo para pensar y se valora el pensamiento. Un recurso privilegiado para promover la cultura del pensamiento en el aula lo constituyen las «rutinas del pensamiento», desarrolladas por los investigadores del «Project Zero» de la Universidad de Harvard.

Las rutinas son actividades pautadas según unos sencillos modelos que estimulan el pensamiento y favorecen la actividad reflexiva por parte de los alumnos, y además, hacen visibles los procesos de pensamiento, de manera que el alumno toma conciencia de su manera de pensar y de cómo piensan los demás.

Consideramos las rutinas que se han mostrado más eficaces, y las incorporamos en a continuación:

Círculo de puntos de vista

Desarrolla el «pensamiento de perspectiva», la capacidad para enfocar una situa- ción desde distintos puntos de vista.

Ante una imagen (cuadro, fotografía...) o un texto, se pide a cada uno de los alumnos que dé su versión de lo que está pasando, situándose en el punto de vista de uno de los personajes que apareccen.

Al poner en común los distintos puntos de vista se obtiene una visión mucho más rica de la si- tuación. Se adquiere el hábito (la rutina) de con- siderar diferentes puntos de vista al abordar un tema.

Palabra-Idea-Frase

Utilizar el pensamiento para comprender, para investigar y llegar al fondo de un texto.

De forma individual, los alumnos eligen una palabra, una idea y una frase que les ha- yan resultado llamativas en un texto, o que expresen mejor su contenido.

Tras la puesta en común, los alumnos pueden llegar a alcanzar niveles de comprensión muy profundos, a los que difícilmente accederían de forma individual. Además, aprenden a pensar de manera más eficaz.

Veo, pienso, me pregunto

Desarrollar la curiosidad, la capacidad de exploración y la creatividad. Mirar la vida, la realidad, el arte, etc., de manera inteligente. Ante una imagen o un texto, individualmente, el alumnado responde a esas tres demandas: anota lo que ve (sin interpretar), las ideas que le sugiere aquello, y las preguntas que le vienen a la mente. La puesta en común, en la que cada uno justifica su percepción, evidencia las distintas percepciones de un mismo objeto o realidad; todo un aprendizaje.

CSI: Color, Símbolo, Imagen

Asumir el reto de captar la esencia de un texto, esa es la meta de la comprensión. Esta rutina lo pone más fácil.

Tras la lectura, los alumnos, de forma individual, seleccionan las tres ideas que les parecen más importantes. Representan una con un color, otra mediante un símbolo y la última con una imagen. En la puesta en común se manifiesta la inteligencia artística y la capacidad de comunicación no verbal.

Pienso, me interesa, investigo

Esta rutina permite conectar con el conocimiento previo sobre un tema y ampliarlo a traves de la búsqueda de información. Puede utilizarse al comienzo de un tema y como antecedente de una propuesta de investigación.

Se expone el tema a tratar y se deja a los alumnos un tiempo para reflexionar sobre ello. A continuación se les pide que respondan a:

- Pienso: ¿Qué sabes sobre este asunto?
- Me interesa: ¿Qué preguntas o qué aspecto de este tema despierta tu interés?
- Investigo: ¿Qué te gustaría estudiar sobre este tema? ¿Cómo podrías hacerlo?

Principio, medio, final

Una misma imagen cambia su significado dependiendo de si forma parte del princi- pio de una historia, del nudo o del desenlace. Lo mismo ocurre con un pequeño texto referido a una historia. Esta rutina potencia la creatividad y la imaginación.

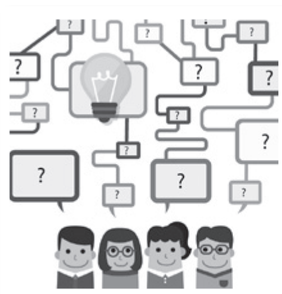
Ante una imagen o un texto, cada uno de los alumnos debe construir una historia diferente, según pertenezca al inicio, al nudo o al final. La puesta en común acostumbra a ser una auténtica fiesta creativa.

Diez veces dos (observar y describir)

Hacer observaciones detalladas sobre un objeto o una imagen y expresarlas mediante palabras o frases.

Se observa la imagen durante 30 segundos. Se deja viajar a los ojos. Se elabora una lista de diez palabras o frases sobre la ima- gen. Se pone en común. Finalmente se repiten los pasos anteriores y se añaden diez nuevas palabras.

Preguntas creativas



Para ampliar y profundizar el pensamiento del alumnado, activar su curiosidad y motivarlo a investigar.

Se propone a los alumnos que formulen preguntas sobre el tema que se está trabajando (como si de tratase de una «lluvia de ideas»).

Se seleccionan las que se consideran más interesantes; se elige una y se abre un diálogo sobre ella.

De esta manera, el alumno reflexiona y se plantea preguntas que le van a proporcionar nuevas ideas.

Colores, formas y líneas

En ocasiones resulta difícil analizar una situación o expresar un mensaje con palabras. Esta rutina permite hacerlo utilizando colores, líneas o formas geométricas.

En primer lugar se pide a los alumnos que reconozcan los colores, las formas y las líneas existentes en una imagen o en una situación; o qué colores, formas y líneas emplearían para describir esa situación.

En la puesta en común se comprueba la creatividad y el poder expresivo de esta rutina.

Titulares (Headlines)

Funciona igual que un titular de periódico, y ayuda a los alumnos a capturar la esencia de un texto, una clase, un debate, una exposición...

Al final de una discusión en el aula, de una sesión de trabajo... se propone a los alumnos que escriban el titular que mejor exprese la esencia de lo que se ha estado trabajando en clase. Durante la puesta en común se crea una lista de «titulares».

Al final, el profesor pegunta: ¿Cómo ha cambiado tu titular a partir de la puesta en común? ¿En qué difiere del que habías propuesto?

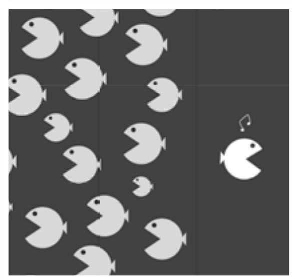
3 - 2 - 1 - Puente

Esta rutina se basa en es- tablecer un «puente» entre el nuevo aprendizaje y los conocimientos previos que tenga el alumno.

Pasos para su aplicación:

1. Los alumnos escriben 3 ideas, 2 preguntas y 1 metáfora o analogía sobre el tema que se trabaja.
2. Se realizan las actividades de aprendizaje programadas (lecturas, vídeos...).
3. Finalizada la actividad, los alumnos completan de nuevo el primer paso: apuntan 3 ideas, 2 preguntas, 1 metáfora.
4. En parejas, comparten su pensamiento inicial y su nuevo pensamiento, explicando cómo y por qué se ha producido el cambio. Esto ayuda a encontrar aspectos interesantes en la idea del otro y a justificar por qué ha seleccionado esas ideas o preguntas (esto es, a hacer visible su pensamiento). A continuación se comparte con el resto de la clase, creándose un ambiente de reflexión, de respeto y confianza que mejora el clima escolar.

El semáforo (Pensamiento crítico)

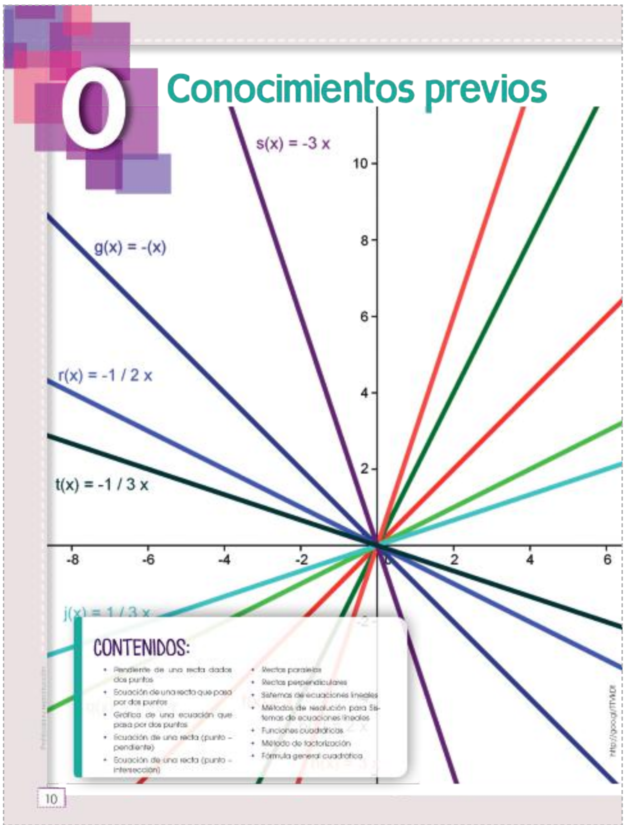


Ayuda a detectar señales de duda sobre la veracidad en los medios de comunicación.

Los estudiantes analizan un editorial, una noticia, un discurso... y detectan «luces rojas o amarillas» en aquellos puntos en los que aprecian señales de duda (afirmaciones sin argumentos, generalizaciones demasiado amplias, interés propio manifiesto, argumentos unilaterales...).

Se elabora una lista de los puntos rojos y ama- rillos y se señalan «zonas de peligro» en el texto analizado. Finalmente, se reflexiona sobre lo aprendido.

Página 10



Orientación didáctica

- En esta unidad se hace un recuento de conocimientos previos relacionados con la función lineal y cuadrática, su representación y forma en el plano cartesiano, los elementos que la caracterizan así como su interpretación.

  En importante que el estudiante reconozca las particularidades de cada función y sus diferencias para lograr la comprensión del resto de las funciones tratadas en el texto.

  También constituye de gran utilidad enlazar los conocimientos previos del estudiante con los nuevos conocimientos que va a adquirir y el docente debe ser un orientador y un facilitador para ello. Puede utilizar una lluvia de ideas para identificar dominios y fortalezas y a continuación plantearle al alumnado nuevos retos que lo lleven a descubrir y a construir por si solo nuevos conocimientos.

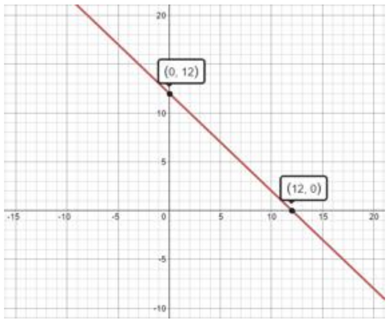
  La utilización de la tecnología es una herramienta fundamental que nos ayudaría a comprender con mayor claridad el comportamiento de la función lineal y cuadrática, su desplazamiento en los ejes coordenados y su interpretación. Se sugiere que el docente se apoye en el programa DESMOS para cumplir tal propósito, le explique a sus estudiantes y muestre cómo funciona esta herramienta fomentando así el gusto por las matemáticas.

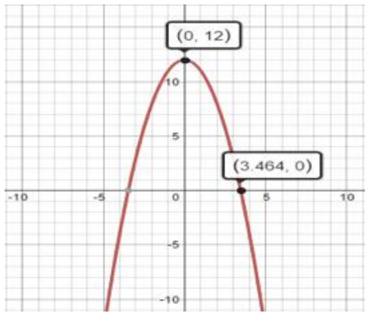
  Otra sugerencia es relacionar este tema con muchos fenómenos que ocurren en la vida real para explicar y analizar su comportamiento, como por ejemplo en la rama de la medicina, de la economía, de la ingeniería. De esta forma el estudiante comprende la utilidad de lo que el docente le transmite.

Actividades complementarias

Ejercicios para calculadora graficadora.

1. Grafique las ecuaciones $y = 12 - x$ y $y = 12 - x^2$. Haga los ajustes necesarios para que en la gráfica se vean la ordenada y la abscisa al origen. Regule el intervalo (RANGE) y la escala para poder leer esas coordenadas. Compruebe sustituyendo en las ecuaciones las coordenadas de las intersecciones.





Si $x = 0$ entonces, $y=12-0$; $y=12$

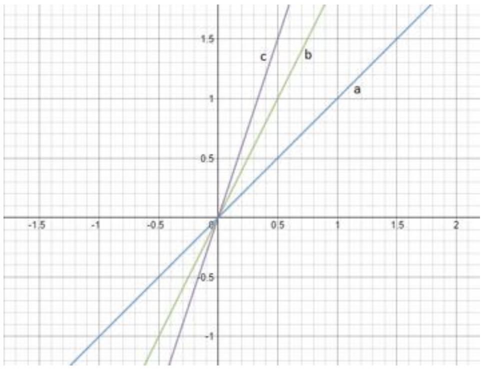
Si $y = 0$ entonces, $0=12-x$; $x=12$

Si $x = 0$ entonces, $y = 12 - 0^2$; $y = 12$

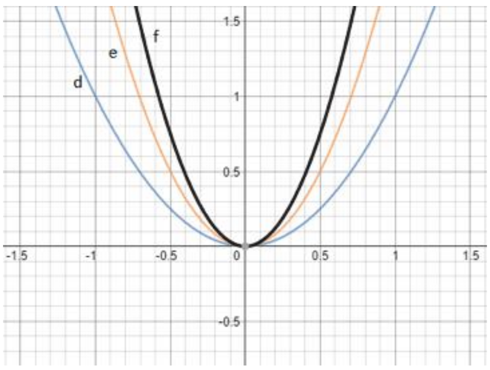
Si $y = 0$ entonces, $0 = 12 - x^2$; $x = 3{,}464$

2. Grafique las siguientes ecuaciones en el mismo plano cartesiano. ¿Cómo se relaciona la ecuación a, b, c, con la pendiente de su recta? ¿Cómo se relaciona la ecuación d, e, f con sus gráficas?

a. $y = x$ b. $y = 2x$ c. $y = 3x$ d. $y = x^2$ e. $y = 2x^2$ f. $y = 3x^2$

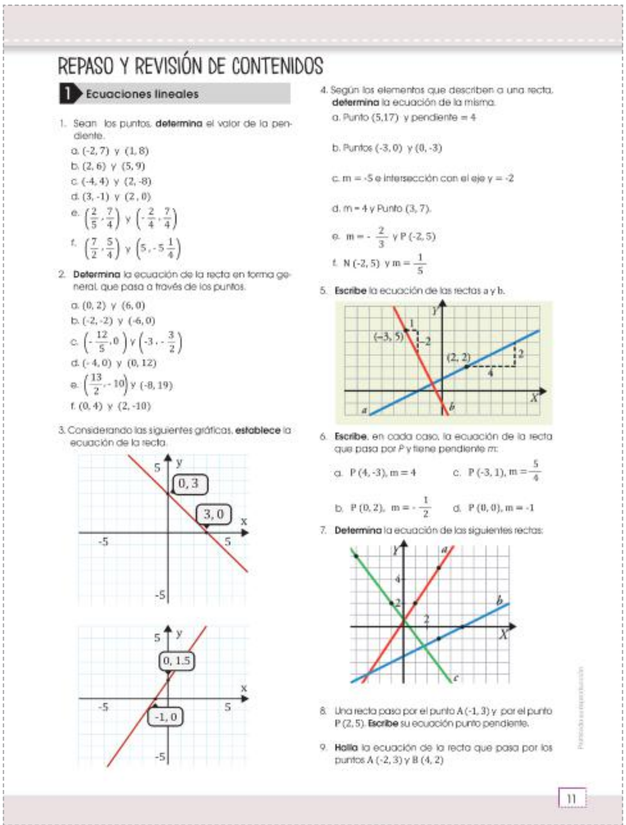


En las rectas a, b, c en la medida que aumenta la pendiente en la ecuación, gráficamente la recta se observa más inclinada



En las ecuaciones d, e, f en la medida que aumenta el coeficiente cuadrático, la gráfica se cierra paulatinamente.

Página 11



REPASO Y REVISIÓN DE CONTENIDOS

1 Ecuaciones lineales

1. Sean los puntos, **determina** el valor de la pendiente.
   a. (-2, 7) y (1, 8)
   b. (2, 6) y (5, 9)
   c. (-4, 4) y (2, -8)
   d. (3, -1) y (2, 0)
   e. $\left(\frac{2}{5}, \frac{7}{4}\right)$ y $\left(-\frac{2}{4}, \frac{7}{4}\right)$
   f. $\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{4}\right)$ y $\left(5, -5\frac{1}{4}\right)$
2. **Determina** la ecuación de la recta en forma general, que pasa a través de los puntos.
   a. (0, 2) y (6, 0)
   b. (-2, -2) y (-6, 0)
   c. $\left(-\frac{12}{5}, 0\right)$ y $\left(-3, -\frac{3}{2}\right)$
   d. (-4, 0) y (0, 12)
   e. $\left(\frac{13}{2}, -10\right)$ y (-8, 19)
   f. (0, 4) y (2, -10)
3. Considerando las siguientes gráficas, **establece** la ecuación de la recta.
4. Según los elementos que describen a una recta, **determina** la ecuación de la misma.
   a. Punto (5,17) y pendiente = 4
   b. Puntos (-3, 0) y (0, -3)
   c. m = -5 e intersección con el eje y = -2
   d. m = 4 y Punto (3, 7).
   e. $m = -\frac{2}{3}$ y P (-2, 5)
   f. N (-2, 5) y $m = \frac{1}{5}$
5. **Escribe** la ecuación de las rectas a y b.
6. **Escribe**, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por P y tiene pendiente m:
   a. P (4, -3), m = 4
   b. P (0, 2), $m = -\frac{1}{2}$
   c. P (-3, 1), $m = \frac{5}{4}$
   d. P (0, 0), m = -1
7. **Determina** la ecuación de las siguientes rectas:
8. Una recta pasa por el punto A (-1, 3) y por el punto P (2, 5). **Escribe** su ecuación punto pendiente.
9. **Halla** la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (-2, 3) y B (4, 2)

11

Solucionario

1. a. $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{8-7}{1-(-2)} = \frac{1}{3}$

b. $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{9-6}{5-2} = \frac{3}{3} = 1$

c. $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-8-4}{2+4} = \frac{-12}{6} = -2$

d. $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{0-(-1)}{2-3} = \frac{1}{-1} = -1$

e. $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{\frac{7}{4}-\frac{7}{4}}{-\frac{2}{4}-\frac{2}{5}} = 0$

f. $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-\frac{21}{4}-\frac{5}{4}}{5-\frac{7}{2}} = \frac{-\frac{26}{4}}{\frac{3}{2}} = -\frac{13}{3}$

2. a. $m = \frac{0-6}{6-0} = \frac{-6}{6} = -1$

reemplazando un punto en la ecuación $y = mx + b$ y la pendiente m, se obtiene

$2 = (-1)0 + b \rightarrow b = 2$

$y = -x + 2 \rightarrow x + y - 2 = 0$

$m = \frac{0-(-2)}{-6-(-2)} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$

reemplazando un punto en la ecuación $y = mx + b$ y la pendiente m, se obtiene

$0 = \left(-\frac{1}{2}\right)(-6) + b \rightarrow b = -3$

$x + 2y + 6 = 0$

c. $m = \frac{5}{2}$, *entonces* $-5x + 2y + 12 = 0$

d. $m = 3$, *entonces* $-3x + y - 12 = 0$

e. $m = -2$, *entonces* $2x + y - 3 = 0$

f. $m = -7$, *entonces* $7x + y - 4 = 0$

3. a. $m = \frac{0-3}{3-0} = -\frac{3}{3} = -1$, *entonces* $x + y = 3$

b. $m = \frac{0-3/2}{-1-0} = \frac{3}{2}$, *entonces* $-3x + 2y = 3$

4. a. $m = 4$, *entonces* $4x - y - 3 = 0$

b. $m = -1$, *entonces* $x + y + 3 = 0$

c. $m = -5$, *entonces* $5x + y + 2 = 0$

d. $m = 4$, *entonces* $4x - y - 5 = 0$

e. $m = -\frac{2}{3}$, *entonces* $2x + 3y - 11 = 0$

f. $m = \frac{1}{5}$, *entonces* $x - 5y + 27 = 0$

5. a. recta a: $x - 2y = -2$

b. recta b: $2x + y = -1$

6. a. $-4x + y = -19$, b) $x + 2y = 4$ c) $-5x + 4y = 19$, d) $y = -x$

7. recta a: $-3x + 2y = 1$

recta b: $-x + 2y = -5$

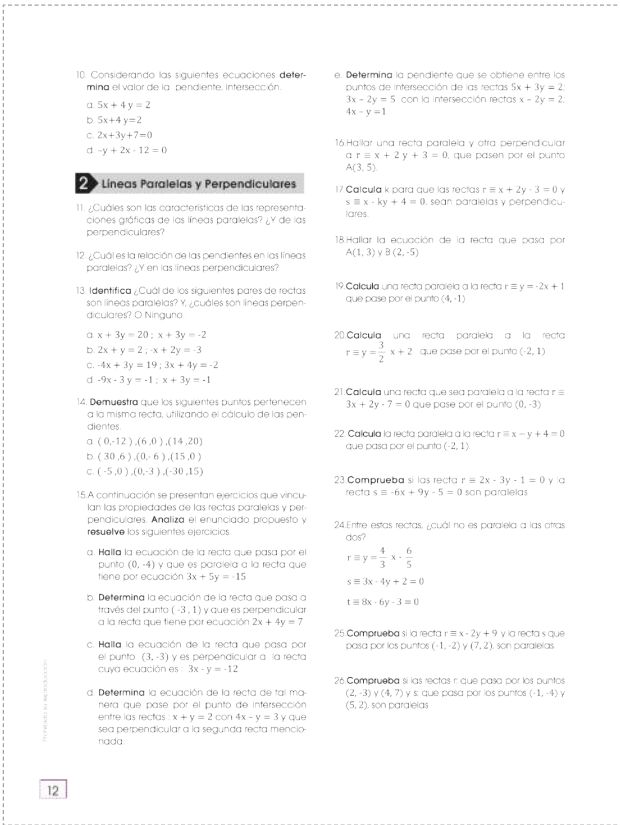
recta c: $4x + 3y = 2$

8. $m = \frac{2}{3}$, $-2x + 3y - 11 = 0$

9. $m = -\frac{1}{6}$, $x + 6y - 16 = 0$

Solucionario

Página 12


10. Considerando las siguientes ecuaciones **determina** el valor de la pendiente, intersección.

a. $5x + 4y = 2$
b. $5x+4y=2$
c. $2x+3y+7=0$
d. $-y + 2x - 12 = 0$

2 Líneas Paralelas y Perpendiculares

11. ¿Cuáles son las características de las representaciones gráficas de las líneas paralelas? ¿Y de las perpendiculares?

12. ¿Cuál es la relación de las pendientes en las líneas paralelas? ¿Y en las líneas perpendiculares?

13. **Identifica** ¿Cuál de los siguientes pares de rectas son líneas paralelas? Y, ¿cuáles son líneas perpendiculares? O Ninguno.

a. $x + 3y = 20$; $x + 3y = -2$
b. $2x + y = 2$; $-x + 2y = -3$
c. $-4x + 3y = 19$; $3x + 4y = -2$
d. $-9x - 3y = -1$; $x + 3y = -1$

14. **Demuestra** que los siguientes puntos pertenecen a la misma recta, utilizando el cálculo de las pendientes.

a. $(0,-12)$, $(6,0)$, $(14,20)$
b. $(30,6)$, $(0,-6)$, $(15,0)$
c. $(-5,0)$, $(0,-3)$, $(-30,15)$

15. A continuación se presentan ejercicios que vinculan las propiedades de las rectas paralelas y perpendiculares. **Analiza** el enunciado propuesto y **resuelve** los siguientes ejercicios.

a. **Halla** la ecuación de la recta que pasa por el punto $(0, -4)$ y que es paralela a la recta que tiene por ecuación $3x + 5y = -15$
b. **Determina** la ecuación de la recta que pasa a través del punto $(-3, 1)$ y que es perpendicular a la recta que tiene por ecuación $2x + 4y = 7$
c. **Halla** la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3, -3)$ y es perpendicular a la recta cuya ecuación es: $3x - y = -12$
d. **Determina** la ecuación de la recta de tal manera que pase por el punto de intersección entre las rectas: $x + y = 2$ con $4x - y = 3$ y que sea perpendicular a la segunda recta mencionada.
e. **Determina** la pendiente que se obtiene entre los puntos de intersección de las rectas $5x + 3y = 2$; $3x - 2y = 5$ con la intersección rectas $x - 2y = 2$; $4x - y = 1$.

16. Hallar una recta paralela y otra perpendicular a $r \equiv x + 2y + 3 = 0$, que pasen por el punto $A(3, 5)$.

17. **Calcula** k para que las rectas $r \equiv x + 2y - 3 = 0$ y $s \equiv x - ky + 4 = 0$, sean paralelas y perpendiculares.

18. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $A(1, 3)$ y $B(2, -5)$

19. **Calcula** una recta paralela a la recta $r \equiv y = -2x + 1$ que pase por el punto $(4, -1)$

20. **Calcula** una recta paralela a la recta $r \equiv y = \frac{3}{2}x + 2$ que pase por el punto $(-2, 1)$

21. **Calcula** una recta que sea paralela a la recta $r \equiv 3x + 2y - 7 = 0$ que pase por el punto $(0, -3)$

22. **Calcula** la recta paralela a la recta $r \equiv x - y + 4 = 0$ que pasa por el punto $(-2, 1)$.

23. **Comprueba** si las recta $r \equiv 2x - 3y - 1 = 0$ y la recta $s \equiv -6x + 9y - 5 = 0$ son paralelas

24. Entre estas rectas, ¿cuál no es paralela a las otras dos?

$r \equiv y = \frac{4}{3}x - \frac{6}{5}$

$s \equiv 3x - 4y + 2 = 0$

$t \equiv 8x - 6y - 3 = 0$

25. **Comprueba** si la recta $r \equiv x - 2y + 9$ y la recta s que pasa por los puntos $(-1, -2)$ y $(7, 2)$, son paralelas.

26. **Comprueba** si las rectas r: que pasa por los puntos $(2, -3)$ y $(4, 7)$ y s: que pasa por los puntos $(-1, -4)$ y $(5, 2)$, son paralelas

Prohibida su reproducción

12

10. a. $m = -\frac{5}{4}$

Intersección eje x: $\left(\frac{2}{5}, 0\right)$

Intersección eje y: $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

b. $m = \frac{5}{4}$

Intersección eje x: $\left(\frac{2}{5}, 0\right)$

Intersección eje y: $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

c. $m = -\frac{2}{3}$

Intersección eje x: $\left(-\frac{7}{2}, 0\right)$

Intersección eje y: $\left(0, -\frac{7}{3}\right)$

d. $m = 2$

Intersección eje x: $(6,0)$

Intersección eje y: $\left(0, -\frac{7}{3}\right)$

11. Las líneas paralelas nunca se cortan y las líneas perpendiculares se cortan en un punto formando un ángulo de 90°.

12. Líneas paralelas tienen igual pendiente, es decir, $m_1 = \frac{1}{m_1}$

Líneas perpendiculares tienen pendientes inversas y opuestas, es decir, $m_1 = -\frac{1}{m_2}$

13. a. paralelas
b. perpendiculares
c. perpendiculares
d. ninguno

14. a. No pertenecen
b. Si pertenecen
c. Si pertenecen

15. a. $3x+5y = -20$
b. $-2x+y=7$
c. $x+3y=-6$
d. $-4x+y=-3$
e. $y=-1$

16. Rectas paralelas: $x+2y=1$

Rectas perpendiculares: $-2x+y=-1$

17. Paralelas:

$m_1 = -\frac{1}{2}$ y $m_2 = \frac{1}{k}$

$-\frac{1}{2} = \frac{1}{k}$ despejando $k = -2$ $\qquad -3x + 2y - 8 = -2$

Perpendiculares:

$m_1 = -\frac{1}{2}$ y $m_2 = \frac{1}{k}$ $\qquad -\frac{1}{2} \times \frac{1}{k} = -1$

despejando $k = \frac{1}{2}$

18. $m = \frac{-5-3}{2-1} -8$, entonces

$8x + y - 7 = 0$

19. $m = -2$ y $(4, -1)$, entonces

$2x + y - 7 = 0$

20. $m = \frac{3}{2}$ y $(-2, -1)$, entonces

21. $m = -\frac{3}{2}$ y $(0, -3)$, entonces $\qquad 3x + 2y + 6 = 0$

22. $-x + y - 3 = 0$

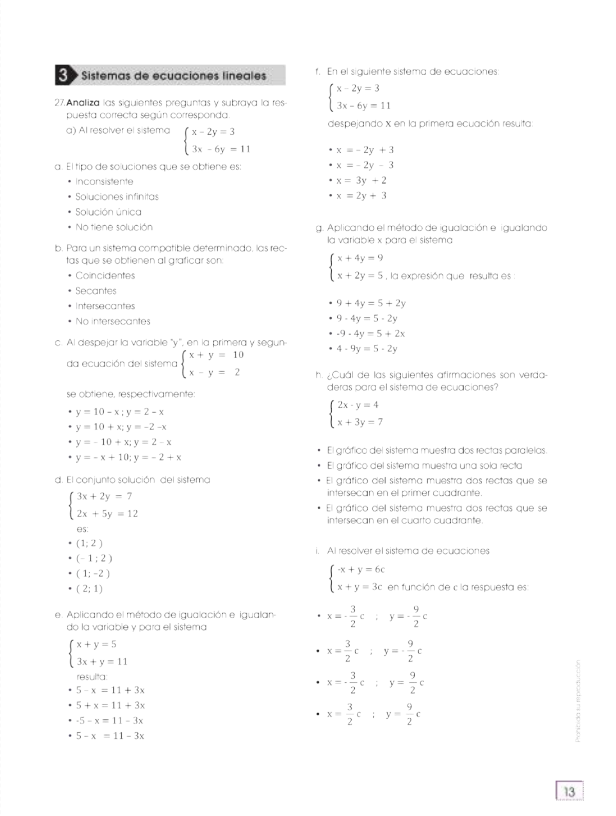
23. Paralelas

24. La recta s

25. Paralelas

26. No paralelas

Página 13



3 Sistemas de ecuaciones lineales

27. **Analiza** las siguientes preguntas y subraya la respuesta correcta según corresponda.

a) Al resolver el sistema $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 6y = 11 \end{cases}$

a. El tipo de soluciones que se obtiene es:
- Inconsistente
- Soluciones infinitas
- Solución única
- No tiene solución

b. Para un sistema compatible determinado, las rectas que se obtienen al graficar son:
- Coincidentes
- Secantes
- Intersecantes
- No intersecantes

c. Al despejar la variable "y", en la primera y segunda ecuación del sistema $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$

se obtiene, respectivamente:
- $y = 10 - x \,;\, y = 2 - x$
- $y = 10 + x;\ y = -2 - x$
- $y = -10 + x;\ y = 2 - x$
- $y = -x + 10;\ y = -2 + x$

d. El conjunto solución del sistema

$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 2x + 5y = 12 \end{cases}$

es:
- $(1; 2)$
- $(-1; 2)$
- $(1; -2)$
- $(2; 1)$

e. Aplicando el método de igualación e igualando la variable y para el sistema

$\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x + y = 11 \end{cases}$

resulta:
- $5 - x = 11 + 3x$
- $5 + x = 11 + 3x$
- $-5 - x = 11 - 3x$
- $5 - x = 11 - 3x$

f. En el siguiente sistema de ecuaciones:

$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 6y = 11 \end{cases}$

despejando x en la primera ecuación resulta:
- $x = -2y + 3$
- $x = -2y - 3$
- $x = 3y + 2$
- $x = 2y + 3$

g. Aplicando el método de igualación e igualando la variable x para el sistema

$\begin{cases} x + 4y = 9 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$, la expresión que resulta es :
- $9 + 4y = 5 + 2y$
- $9 - 4y = 5 - 2y$
- $-9 - 4y = 5 + 2x$
- $4 - 9y = 5 - 2y$

h. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones son verdaderas para el sistema de ecuaciones?

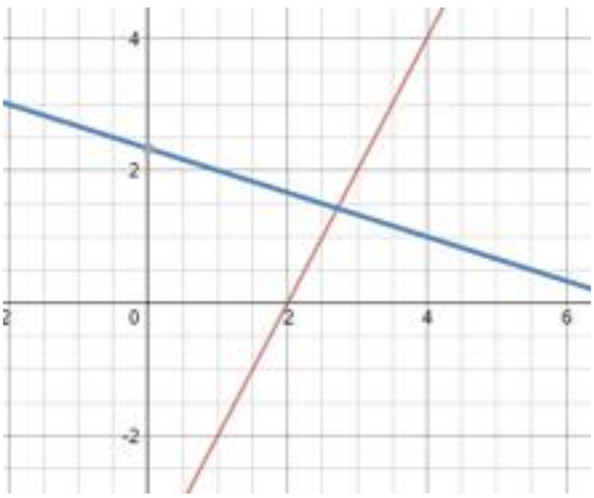
$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$

- El gráfico del sistema muestra dos rectas paralelas.
- El gráfico del sistema muestra una sola recta
- El gráfico del sistema muestra dos rectas que se intersecan en el primer cuadrante.
- El gráfico del sistema muestra dos rectas que se intersecan en el cuarto cuadrante.

i. Al resolver el sistema de ecuaciones

$\begin{cases} -x + y = 6c \\ x + y = 3c \end{cases}$ en función de c la respuesta es:
- $x = -\frac{3}{2}c \quad ; \quad y = -\frac{9}{2}c$
- $x = \frac{3}{2}c \quad ; \quad y = -\frac{9}{2}c$
- $x = -\frac{3}{2}c \quad ; \quad y = \frac{9}{2}c$
- $x = \frac{3}{2}c \quad ; \quad y = \frac{9}{2}c$

13



el gráfico muestra dos rectas que
se intersecan en el primer cuadrante

Solucionario

27. a. ① $x = 3 + 2y$

② $x = \dfrac{11 + 6y}{3}$

① = ②

$3 + 2y = \dfrac{11 + 6y}{3}$

$9 + 6y = 11 + 6y$

$6y - 6y = 11 - 9$

$0 \neq 2$

b. Intersecantes

c. $y = -x + 10 \,;\, y = -2 + x$

d. ① $x = \dfrac{7 - 2}{3}$

② $x = \dfrac{12 - 5y}{2}$

① = ② $\dfrac{7 - 2y}{3} = \dfrac{12 - 5y}{2}$

$14 - 4y = 36 - 15y$

$15y - 4y = 36 - 14$

$11y = 22$

$y = 2$

$x = \dfrac{7 - 2(2)}{3} = \dfrac{7 - 4}{3}$

$x = \dfrac{3}{3} \quad x = 1$

El conjunto solución es (1,2)

e. ① $y = 5 - x$

② $y = 11 - 3xh)$

Por lo tanto queda:

$5 - x = 11 - 3x$

f. $x = 2y + 3$

g. ① $x = 9 - 4y$

② $x = 5 - 2y$

① = ②

$9 - 4y = 5 - 2y$

② $y = 3c - x$

① = ② se obtiene

$6c + x = 3c - x$ despejando x

$2x = -3c \qquad x = -\dfrac{3}{2}c$

reemplazando x en ①, queda

$y = 6c - \dfrac{3}{2}c \qquad y = \dfrac{9}{2}c$

entonces,

$x = -\dfrac{3}{2}c, \quad y = \dfrac{9}{2}c,$ se obtiene

Solucionario

Página 14

27. a. (1) $x = \dfrac{-1 - 3y}{2}$

(2) $x = -\dfrac{4y}{3}$

(1) = (2) tenemos,

$\dfrac{-1 - 3y}{2} = -\dfrac{4y}{3}$ despejamos y

$-3 - 9y = -8y$

$-9y + 8y = 3$

$-y = 3$

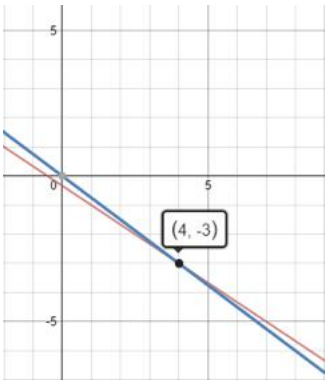
$y = -3$

Reemplazamos y en la (2)

$x = \dfrac{4(-3)}{3}$ $\quad x = 4$

Solución, $x = 4, y = -3$

Gráficamente,



b. (1) $x = y + 2$

(2) $x = 3y + 2$

(1) = (2) tenemos,

$y + 2 = 3y + 2$, despejamos y

$y - 3y = 2 - 2$

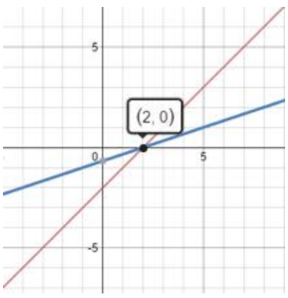
$-2y = 0, \ \ y = 0$

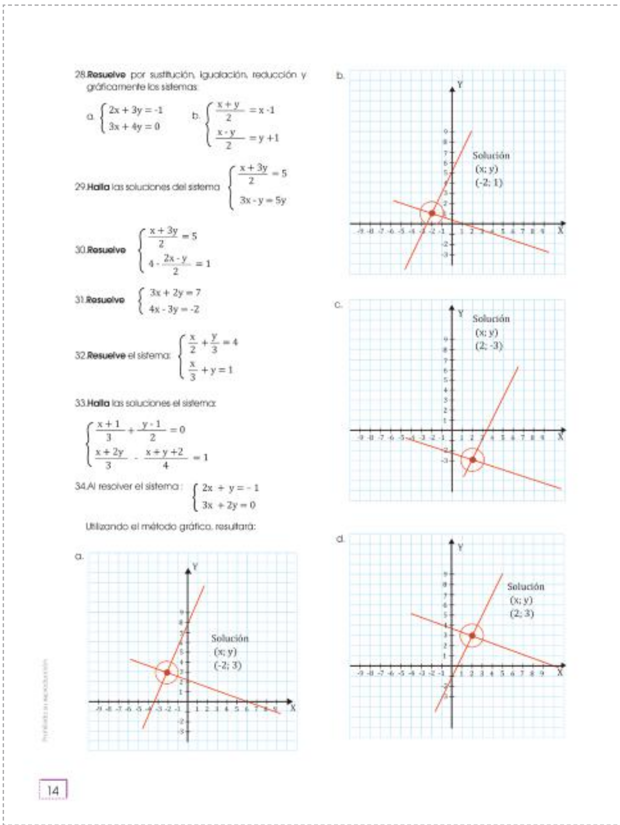
Reemplazamos en (1)

$x = 0 + 2, \ \ x = 2$

Solución, $x = 2, y = 0$

Gráficamente,





28. **Resuelve** por sustitución, igualación, reducción y gráficamente los sistemas

a. $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$ b. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} = x - 1 \\ \dfrac{x-y}{2} = y + 1 \end{cases}$

29. **Halla** las soluciones del sistema $\begin{cases} \dfrac{x+3y}{2} = 5 \\ 3x - y = 5y \end{cases}$

30. **Resuelve** $\begin{cases} \dfrac{x+3y}{2} = 5 \\ 4 - \dfrac{2x-y}{2} = 1 \end{cases}$

31. **Resuelve** $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x - 3y = -2 \end{cases}$

32. **Resuelve** el sistema: $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 4 \\ \dfrac{x}{3} + y = 1 \end{cases}$

33. **Halla** las soluciones el sistema:

$\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} + \dfrac{y-1}{2} = 0 \\ \dfrac{x+2y}{3} - \dfrac{x+y+2}{4} = 1 \end{cases}$

34. Al resolver el sistema: $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$

Utilizando el método gráfico, resultará:

a. Solución (x; y) (-2; 3)

b. Solución (x; y) (-2; 1)

c. Solución (x; y) (2; -3)

d. Solución (x; y) (2; 3)

14

29. (1) $x = 10 - 3y$

(2) $\quad x = 2y$

(1) = (2) tenemos,

$10 - 3y = 2y$ despejamos y

$5y = 10$

$y = 2$, reemplazamos en la (2)

$x = 2(2), x = 4$ $\qquad$ Solución, $x = 4, y = 2$

30. (1) $y = 2x - 6$ $\quad$ (2) $y = \dfrac{10 - x}{3}$

(1) = (2) tenemos,

$2x - 6 = \dfrac{10 - x}{3}$, despejamos x

$6x - 18 = 10 - x$

$6x + x = 10 + 18$

$7x = 28, x = 4$ reemplazamos en (1)

$y = 2(4) - 6, \ \ y = 8 - 6, \ \ y = 2$ $\qquad$ Solución, $x = 4, \ y = 2$

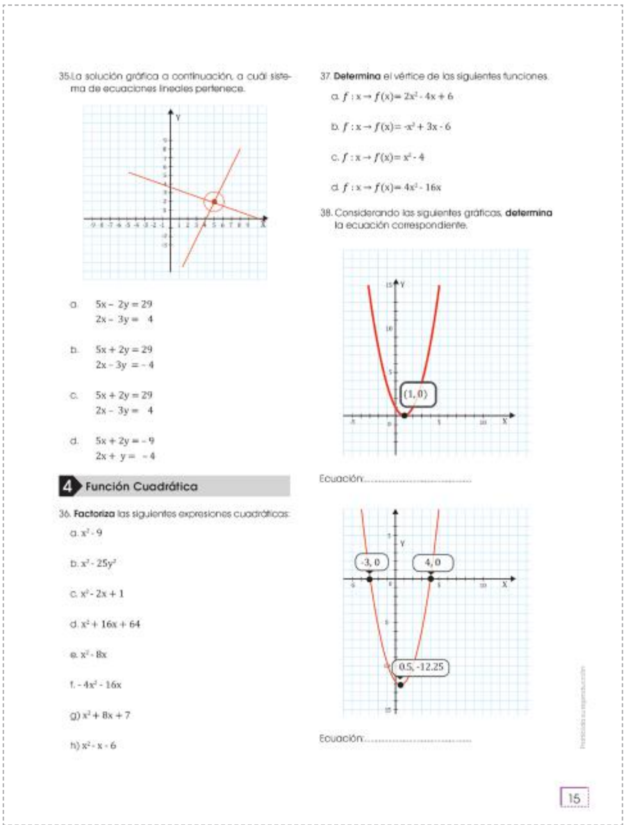
31. Solución, $x = 1, y = 2$

32. Solución, $x = \dfrac{66}{7}, y = -\dfrac{15}{7}$

33. Solución, $x = -7, y = 5$

34. Solución, literal a.

Página 15



35. La solución gráfica a continuación, a cuál sistema de ecuaciones lineales pertenece.

a. 5x – 2y = 29; 2x – 3y = 4
b. 5x + 2y = 29; 2x – 3y = – 4
c. 5x + 2y = 29; 2x – 3y = 4
d. 5x + 2y = – 9; 2x + y = – 4

4 Función Cuadrática

36. Factoriza las siguientes expresiones cuadráticas:
a. x² - 9
b. x² - 25y²
c. x² - 2x + 1
d. x² + 16x + 64
e. x² - 8x
f. - 4x² - 16x
g) x² + 8x + 7
h) x² - x - 6

37. Determina el vértice de las siguientes funciones.
a. f : x → f(x)= 2x² - 4x + 6
b. f : x → f(x)= -x² + 3x - 6
c. f : x → f(x)= x² - 4
d. f : x → f(x)= 4x² - 16x

38. Considerando las siguientes gráficas, determina la ecuación correspondiente.

Ecuación:...............................

Ecuación:...............................

15

Solucionario

35. a. ① $x = \dfrac{29 - 2y}{5}$

② $x = \dfrac{3y + \frac{5}{4}}{2}$

① = ② tenemos,

$$\frac{29 - 2y}{5} = \frac{3y + 4}{2}$$

$58 - 4y = 15y + 20$
$19y = 38, \ y = 2$
Reemplazando en ②

$$x = \frac{3(2) + 4}{2} = \frac{10}{2}, \ x = 5$$

Solución, $x = 5, y = 2$. Literal c

36. a. $(x - 3)(x + 3)$
b. $(x - 5y)(x + 5y)$
c. $(x - 1)^2$
d. $(x + 8)^2$
e. $x(x - 8)$
f. $-4x(x + 4)$
g. $(x + 7)(x + 1)$
h. $(x - 3)(x + 2)$

37. a. $a = 2, b = -4$, entonces

$V\left(-\dfrac{b}{2a}, y\right)$, reemplazando

$$V\left(-\frac{-4}{2(2)}, y\right), V\left(\frac{4}{4}, y\right), V(1, y)$$

Sustituyendo x en la función f(x),

$f(1) = 2(1)^2 - 4(1) + 6$

$f(1) = 4$, por tanto $V(1,4)$

b. $a = -1, b = 3$, entonces

$V\left(-\dfrac{b}{2a}, y\right)$, reemplazando

$$V\left(-\frac{3}{2(-1)}, y\right), V\left(-\frac{3}{-2}, y\right), V\left(\frac{3}{2}, y\right)$$

Sustituyendo x en la función f(x),

$f(3/2) = -(3/2)^2 + 3(3/2) - 6$

$f(3/2) = -\dfrac{15}{4}$, Por tanto $V\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{15}{4}\right)$

c. $a = 1, b = 0$, entonces $V\left(-\dfrac{b}{2a}, y\right)$, reemplazando

$V\left(-\dfrac{0}{2(1)}, y\right), V\left(\dfrac{0}{2}, y\right), V(0, y)$. Sustituyendo x en la función f(x), $f(0) = (0)^2 - 4$, $f(0) = -4$, por tanto $V(0,-4)$.

d. $a = 4, b = -16$, entonces $V\left(-\dfrac{b}{2a}, y\right)$, reemplazando

$$V\left(-\frac{-4}{2(2)}, y\right), V\left(-\frac{-16}{8}, y\right), V(2, y)$$

Sustituyendo x en la función f(x), $f(2) = 4(2)^2 - 16(2)$, $f(2) = -16$, por tanto $V(2,-16)$.

38. $(x - 1)(x - 1) = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$
Ecuación, $x^2 - 2x + 1$

39. $x_1 = -3$ y $x_2 = 4$ por tanto los factores son $(x + 3)(x - 4) = x_2 - x - 12$. Ecuación, $x^2 - x - 12$.

Nombre: ____________________ Fecha: ____________

1. **Selecciona** la respuesta correcta en cada caso.

La recta paralela a la línea $2x - 3y = 5$ que pasa por el punto $(-8, 4)$ tiene la ecuación:

a. $y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$ b. $y = -\frac{2}{3}x + \frac{28}{3}$ c. $y = -\frac{3}{2}x + 16$ d. $y = -\frac{3}{2}x - 8$

2. ¿Cuál de las siguientes es la ecuación de la recta que pasa por el punto (2, –3) y es paralela al eje Y?

a. $x = 2$ b. $y = -3$ c. $x = -2$ d. $y = -3$

3. La función $f(x) = x^2 - 8x + 10$ tiene:

a. El valor mínimo 6 cuando $x = -4$

b. El valor mínimo 26 cuando $x = 4$

c. El valor mínimo 10 cuando $x = 8$

d. El valor mínimo –6 cuando $x = 4$

4. ¿Cuál de las siguientes es la ecuación de una recta perpendicular a $2x - 3y = 6$?

a. $y = \frac{3}{2}x - 3$ b. $y = -\frac{2}{3}x + 2$ c. $y = -\frac{3}{2}x + 3$ d. $y = -\frac{2}{3}x + 2$

5. ¿Cuál de los planteamientos siguientes es verdadero para la función $y = -4x^2 + 20x - 25$?

a. Se abre hacia abajo y tiene una abscisa al origen.

b. Se abre hacia abajo y no tiene abscisas al origen.

c. Se abre hacia la izquierda y tiene dos abscisas al origen.

d. Se abre hacia abajo y tiene dos abscisas al origen.

6. La ecuación de la recta cuya coordenadas al origen son $(0,-4)$ y $(2,0)$ es:

a. $2x+4y=8$ b. $2x-y=4$ c. $2x-4y=8$ d. $2x+8y=4$

7. Las soluciones de $3x^2 + 6x + 2 = 0$ son:

a. $\frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3}$ b. $-1 \pm \sqrt{2}$ c. $\frac{-18 \pm \sqrt{3}}{3}$ d. $-6 \pm 2\sqrt{3}\,i$

2. **Deduzca** la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-3, 2)$ y $(-2, 5)$

    a. En su forma simplificada.

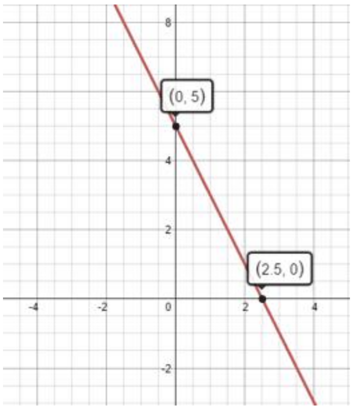
    b. En su forma general.

    c. En su forma punto–pen.

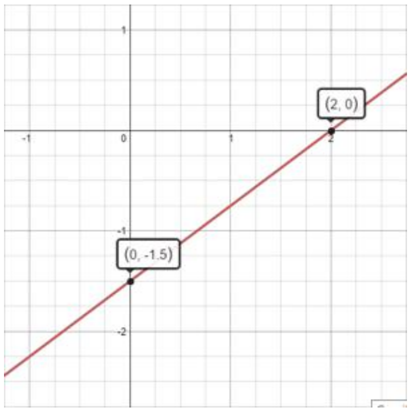
3. **Grafique** la función lineal $f(x) = 2x + 1$, usando la pendiente y la ordenada al origen.

4. Dadas las siguientes gráficas, **determine** la ecuación de la recta en su forma general en cada una de ellas.

a.



b.



5. Una recta cuya ecuación es $ax + by = 3$, pasa por los puntos $(6,3)$ y $(-1,-1)$. **Determina** los valores de a y b utilizando sistema de ecuaciones.

6. Los puntos $(-8, -16)$, $(0, 10)$ y $(12, 4)$ son tres de los vértices de un paralelogramo. **Determina** las coordenadas del cuarto vértice, que está en el tercer cuadrante.

7. Una recta cuya ecuación es $y = mx + b$, pasa por los puntos $\left(-\frac{1}{3}, -6\right)$ y $(2,1)$. **Determina** m y b, sustituyendo las coordenadas en la ecuación y resolviendo el sistema de ecuaciones.

8. **Determina** si el siguiente sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{c} x - 5y = 15 \\ 0{,}01x - 0{,}05\,y = 0{,}5 \end{array}\right\}$ es inconsistente, soluciones infinitas, solución única o no tiene solución.

Nombre: ______________________ Fecha: ______________

Evaluación diagnóstica

I. 1. $m = \frac{2}{3}$ y pasa por $(-8, 4)$, entonces es la opción b. $y = \frac{2}{3}x + \frac{28}{3}$

2. Pasa por $(2, -3)$ y paralela al eje Y, entonces es la opción a. $x = 2$

3. $f(4) = (4)^2 - 8(4) + 10 = 16 - 32 + 10 = -6$. Es la opción d. El valor mínimo -6 cuando x=4

4. $m = -\frac{2}{3}$ Por tanto, es la opción c. $y = -\frac{2}{3}x + 3$

5. Es la opción a. Se abre hacia abajo y tiene una abscisa al origen

6. Corte con el eje X en 2, corte con el eje Y en -4, $m = 2$. Es la opción b. $2x - y = 4$

7. $a = 3$, $b = 6$, $c = 2$. Reemplazando en la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b2 - 4ac}}{2a}$, se obtiene la opción a. $\frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3}$

a. Solución: si $m = 3$ y pasa por los puntos dados, se obtiene, $y = 3x + 11$

b. Solución: si $m = 3$ y pasa por los puntos dados, se obtiene, $3x - y + 11 = 0$

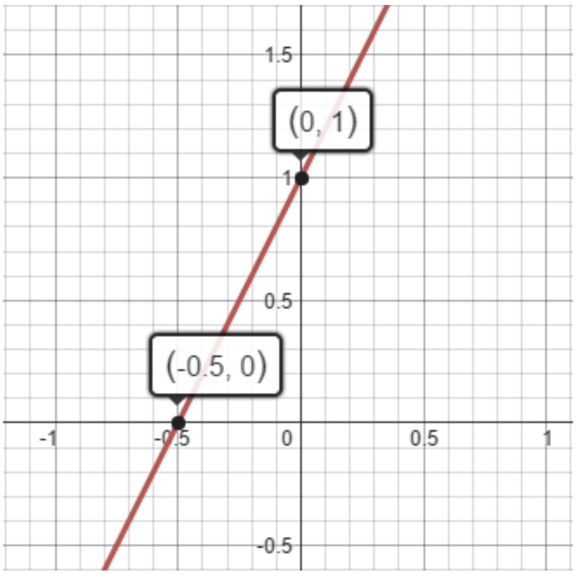
c. Solución: si m=3 y pasa por los puntos dados, se obtiene $y - 2 = 3(x + 3)$

II. a. Solución: si m=3 y pasa por los puntos dados, se obtiene, $y = 3x + 11$

b. Solución: si m=3 y pasa por los puntos dados, se obtiene, $3x - y + 11 = 0$

c. Solución: si m=3 y pasa por los puntos dados, se obtiene $y - 2 = 3(x + 3)$

III.



IV. a. Solución: $2x + y - 5 = 0$ b. Solución: $-3x + 4y + 6 = 0$

V. Solución: $a = 4$; $b = -7$

VI. Solución: $(-20, -20)$

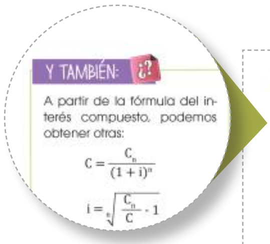
VII. Solución: $m=2$ y $b= -3$

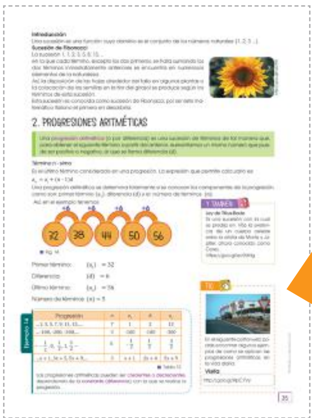
VIII. Solución: inconsistente

Funciones

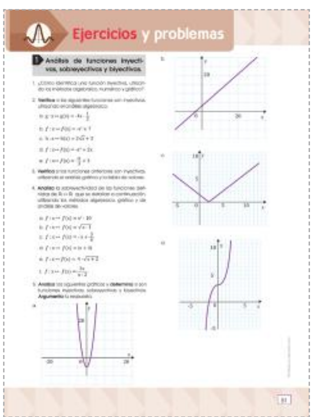

EN CONTEXTO


1
Resumen
Operaciones con funciones


Y TAMBIÉN:
A partir de la fórmula del interés compuesto, podemos obtener otras:
$C = \frac{C_n}{(1+i)^n}$
$i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C}} - 1$


2. PROGRESIONES ARITMÉTICAS

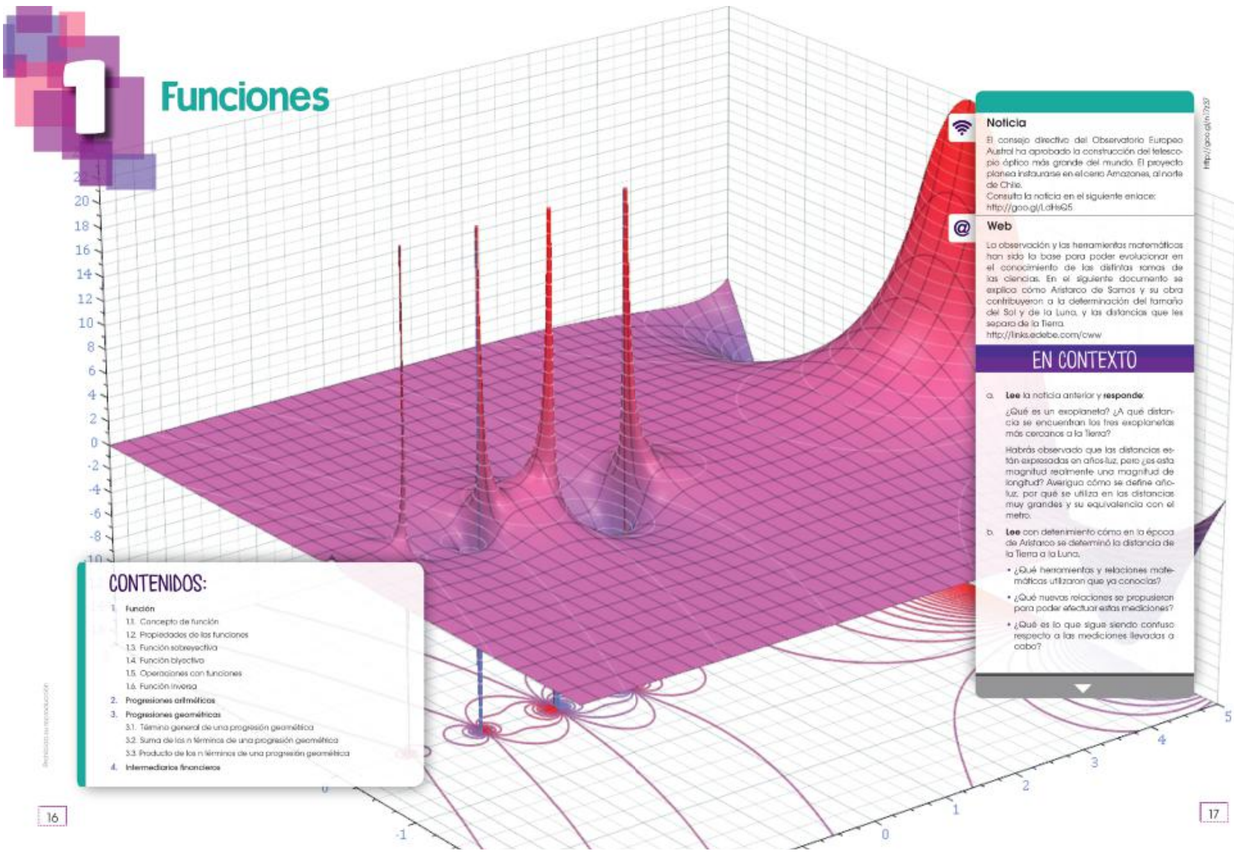

TIC
En el siguiente portal web


Ejercicios y problemas


Para finalizar
AUTOEVALUACIÓN


ZONA
Ingeniero electrónico

UNIDAD 1



Eje temático	Contenidos
Álgebra y funciones	Ecuación lineal y función cuadrática • Ecuaciones lineales (11) • Líneas paralelas y perpendiculares (12) • Sistemas de ecuaciones lineales (13 - 14) • Función cuadrática (15)
	Funciones • Concepto de función. Imágenes, antiimágenes, gráficas, dominio y recorrido (18 - 22) • Características de las funciones. Inyectiva y biyectiva (23 - 24) • Función sobreyectiva (25 - 26) • Función biyectiva (27) • Operaciones con funciones. Composición (28-31) • Función inversa (32 - 34) • Progresiones aritméticas (35 - 37) • Progresiones geométricas (38 - 42) • Intermediarios financieros. Interés simple y compuesto (43 - 48)

LOGO INSTITUCIONAL	NOMBRE DE LA INSTITUCIÓN	AÑO LECTIVO

Plan de unidad temática

1. DATOS INFORMATIVOS:

Docente:	Nombre del docente que ingresa la información	Área/asignatura:	MATEMÁTICA Grado/Curso:	3° BACHILLERATO	Paralelo:	
N.º de unidad de planificación:	1	Título de unidad de planificación:	FUNCIONES Objetivos específicos de la unidad de planificación:		Producir, comunicar y generalizar información de manera escrita, verbal, simbólica, gráfica y/o tecnológica mediante la aplicación de conocimientos Matemáticos y el manejo organizado, responsable y honesto de las fuentes de datos para comprender otras disciplinas, entender las necesidades y potencialidades de nuestro país y tomar decisiones con responsabilidad social. Desarrollar estrategias individuales y grupales que permitan un cálculo mental, escrito, exacto o estimado y la capacidad de interpretación y solución de situaciones problemáticas del medio. Valorar el empleo de las TIC para realizar cálculos y resolver, de manera razonada y crítica, problemas de la realidad nacional, argumentado la pertinencia de los métodos utilizados y juzgando la validez de los resultados.	
PERÍODOS	24			SEMANA DE INICIO:		

2. PLANIFICACIÓN

DESTREZAS CON CRITERIOS DE DESEMPEÑO A SER DESARROLLADAS:	CRITERIOS DE EVALUACIÓN
• Graficar y analizar el dominio, el recorrido, la monotonía, ceros, extremos y paridad de las diferentes funciones reales (función afín a trozos, función potencia entera negativa con n= -1, -2, función raíz cuadrada, función valor absoluto de la función afín) utilizando TIC. • Realizar la composición de funciones reales analizando las características de la función resultante (dominio, recorrido, monotonía, máximos, mínimos, paridad). • Resolver (con o sin el uso de la tecnología) problemas o situaciones reales o hipotéticas con el empleo de la modelización con funciones reales (función afín a trozos, función potencia entera negativa con n= -1, -2, función raíz cuadrada, función valor absoluto de la función afín), identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas; juzgar la pertinencia y validez de los resultados obtenidos. • Reconocer funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas para calcular la función inversa (de funciones biyectivas) comprobando con la composición de funciones. • Resolver y plantear aplicaciones de la composición de funciones reales en problemas reales o hipotéticos. • Realizar las operaciones de adición y producto entre funciones reales, y el producto de números reales por funciones reales aplicando propiedades de los números reales. • Resolver ecuaciones que se pueden reducir a ecuaciones de segundo grado con una incógnita. • Resolver (con o sin el uso de la tecnología) problemas o situaciones reales o hipotéticas que pueden ser modelizados con funciones cuadráticas identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas; juzgar la pertinencia y validez de los resultados obtenidos. • Identificar sucesiones numéricas reales, sucesiones monótonas y sucesiones definidas por recurrencia a partir de las fórmulas que las definen. • Reconocer y calcular uno o varios parámetros de una progresión (aritmética o geométrica) conocidos otros parámetros.	CE.M.5.3. Opera y emplea funciones reales, lineales, cuadráticas, polinomiales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas para plantear situaciones hipotéticas y cotidianas que puedan resolverse mediante modelos matemáticos; comenta la validez y limitaciones de los procedimientos empleados y verifica sus resultados mediante el uso de las TIC.

• Aplicar los conocimientos sobre progresiones aritméticas, progresiones geométricas y sumas parciales finitas de sucesiones numéricas para resolver aplicaciones en general y de manera especial en el ámbito financiero de las sucesiones numéricas reales. • Resolver ejercicios numéricos y problemas con la aplicación de las progresiones aritméticas, geométricas y sumas parciales finitas de sucesiones numéricas. • Reconocer las aplicaciones de las sucesiones numéricas reales en el ámbito financiero y resolver problemas, juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema. • Emplear progresiones aritméticas, geométricas y sumas parciales fintas de sucesiones numéricas en el planteamiento y resolución de problemas de diferentes ámbitos. • Realizar las operaciones de suma y multiplicación entre sucesiones numéricas reales y la multiplicación de escalares por sucesiones numéricas reales aplicando las propiedades de los números reales. • Identificar sucesiones convergentes y calcular el límite de la sucesión.	CE.M.5.6. Emplea vectores geométricos en el plano y operaciones en R, con aplicaciones en física y en la ecuación de la rmétodos gráficos, analíticos y tecnológicos.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	INDICADORES DE LOGRO	TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN
Aseguramiento del nivel de partida mediante una lluvia de ideas sobre funciones, tipos y gráficas. Manipulación de material con fotos y representación de distintos tipos de funciones y sus gráficos. Resolución de problemas de aplicación de funciones en el ámbito financiero y comercial. Uso de diagramas que resuman los principales conceptos, propiedades, procedimientos, gráficas y análisis de diferentes funciones. Uso de *softwares* que facilitan la representación gráfica y posterior interpretación de información. ¿Qué podemos decir sobre las funciones y sus aportes en la economía? Identificación de funciones y su aplicación en las finanzas y economía. Reflexión y análisis sobre dichas aplicaciones. ¿Por qué es importante conocer, graficar, analizar e interpretar gráficas de funciones? Planteamiento y resolución de problemas que apliquen funciones en el ámbito financiero y comercial.	M.5.3.1. Grafica funciones reales y analiza su dominio, recorrido, monotonía, ceros, extremos, paridad; identifica las funciones afines, potencia, raíz cuadrada, Valor absoluto; reconoce si una función es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva; realiza operaciones con funciones aplica do las propiedadesde los números reales en problemas reales e hipotéticos. (I.4.) M.5.3.2. Representa gráficamente funciones cuadráticas; hlla las intersecciones con los ejes, el dominio, rango, vértice y monotonía; emplea sistemas de ecuaciones para calcular la intersección entre una recta y una parábola o dos parábolas; emplea modelos cuadráticos para resolver problemas, de manera intuitiva halla un límite y la derivada; optimiza procesos empleando las TIC. (13, 14) M.5.3.3. Reconoce funciones polinomiales de grado n, opera con funciones polinomiales de grado =4 y racionales de grado =3; plantea modelos matemáticos para resolver problemas aplicados a la informática; emplea el teorema de Horner y el teorema del residuo para factorizar polinomios; con la ayuda de las TIC, escribe las ecuaciones de las asíntotas, y discute la validez de sus resultados. (I.3., I.4.) M.5.3.4. Halla gráfica y analíticamente el dominio, recorrido, monotonía, periodicidad, desplazamientos, máximos y mínimos de funciones trigonométricas para modelar movimientos circulares y comportamientos de fenómenos naturales, y discute su pertinencia; emplea la tecnología para corroborar sus resultados. (J.3., I.2.) M.5.3.5. Obtiene la gráfica de una función exponencial a partir de a^x, mediante traslaciones, homotecias y reflexiones; concibe la función logarítmica como inversa de la función exponencial; aplica propiedades de los logaritmos y halla su dominio, recorrido, asíntotas, intersecciones con los ejes; las aplica en situaciones reales e hipotéticas, con y sin apoyo de la tecnología. (I.3.)	Comprobar el desarrollo de las habilidades necesarias para reconocer, interpretar, graficar, analizar las características y operar con funciones de variable real (lineal, cuadrática, exponencial, logarítmica, trigonométrica, polinomiales y racionales). Que el estudiante analice el dominio, el recorrido, la monotonía, los ceros, máximos y mínimos, paridad y composición de las diferentes funciones. También se incluyen las propiedades de inyectividad, sobreyectividad y biyectividad. Apoyándose con las TIC, debe poder graficar, interpretar y encontrar las intersecciones con los ejes, y la intersección de las gráficas de funciones; además de hallar la solución de ecuaciones de manera gráfica; interpretar geométricamente la derivada de una función cuadrática y sus aplicaciones; y comprender la noción de límite y su aplicación, así como la modelización de situaciones reales a través de las funciones.

ELEMENTOS DEL PERFIL DE SALIDA
J.3. Procedemos con respeto y responsabilidad con nosotros y con las demás personas, con la naturaleza y con el mundo de las ideas. Cumplimos nuestras obligaciones y exigimos la observación de nuestros derechos. I.2. Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos e información posibles. I.3. Sabemos comunicarnos de manera clara en uestra lengua y en otras, utilizamos varios lenguajes como el numérico, el digital, el artístico y el corporal; asumimos con Responsabilidad nuestros discursos. I.4. Actuamos de manera organizada, con autonomía e independencia; aplicamos el razonamiento lógico, crítico y complejo; y practicamos la humildad intelectual en un aprendizaje a lo largo de la vida.

ELABORADO	REVISADO	APROBADO
Docente:	Director del área :	Vicerrector:
Firma:	Firma:	Firma:
Fecha:	Fecha:	Fecha:

w

Criterio de evaluación

- Opera y emplea funciones reales, lineales, cuadráticas, polinomiales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas para plantear situaciones hipotéticas y cotidianas que puedan resolverse mediante modelos matemáticos; comenta la validez y limitaciones de los procedimientos empleados y verifica sus resultados mediante el uso de las TIC.
- Reconoce patrones presentes en sucesiones numéricas reales, monótonas y definidas por recurrencia; identifica las progresiones aritméticas y geométricas; y, mediante sus propiedades y fórmulas, resuelve problemas reales de matemática financiera e hipotética.

Objetivos del área por subnivel

- O.M.5.1. Proponer soluciones creativas a situaciones concretas de la realidad nacional y mundial mediante la aplicación de las operaciones básicas de los diferentes conjuntos numéricos, y el uso de modelos funcionales, algoritmos apropiados, estrategias y métodos formales y no formales de razonamiento matemático, que lleven a juzgar con responsabilidad la validez de procedimientos y los resultados en un contexto.

Elementos del perfil de salida a los que se contribuye

- Procedemos con respeto y responsabilidad con nosotros y con las demás personas, con la naturaleza y con el mundo de las ideas. Cumplimos nuestras obligaciones y exigimos la observación de nuestros derechos.

  Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos e información posibles.

Indicadores para la evaluación del criterio

- Grafica funciones reales y analiza su dominio, recorrido, monotonía, ceros, extremos, paridad; identifica las funciones afines, potencia, raíz cuadrada, valor absoluto; reconoce si una función es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva; realiza operaciones con funciones aplicando las propiedades de los números reales en problemas reales e hipotéticos.

  Identifica las sucesiones según sus características y halla los parámetros desconocidos; aplica progresiones en aplicaciones cotidianas y analiza el sistema financiero local, apreciando la importancia de estos conocimientos para la toma de decisiones asertivas.

Objetivo integrador del área por subnivel

- OI.5.1. Analizar los diversos proyectos políticos, las propuestas de cambio democrático en una sociedad intercultural y sus efectos en diferentes ámbitos, a partir del reconocimiento de las características del origen, expansión y desarrollo, así como las limitaciones de la propia y otras culturas y su interrelación, y la importancia de sus aportes tecnológicos, económicos y científicos.

  OI.5.12. Participar en procesos interdisciplinares de experimentación y creación colectiva, responsabilizándose del trabajo compartido, respetando y reconociendo los aportes de los demás durante el proceso y en la difusión de los resultados obtenidos.

Básicos imprescindibles | Básicos deseables

Eje temático	Destrezas con criterio de desempeño
Álgebra	Identificar la intersección gráfica de dos rectas como solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
	Resolver analíticamente sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas utilizando diferentes métodos (igualación, sustitución, eliminación).
	Graficar y analizar el dominio, el recorrido, la monotonía, ceros, extremos y paridad de las diferentes funciones reales (función afín a trozos, función potencia entera negativa con $n = -1, -2$, función raíz cuadrada, función valor absoluto de la función afín) utilizando TIC.
	Reconocer funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas para calcular la función inversa (de funciones biyectivas) comprobando con la composición de funciones.
	Realizar las operaciones de adición y producto entre funciones reales, y el producto de números reales por funciones reales, aplicando propiedades de los números reales.
	Realizar la composición de funciones reales analizando las características de la función resultante (dominio, recorrido, monotonía, máximos, mínimos, paridad).
	Reconocer las aplicaciones de las sucesiones numéricas reales en el ámbito financiero y resolver problemas, juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.
	Realizar las operaciones de suma y multiplicación entre sucesiones numéricas reales y la multiplicación de escalares por sucesiones numéricas reales aplicando las propiedades de los números reales.
	Identificar sucesiones convergentes y calcular el límite de la sucesión.

Orientación didáctica

Página 16

En esta unidad se aborda el tema de funciones, sus gráficas y análisis. Como orientación metodológica el docente puede abordar la unidad con el apoyo de las TIC. Una herramienta que se sugiere es el manejo de los *software* DESMOS y GEOGEBRA, los cuales ayudarán a los estudiantes a comprender, interpretar y analizar con mayor profundidad el tema de funciones.

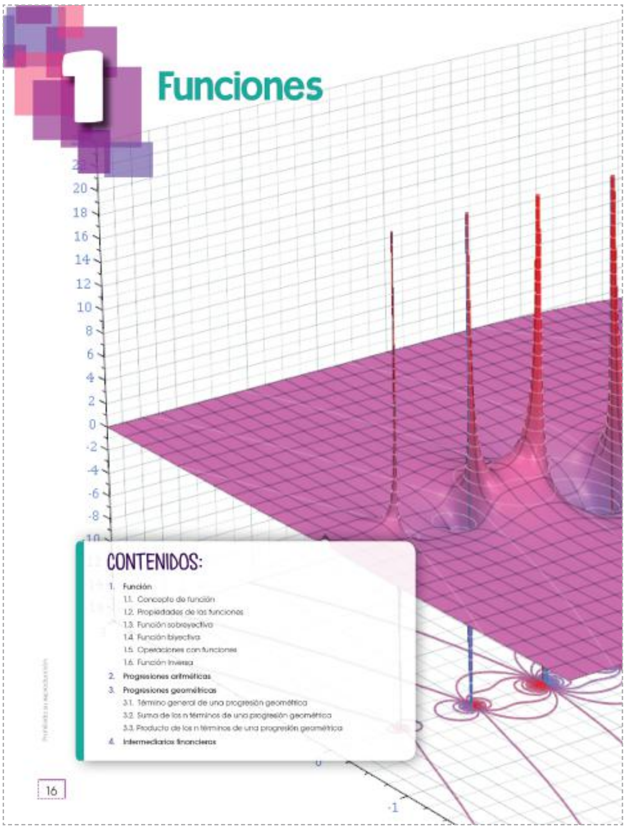
Forme grupos de trabajo que busquen y analicen gráficas en los medios de información y las relacionen con los distintos tipos de funciones estudiados en la unidad.

Puede presentar diferentes gráficas para que los alumnos reconozcan a qué tipo de función corresponde. También puede proponer situaciones contrarias, dibujar una gráfica y plantear situaciones que se adapten a ella.

La aplicabilidad de subtemas que recoge esta unidad como por ejemplo, sucesiones puede ser enfocada desde un punto de vista práctico, con problemas de la vida real para que los estudiantes se familiaricen con la aplicabilidad del tema.

Una vez reconocidas las sucesiones, es frecuente confundir el lugar que ocupa cada uno de los términos con su valor. Por ello, es conveniente hacer observar el orden que se establece en una sucesión.

Puede presentarse la siguiente situación y proponer que la continúen: la numeración de los portales en uno de los lados de una calle, por ejemplo, el de los pares:



1.er portal: N.° 2
$a_1 = 2$

2.er portal: N.°4
$a_2 = 4$

3.er portal: N.°6
$a_3 = 6$

El alumno debe saber distinguir entre progresiones aritméticas y geométricas. Para ello, pueden proponerse actividades en las que deban diferenciarlas, como por ejemplo, dibujar un segmento de 5 cm, y llevar a cabo las siguientes actividades:

a. Construir una sucesión de segmentos a partir del dibujado en la que cada nuevo segmento que se dibuje tenga 2 cm más que el anterior. ¿Qué clase de progresión forman estos segmentos?

b. Construir una sucesión de segmentos a partir del dibujado en la que cada nuevo segmento que se dibuje tenga una longitud doble que el anterior. ¿Qué clase de progresión forman estos segmentos?

Es importante que el estudiante aprenda a obtener las expresiones del término general, de la suma de los n primeros términos y del producto de los n primeros términos de una progresión geométrica, así como de la suma ilimitada de una progresión geométrica decreciente y de la interpolación de términos geométricos, con el fin de desarrollar su capacidad de razonamiento y de deducción.

Además, se puede solicitar a los estudiantes que busquen información sobre la *sucesión de Fibonacci y el número de oro* y sus aplicaciones en la vida cotidiana. El alumnado puede recurrir, con la ayuda de un buscador, a la consulta en Internet.

Las edades de tres hermanas están en progresión aritmética y suman 27 años. Sabiendo que la edad de la mayor es el doble de la edad de la menor, calcula las tres edades.

Actividades complementarias

Las edades de tres hermanas están en progresión aritmética y suman 27 años. Sabiendo que la edad de la mayor es el doble de la edad de la menor, calcula las tres edades.

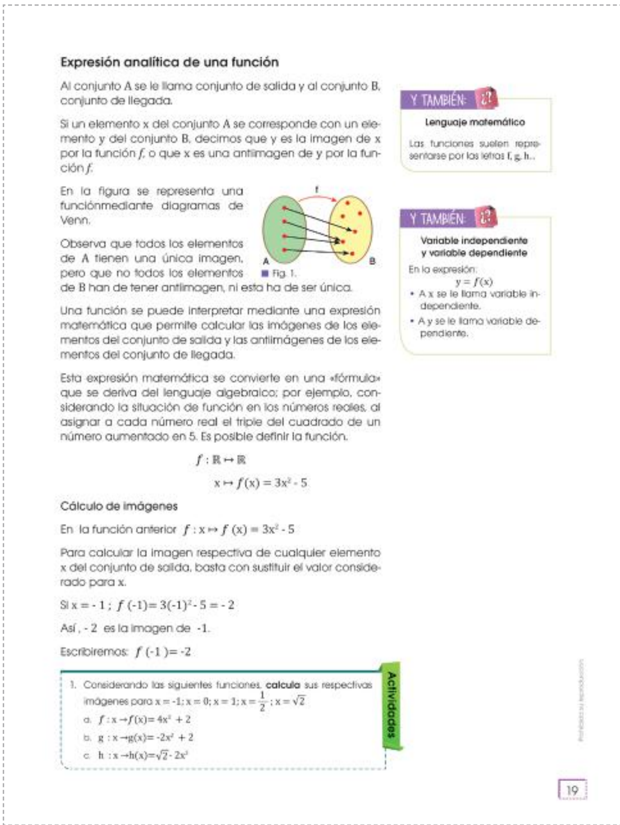
$$27 = \frac{(a1 + 2a1) * 3}{2} \ ; \ 3a_1 = 18 \,; a_1 = 6$$

$$a_1 + 2d = 2a_1 \,; d = \frac{a_1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Las edades son 6, 9 y 12 años.

Solucionario

Página 19



Expresión analítica de una función

Al conjunto A se le llama conjunto de salida y al conjunto B, conjunto de llegada.

Si un elemento x del conjunto A se corresponde con un elemento y del conjunto B, decimos que y es la imagen de x por la función *f*, o que x es una antiimagen de y por la función *f*.

En la figura se representa una funciónmediante diagramas de Venn.

Observa que todos los elementos de A tienen una única imagen, pero que no todos los elementos de B han de tener antiimagen, ni esta ha de ser única.

Fig. 1.

Una función se puede interpretar mediante una expresión matemática que permite calcular las imágenes de los elementos del conjunto de salida y las antiimágenes de los elementos del conjunto de llegada.

Esta expresión matemática se convierte en una «fórmula» que se deriva del lenguaje algebraico; por ejemplo, considerando la situación de función en los números reales, al asignar a cada número real el triple del cuadrado de un número aumentado en 5. Es posible definir la función.

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = 3x^2 - 5$$

Cálculo de imágenes

En la función anterior $f : x \mapsto f(x) = 3x^2 - 5$

Para calcular la imagen respectiva de cualquier elemento x del conjunto de salida, basta con sustituir el valor considerado para x.

Si $x = -1$; $f(-1) = 3(-1)^2 - 5 = -2$

Así, -2 es la imagen de -1.

Escribiremos: $f(-1) = -2$

Actividades

1. Considerando las siguientes funciones, **calcula** sus respectivas imágenes para $x = -1; x = 0; x = 1; x = \frac{1}{2}; x = \sqrt{2}$
   a. $f : x \rightarrow f(x) = 4x^2 + 2$
   b. $g : x \rightarrow g(x) = -2x^2 + 2$
   c. $h : x \rightarrow h(x) = \sqrt{2} - 2x^2$

Y TAMBIÉN: ¿?

Lenguaje matemático

Las funciones suelen representarse por las letras f, g, h...

Y TAMBIÉN: ¿?

Variable independiente y variable dependiente

En la expresión:

$$y = f(x)$$

- A x se le llama variable independiente.
- A y se le llama variable dependiente.

19

1. a. $f(x) = 4x^2 + 2$

$f(-1) = 4(-1)^2 + 2 = 4(1) + 2$

$f(-1) = 6$

$f(0) = 4(0)^2 + 2 = 4(0) + 2$

$f(0) = 2$

$f(1) = 4(1)^2 + 2 = 4(1) + 2$

$f(1) = 6$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 = 4\left(\frac{1}{4}\right) + 2$$

$$f\left(\sqrt{2}\right) = 4\left(\sqrt{2}\right)^2 + 2 = 4(2) + 2$$

$$f\left(\sqrt{2}\right) = 10$$

b. $g(x) = -2x^2 + 2$

$g(-1) = -2(-1)^2 + 2 = -2(1) + 2$

$g(-1) = 0$

$g(0) = -2(0)^2 + 2 = -2(0) + 2$

$g(0) = 2$

$g(1) = -2(1)^2 + 2 = -2(1) + 2$

$g(1) = 0$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = -2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2$$
$$= -2\left(\frac{1}{4}\right) + 2$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$g\left(\sqrt{2}\right) = -2\left(\sqrt{2}\right)^2 + 2$$
$$= -2(2) + 2$$

$$g\left(\sqrt{2}\right) = -2$$

c. $h(x) = \sqrt{2} - 2x^2$

$h(-1) = \sqrt{2} - 2(-1)^2$

$= \sqrt{2} - 2(1)$

$h(-1) = \sqrt{2} - 2$

Solucionario

2. a. $f(x) = 2x^2 - 2$

Para -1: $-1 = 2x^2 - 2$

despejando x, se tiene:

$2x^2 = 2 - 1$; $2x^2 = 1$

$x = \pm\sqrt{\frac{2}{2}}$; por tanto:

Para 0: $0 = 2x^2 - 2$

despejando x, se tiene:

$2x^2 = 2$; $x^2 = 1$

$x = \pm 1$; por tanto: $f(-1)\ (0) = \{1\ ;-1\}$

Para 1: $1 = 2x^2 - 2$

despejando x, se tiene:

$2x^2 = 2 + 1$; $2x^2 = 3$

$x = \pm\sqrt{\frac{6}{2}}$; por tanto: $f^{-1}(1) = \sqrt{\frac{6}{2}}; -\sqrt{\frac{6}{2}}$

Para 1/2: $\frac{1}{2} = 2x^2 - 2$

despejando x, se tiene:

$2x^2 = 2 + \frac{1}{2}$; $2x^2 = \frac{5}{2}$

$x = 2 \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$; por tanto:

$$f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \left\{\sqrt{\frac{5}{2}}\ ; -\sqrt{\frac{5}{2}}\right\}$$

Para $\sqrt{2}$: $2x^2 - 2$

despejando x, se tiene:

$2x^2 = \sqrt{2} + 2$; $x^2 = \frac{\sqrt{2}+2}{2}$

$x = \pm\frac{\sqrt{2\sqrt{2}+4}}{2}$; por tanto:

$$f^{-1}(\sqrt{2}) = \left\{\frac{\sqrt{2\sqrt{2}+4}}{2}; -\frac{\sqrt{2\sqrt{2}+4}}{2}\right\}$$

Para 0: $0 = \sqrt{\frac{2}{2}} - 4x^2$

b. $f(x) = \sqrt{\frac{2}{3}} - 4x^2$

Para -1: $-1 = \sqrt{\frac{2}{3}} - 4x^2$

despejando x, se tiene:

$4x^2 = \sqrt{\frac{2}{3}} + 1$; $4x^2 = \frac{\sqrt{2}-3}{3}$

$x = \pm\frac{\sqrt{3\sqrt{2}-9}}{6}$; por tanto:

$$f^{-1}(-1) = \left\{\frac{\sqrt{3\sqrt{2}+9}}{6}; -\frac{\sqrt{3\sqrt{2}+9}}{6}\right\}$$

Para 0: $0 = \frac{\sqrt{2}}{3} - 4x^2$

despejando x, se tiene:

$$f^{-1}(0) = \left\{\frac{\sqrt{3\sqrt{2}}}{6}; -\frac{\sqrt{3\sqrt{2}}}{6}\right\}$$

Para -1: $-1 = \sqrt{\frac{2}{3}} - 4x^2$

despejando x, se tiene:

$4x^2 = \sqrt{\frac{2}{3}} - 1$; $4x^2 = \frac{\sqrt{2}-3}{3}$

$x = \pm\frac{\sqrt{3\sqrt{2}-9}}{6}$; por tanto:

$$f^{-1}(1) = \left\{\frac{\sqrt{3\sqrt{2}-9}}{6}; -\frac{\sqrt{3\sqrt{2}-9}}{6}\right\}$$

Para 1/2: $\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}} - 4x^2$

despejando x, se tiene:

$$f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \left\{\frac{\sqrt{12\sqrt{2}-18}}{12}\ ; -\frac{\sqrt{12\sqrt{2}-18}}{12}\right\}$$

Para $\sqrt{2}$: No tiene solución.

Solucionario

Representa gráficamente las siguientes funciones:

a. $f: x \to f(x) = -2$

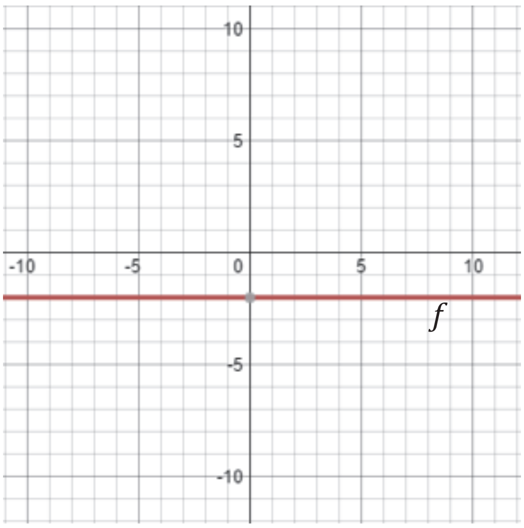
b. $f: x \to f(x) = -2x + 5$

c. $f: x \to f(x) = x^2 - 2x - 3$

3. a. $f(x)=-2$

Tabla de Valores

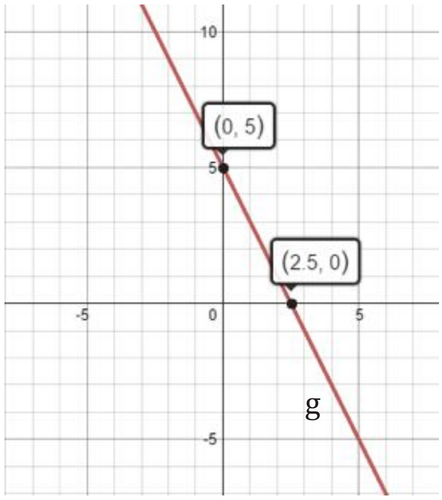
x	−2	−1	0	1	2
y	−2	−2	−2	−2	−2



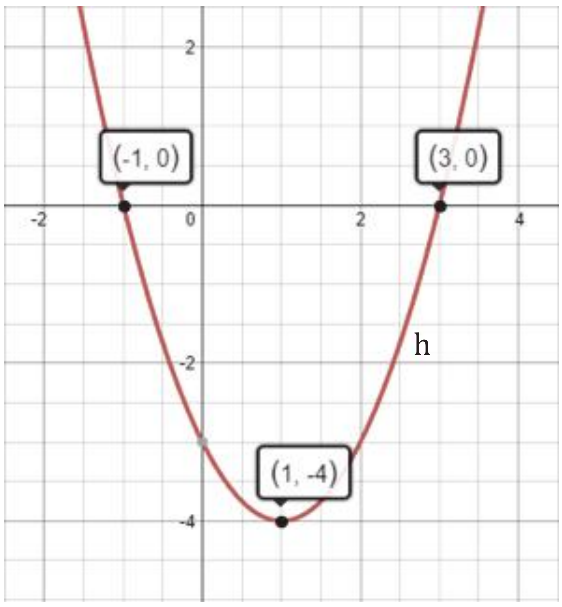
b. $g(x)=-2x+5$

Tabla de Valores

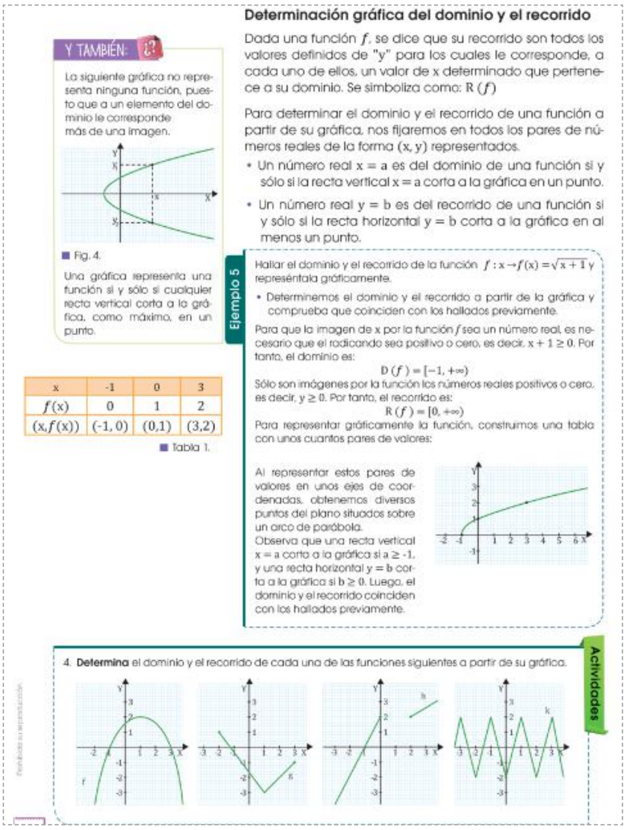
x	−2	−1	0	1	2
y	9	7	5	3	1



c. $h(x)=x^2-2x-3$ descomponiendo en factores $h(x)=(x-3)(x+1)$, los cortes con el eje x serian: $x_1=-1$; $x_2=3$ y el vértice es $V(1,-4)$



Página 22



Determinación gráfica del dominio y el recorrido

Dada una función f, se dice que su recorrido son todos los valores definidos de "y" para los cuales le corresponde, a cada uno de ellos, un valor de x determinado que pertenece a su dominio. Se simboliza como: $R(f)$

Para determinar el dominio y el recorrido de una función a partir de su gráfica, nos fijaremos en todos los pares de números reales de la forma (x, y) representados.

- Un número real $x = a$ es del dominio de una función si y sólo si la recta vertical $x = a$ corta a la gráfica en un punto.
- Un número real $y = b$ es del recorrido de una función si y sólo si la recta horizontal $y = b$ corta a la gráfica en al menos un punto.

Y TAMBIÉN:

La siguiente gráfica no representa ninguna función, puesto que a un elemento del dominio le corresponde más de una imagen.

Fig. 4.

Una gráfica representa una función si y sólo si cualquier recta vertical corta a la gráfica, como máximo, en un punto.

Ejemplo 5

Hallar el dominio y el recorrido de la función $f: x \to f(x) = \sqrt{x+1}$ y represéntala gráficamente.

- Determinemos el dominio y el recorrido a partir de la gráfica y comprueba que coinciden con los hallados previamente.

Para que la imagen de x por la función f sea un número real, es necesario que el radicando sea positivo o cero, es decir, $x + 1 \geq 0$. Por tanto, el dominio es:

$$D(f) = [-1, +\infty)$$

Sólo son imágenes por la función los números reales positivos o cero, es decir, $y \geq 0$. Por tanto, el recorrido es:

$$R(f) = [0, +\infty)$$

Para representar gráficamente la función, construimos una tabla con unos cuantos pares de valores:

x	-1	0	3
$f(x)$	0	1	2
$(x, f(x))$	(-1, 0)	(0,1)	(3,2)

Tabla 1.

Al representar estos pares de valores en unos ejes de coordenadas, obtenemos diversos puntos del plano situados sobre un arco de parábola.

Observa que una recta vertical $x = a$ corta a la gráfica si $a \geq -1$, y una recta horizontal $y = b$ corta a la gráfica si $b \geq 0$. Luego, el dominio y el recorrido coinciden con los hallados previamente.

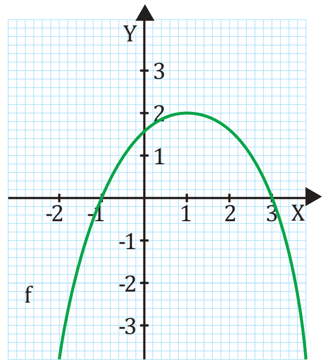
Actividades

4. **Determina** el dominio y el recorrido de cada una de las funciones siguientes a partir de su gráfica.

Determina el dominio y el recorrido de cada una de las funciones siguientes a partir de su gráfica.

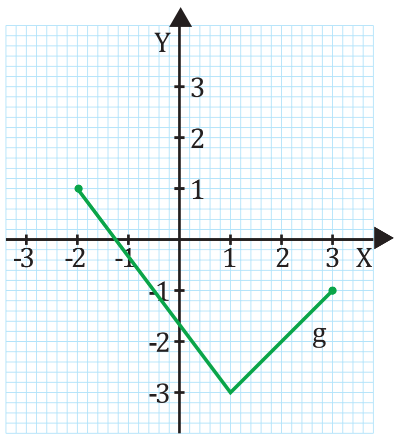
Dominio de f: x∈R

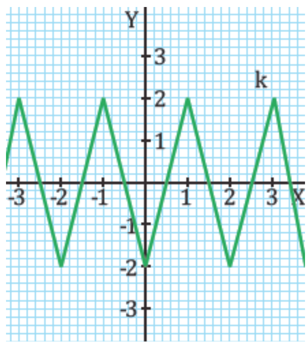
Recorrido de f: y∈R; (-∞, ⊦ 2]



Dominio de g: x∈R; [-2,3]

Recorrido de g: y∈R; [-3,1]



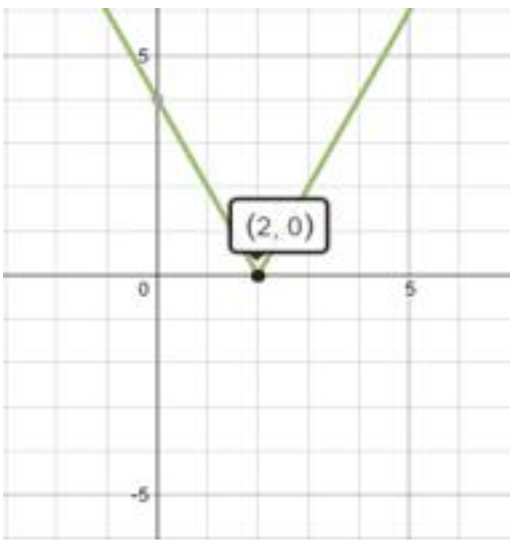


Dominio de h: x∈R; (-∞, ⊦ 0]∪[2⊣ , ⊦ +∞)

Recorrido de h: y∈R

Actividades complementarias

Actividad complementaria. Dada la gráfica, determina dominio y recorrido



Solucionario

5. a. Análisis algebraico

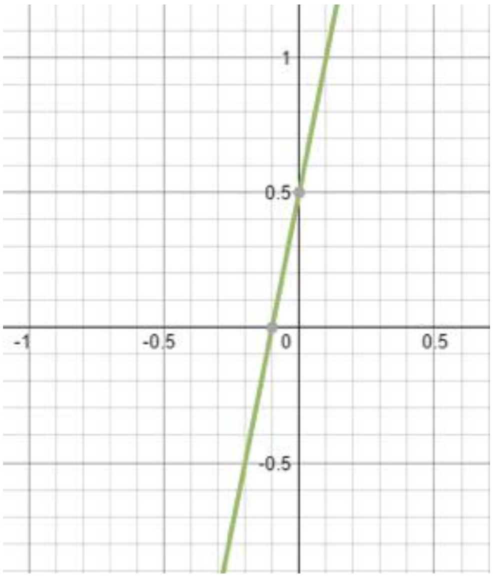
Si $x_1=0$ entonces, $g(0)=1/2$

Si $x_2=1$ entonces, $g(1)=11/2$

Por tanto: $x_1 \neq x_2$ y $g(x_1) \neq g(x_2)$

$g(x)$ es inyectiva

Análisis grafico



Cualquier recta horizontal corta como máximo en un punto a la gráfica, por tanto, $g(x)$ es inyectiva.

Análisis con tabla de valores

x	–1 0	1	2	
y	–9/2 1	/2	11/2	21/2

Como a cada valor diferente de "x"

se le atribuye un valor diferente de "y"

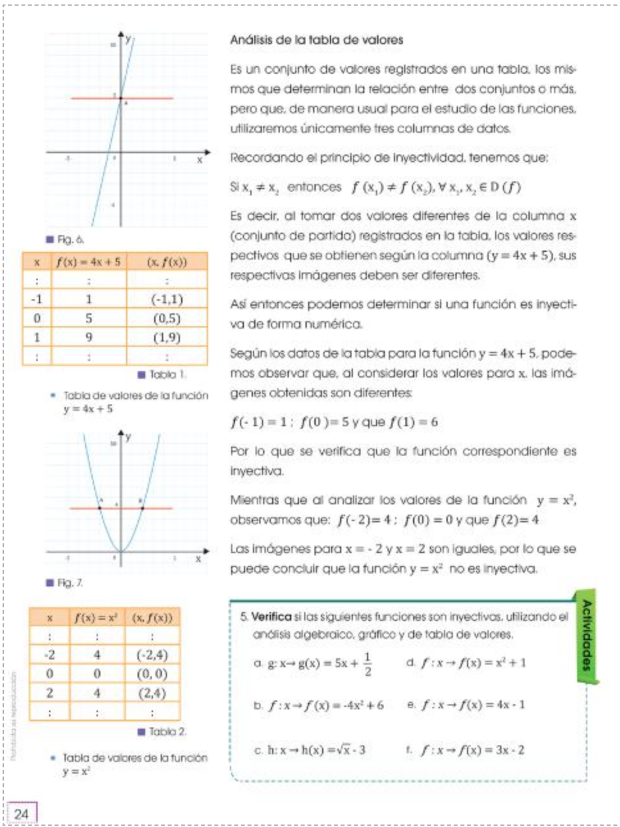
entonces, $g(x)$ es inyectiva.

b. $f(x)$ no es inyectiva.

c. $h(x)$ es inyectiva.

d. $f(x)=x^2+1$. Análisis algebraico

Si $x_1=1$ entonces, $f(1)=2$



■ Fig. 6.

x	$f(x) = 4x + 5$	$(x, f(x))$
⋮	⋮	⋮
-1	1	(-1,1)
0	5	(0,5)
1	9	(1,9)
⋮	⋮	⋮

■ Tabla 1.

• Tabla de valores de la función $y = 4x + 5$

■ Fig. 7.

x	$f(x) = x^2$	$(x, f(x))$
⋮	⋮	⋮
-2	4	(-2,4)
0	0	(0, 0)
2	4	(2,4)
⋮	⋮	⋮

■ Tabla 2.

• Tabla de valores de la función $y = x^2$

Análisis de la tabla de valores

Es un conjunto de valores registrados en una tabla, los mismos que determinan la relación entre dos conjuntos o más, pero que, de manera usual para el estudio de las funciones, utilizaremos únicamente tres columnas de datos.

Recordando el principio de inyectividad, tenemos que:

Si $x_1 \neq x_2$ entonces $f(x_1) \neq f(x_2), \forall x_1, x_2 \in D(f)$

Es decir, al tomar dos valores diferentes de la columna x (conjunto de partida) registrados en la tabla, los valores respectivos que se obtienen según la columna ($y = 4x + 5$), sus respectivas imágenes deben ser diferentes.

Así entonces podemos determinar si una función es inyectiva de forma numérica.

Según los datos de la tabla para la función $y = 4x + 5$, podemos observar que, al considerar los valores para x, las imágenes obtenidas son diferentes:

$f(-1) = 1$; $f(0) = 5$ y que $f(1) = 6$

Por lo que se verifica que la función correspondiente es inyectiva.

Mientras que al analizar los valores de la función $y = x^2$, observamos que: $f(-2)= 4$; $f(0) = 0$ y que $f(2)= 4$

Las imágenes para $x = -2$ y $x = 2$ son iguales, por lo que se puede concluir que la función $y = x^2$ no es inyectiva.

Actividades

5. **Verifica** si las siguientes funciones son inyectivas, utilizando el análisis algebraico, gráfico y de tabla de valores.

a. $g: x \rightarrow g(x) = 5x + \frac{1}{2}$

b. $f: x \rightarrow f(x) = -4x^2 + 6$

c. $h: x \rightarrow h(x) = \sqrt{x} - 3$

d. $f: x \rightarrow f(x) = x^2 + 1$

e. $f: x \rightarrow f(x) = 4x - 1$

f. $f: x \rightarrow f(x) = 3x - 2$

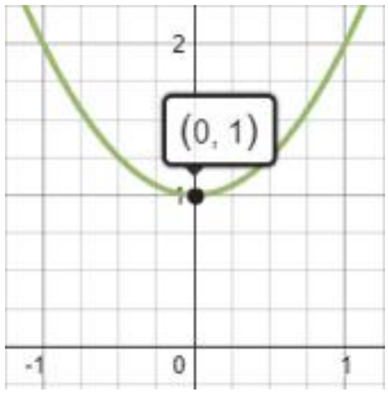
Prohibida su reproducción

24

Si $x_2=-1$ entonces, $f(-1)=2$, por tanto: $x_1 \neq x_2$ y

$f(x_1)=f⟦(x⟧_2)$. Entonces $f(x)$ no es inyectiva.

Análisis gráfico



e) Es inyectiva.

f) Es inyectiva.

se le atribuye un valor diferente de "y" entonces, $g(x)$ es inyectiva.

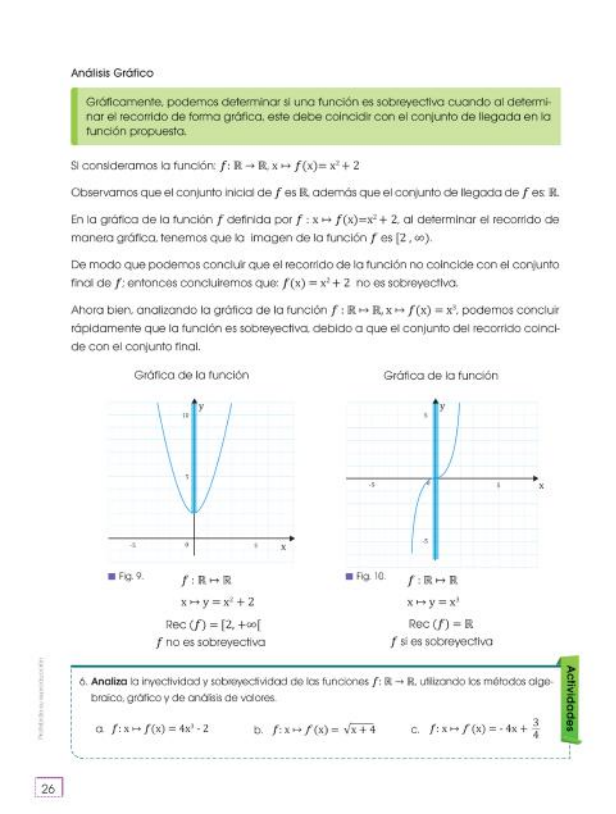
b. $f(x)$ no es inyectiva.

c. $h(x)$ es inyectiva.

d. $f(x)=x^2+1$. Análisis algebraico

Si $x_1=1$ entonces, $f(1)=2$

Página 26



Análisis Gráfico

Gráficamente, podemos determinar si una función es sobreyectiva cuando al determinar el recorrido de forma gráfica, este debe coincidir con el conjunto de llegada en la función propuesta.

Si consideramos la función: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^2 + 2$

Observamos que el conjunto inicial de f es $\mathbb{R}$, además que el conjunto de llegada de f es: $\mathbb{R}$.

En la gráfica de la función f definida por $f: x \mapsto f(x) = x^2 + 2$, al determinar el recorrido de manera gráfica, tenemos que la imagen de la función f es $[2, \infty)$.

De modo que podemos concluir que el recorrido de la función no coincide con el conjunto final de f; entonces concluiremos que: $f(x) = x^2 + 2$ no es sobreyectiva.

Ahora bien, analizando la gráfica de la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^3$, podemos concluir rápidamente que la función es sobreyectiva, debido a que el conjunto del recorrido coincide con el conjunto final.

Gráfica de la función

Fig. 9. $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$x \mapsto y = x^2 + 2$

$Rec(f) = [2, +\infty[$

f no es sobreyectiva

Gráfica de la función

Fig. 10. $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$x \mapsto y = x^3$

$Rec(f) = \mathbb{R}$

f si es sobreyectiva

Actividades

6. **Analiza** la inyectividad y sobreyectividad de las funciones $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, utilizando los métodos algebraico, gráfico y de análisis de valores.

a. $f: x \mapsto f(x) = 4x^2 - 2$ b. $f: x \mapsto f(x) = \sqrt{x+4}$ c. $f: x \mapsto f(x) = -4x + \frac{3}{4}$

26

Solucionario

6. a. $f(x)=4x^2-2$

Análisis algebraico

Inyectividad

Si $x_1=1$, entonces $f(1)=2$

Si $x_2=-1$, entonces $f(-1)=2$

Por tanto, $x_1 \neq x_2, f(1)=f(-1)$

Entonces, $f(x)$ no es inyectiva

Sobreyectividad

Dominio f: $x \in R$

Recorrido f: $y \in R$; $[-2; +\infty)$

Dominio f≠Recorrido f

Por tanto, $f(x)$ no es sobreyectiva

b) $f(x)=\sqrt{(x+4)}$

Análisis gráfico

Inyectividad

Sobreyectividad

Dominio f: $x \in R$

Recorrido f: $y \in R$; $[-2; +\infty)$

Dominio f≠Recorrido f

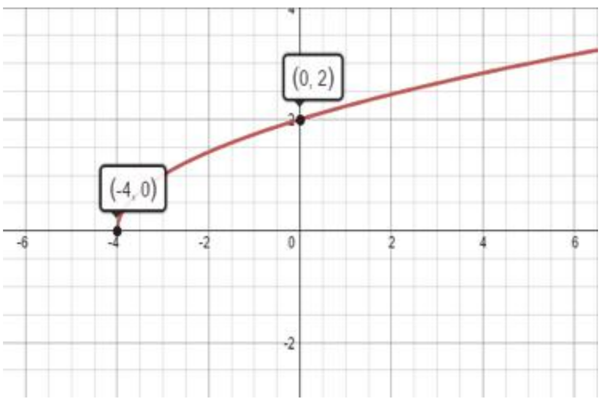
Por tanto, $f(x)$ no es sobreyectiva

c) $f(x)=-4x+3/4$

Análisis tabla de valores

x	−2	−1	0	1	2
f(x)	35/4	19/4	3/4	−13/4	−29/4

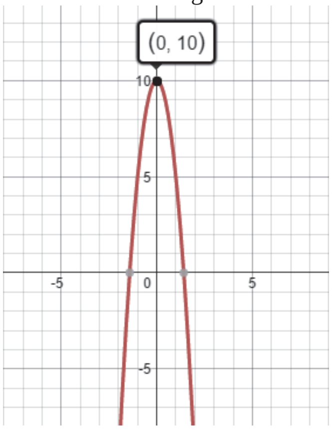
La tabla muestra que para valores diferentes de x se obtienen imágenes diferentes, por tanto, $f(x)$ es inyectiva. También, es sobreyectiva porque el dominio de f coincide con su recorrido.



Solucionario

7. a) $f(x) = -5x^2 + 10$

Análisis grafico



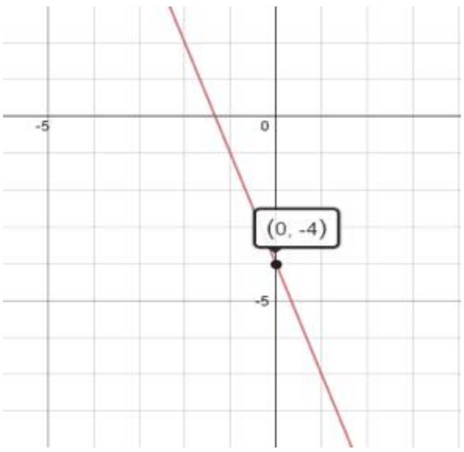
Existe al menos una recta que corta en dos puntos a la gráfica, por tanto, $f(x)$ *no es inyectiva*. Entonces, *no*

b. f(x)=-3x-4

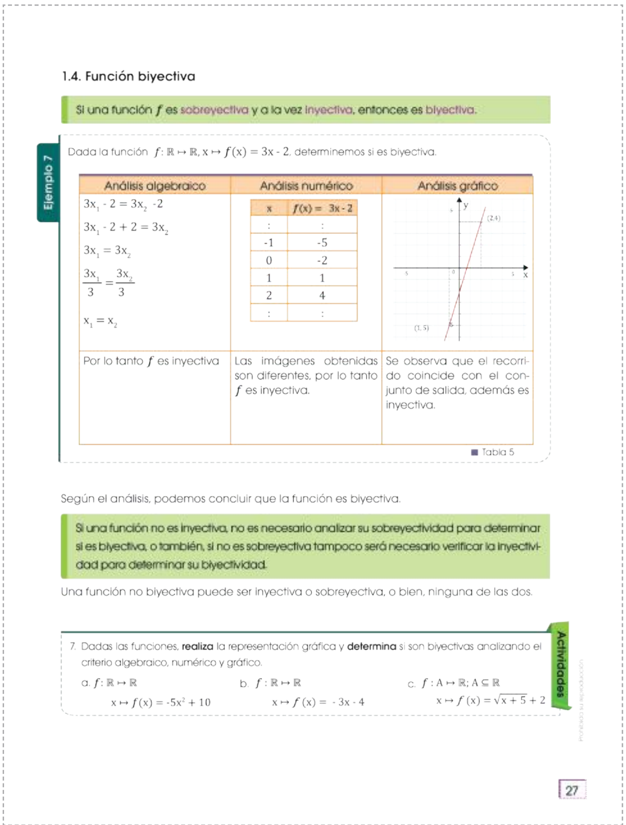
Análisis gráfico

Si trazamos una recta horizontal, la gráfica queda cortada en un solo punto.

Por tanto, f(x) es inyectiva.



Cualquier recta trazada horizontalmentecorta en un solo punto a la gráfica, por tanto, f(x)es inyectiva. El dominio y recorrido de f es los reales, entonces f(x) es sobreyectiva. Conclusión: f(x) es biyectiva.



1.4. Función biyectiva

Si una función f es sobreyectiva y a la vez inyectiva, entonces es biyectiva.

Ejemplo 7

Dada la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = 3x - 2$, determinemos si es biyectiva.

Análisis algebraico	Análisis numérico	Análisis gráfico
$3x_1 - 2 = 3x_2 - 2$ $3x_1 - 2 + 2 = 3x_2$ $3x_1 = 3x_2$ $\frac{3x_1}{3} = \frac{3x_2}{3}$ $x_1 = x_2$	x / $f(x) = 3x - 2$: ⋮ ⋮; -1 -5; 0 -2; 1 1; 2 4; ⋮ ⋮	y, x, (2,4), (1, 5), -5, 0, 5
Por lo tanto f es inyectiva	Las imágenes obtenidas son diferentes, por lo tanto f es inyectiva.	Se observa que el recorrido coincide con el conjunto de salida, además es inyectiva.

Tabla 5

Según el análisis, podemos concluir que la función es biyectiva.

Si una función no es inyectiva, no es necesario analizar su sobreyectividad para determinar si es biyectiva, o también, si no es sobreyectiva tampoco será necesario verificar la inyectividad para determinar su biyectividad.

Una función no biyectiva puede ser inyectiva o sobreyectiva, o bien, ninguna de las dos.

Actividades

7. Dadas las funciones, **realiza** la representación gráfica y **determina** si son biyectivas analizando el criterio algebraico, numérico y gráfico.

a. $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = -5x^2 + 10$

b. $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = -3x - 4$

c. $f: A \mapsto \mathbb{R}; A \subseteq \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \sqrt{x+5} + 2$

27

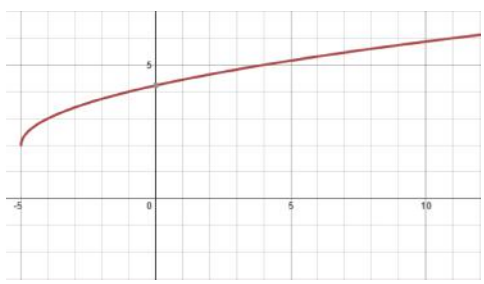
c. f(x) = √(x+5) + 2

Análisis gráfico

Cualquier recta trazada horizontalmente corta en un solo punto a la gráfica, por tanto, f(x)es inyectiva. El dominio y recorrido de f son diferentes, entonces f(x) es no sobreyectiva. Conclusión: f(x) es no biyectiva.

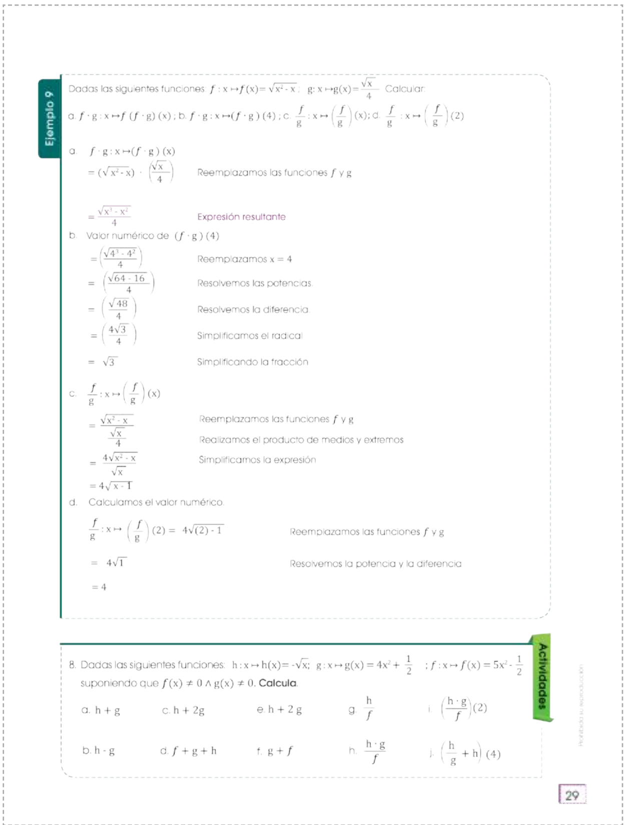
$f(x) = \sqrt{x+5} + 2$

Análisis gráfico



Cualquier recta trazada horizontalmente corta en un solo punto a la gráfica, por tanto, $f(x)$*es inyectiva*. El dominio y recorrido de f son diferentes, entonces $f(x)$ *es no sobreyectiva*. Conclusión: $f(x)$ *es no biyectiva*.

Página 29



Ejemplo 9

Dadas las siguientes funciones: $f : x \mapsto f(x) = \sqrt{x^2 - x}$; $g : x \mapsto g(x) = \frac{\sqrt{x}}{4}$ Calcular:

a. $f \cdot g : x \mapsto f\ (f \cdot g)(x)$; b. $f \cdot g : x \mapsto (f \cdot g)(4)$; c. $\frac{f}{g} : x \mapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x)$; d. $\frac{f}{g} : x \mapsto \left(\frac{f}{g}\right)(2)$

a. $f \cdot g : x \mapsto (f \cdot g)(x)$

$= (\sqrt{x^2 - x}) \cdot \left(\frac{\sqrt{x}}{4}\right)$ Reemplazamos las funciones f y g

$= \frac{\sqrt{x^3 - x^2}}{4}$ Expresión resultante

b. Valor numérico de $(f \cdot g)(4)$

$= \left(\frac{\sqrt{4^3 - 4^2}}{4}\right)$ Reemplazamos $x = 4$

$= \left(\frac{\sqrt{64 - 16}}{4}\right)$ Resolvemos las potencias.

$= \left(\frac{\sqrt{48}}{4}\right)$ Resolvemos la diferencia.

$= \left(\frac{4\sqrt{3}}{4}\right)$ Simplificamos el radical

$= \sqrt{3}$ Simplificando la fracción

c. $\frac{f}{g} : x \mapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x)$

$= \frac{\sqrt{x^2 - x}}{\frac{\sqrt{x}}{4}}$ Reemplazamos las funciones f y g

Realizamos el producto de medios y extremos

$= \frac{4\sqrt{x^2 - x}}{\sqrt{x}}$ Simplificamos la expresión

$= 4\sqrt{x - 1}$

d. Calculamos el valor numérico.

$\frac{f}{g} : x \mapsto \left(\frac{f}{g}\right)(2) = 4\sqrt{(2) - 1}$ Reemplazamos las funciones f y g

$= 4\sqrt{1}$ Resolvemos la potencia y la diferencia

$= 4$

Actividades

8. Dadas las siguientes funciones: $h : x \mapsto h(x) = -\sqrt{x}$; $g : x \mapsto g(x) = 4x^2 + \frac{1}{2}$; $f : x \mapsto f(x) = 5x^2 - \frac{1}{2}$ suponiendo que $f(x) \neq 0 \wedge g(x) \neq 0$. **Calcula**.

a. $h + g$ c. $h + 2g$ e. $h + 2g$ g. $\frac{h}{f}$ i. $\left(\frac{h \cdot g}{f}\right)(2)$

b. $h - g$ d. $f + g + h$ f. $g + f$ h. $\frac{h \cdot g}{f}$ j. $\left(\frac{h}{g} + h\right)(4)$

29

Solucionario

8. a) $(h+g)(x) = -\sqrt{x} + 4x^2 + \frac{1}{2}$

b) $(h-g)(x) = -\sqrt{x} - \left(4x^2 + \frac{1}{2}\right)$

$(h-g)(x) = -\sqrt{x} - 4x^2 - \frac{1}{2}$

c) $(h+2g)(x) = -\sqrt{x} + 2\left(4x^2 + \frac{1}{2}\right)$

$(h+2g)(x) = -\sqrt{x} + 8x^2 + 1$

d) $(f+g+h)(x) =$

$5x^2 - \frac{1}{2} + 4x^2 + \frac{1}{2} - \sqrt{x}$

e) $(h+2g)(4) = -\sqrt{4} + 8(4)^2 + 1$

$(h+2g)(4) = -2 + 8(16) + 1$

$(h+2g)(4) = -2 + 128 + 1$

$(h+2g)(x) = 127$

$f)$ $(g+f)(x) = 4x^2 + \frac{1}{2} + 5x^2 - \frac{1}{2}$

$(g+f)(x) = 9x^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$

$(g+f)(x) = 9x^2$

g) $\left(\frac{h}{f}\right)(x) = \frac{-\sqrt{x}}{5x^2 - \frac{1}{2}} = \frac{-\sqrt{x}}{\frac{10x^2 - 1}{2}}$

$h)$ $\left(\frac{h \cdot g}{f}\right)(x) = \frac{-\sqrt{x}\,(8x^2+1)}{10x^2 - 1}$

$\left(\frac{h \cdot g}{f}\right)(2) = \frac{-\sqrt{2}\,(8(2)^2+1)}{10(2)^2 - 1} = \frac{-\sqrt{2}(32+1)}{40-1}$

$\left(\frac{h \cdot g}{f}\right)(2) = \frac{-\sqrt{2}(33)}{39} = -\frac{\sqrt{2}\,(11)}{13} = -\frac{11\sqrt{2}}{13}$

$i)$ $\left(\frac{h}{g} + h\right)(x) = \frac{-\sqrt{x}}{4x^2 + \frac{1}{2}} - \sqrt{x} = \frac{-2\sqrt{x}}{8x^2+1} - \sqrt{x}$

$\left(\frac{h}{g} + h\right)(x) = \frac{-2\sqrt{x}}{8x^2+1} - \sqrt{x} = \frac{-2\sqrt{x} - \sqrt{x}(8x^2+1)}{8x^2+1}$

$\left(\frac{h}{g} + h\right)(4) = \frac{-2\sqrt{4} - \sqrt{4}(8(4)^2+1)}{8(4)^2+1} = \frac{-4 - 2(129)}{129}$

$\left(\frac{h}{g} + h\right)(4) = \frac{-4 - (258)}{129} = -\frac{262}{129}$

$\left(\frac{h}{f}\right)(x) = \frac{-2\sqrt{x}}{10x^2 - 1}$

h) $\left(\frac{h \cdot g}{f}\right)(x) = \frac{-\sqrt{x}}{5x^2 - \frac{1}{2}} \cdot \left(4x^2 + \frac{1}{2}\right)$

$\left(\frac{h \cdot g}{f}\right)(x) = \frac{-\sqrt{x}}{\frac{10x^2 - 1}{2}} \cdot \left(4x^2 + \frac{1}{2}\right)$

$\left(\frac{h \cdot g}{f}\right)(x) = \frac{-2\sqrt{x}}{10x^2 - 1} \cdot \left(\frac{8x^2+1}{2}\right)$

$\left(\frac{h \cdot g}{f}\right)(x) = \frac{-\sqrt{x}\,(8x^2+1)}{10x^2 - 1}$

Solucionario

9. a) $f(x) = x^3 - 1$, despejamos x

$y = x^3 - 1$; $x^3 = y + 1$

$x = \sqrt[3]{y+1}$, intercambiamos letras

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$

b) $g(x) = \frac{x+1}{2}$, despejamos x

$y = \frac{x+1}{2}$; $x + 1 = 2y$; $x = 2y - 1$

Intercambiamos letras:

$$g^{-1}(x) = 2x - 1$$

c) $h(x) = \frac{x+1}{x-2}$, despejamos x

$y = \frac{x+1}{x-2}$; $y(x-2) = x + 1$

multiplicando distributivamente,

$xy - 2y = x + 1$; $xy - x = 2y + 1$

Sacando factor común,

$x(y-1) = 2y + 1$; $x = \frac{2y+1}{y-1}$

Intercambiamos letras:

$$h^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

1) Calcula la inversa de las siguientes funciones:

a) $f(x) = (x-3)^2$

b) $g(x) = x^{1/4} - 4$

c) $h(x) = \frac{3}{2}x + 1$

d) $i(x) = -x^7$

e) $j(x) = x^{2/5}$

f) $k(x) = \frac{3-x}{4+x}$

g) $l(x) = \sqrt[3]{x-6}$

h) $m(x) = x^3 + 5$

i) $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$

j) $g(x) = \frac{3x+5}{x-2}$

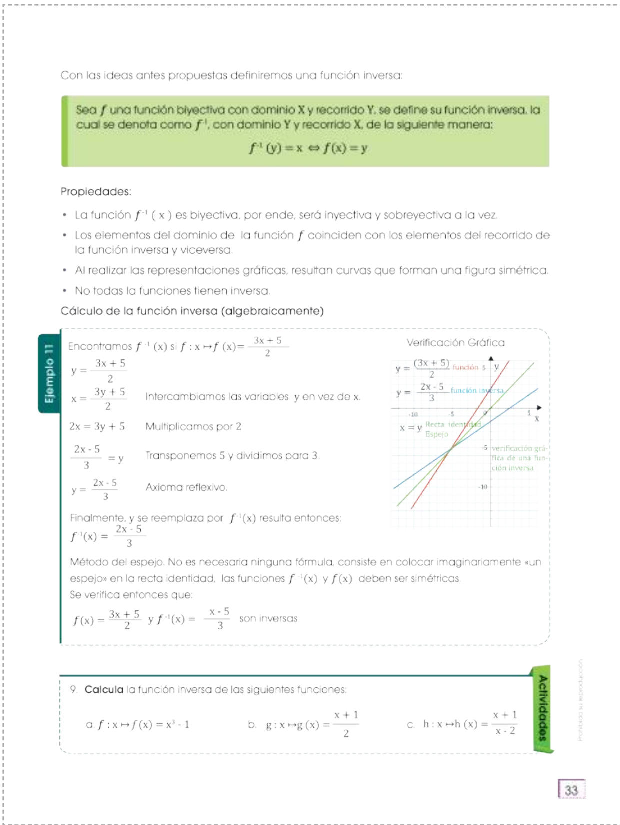
k) $h(x) = \frac{x}{x+1}$

l) $f(x) = 7x - \frac{1}{2}$

m) $g(x) = 2x^3 + 1$

n) $h(x) = (x+1)^2 - 3$

Página 33



Con las ideas antes propuestas definiremos una función inversa:

Sea f una función biyectiva con dominio X y recorrido Y, se define su función inversa, la cual se denota como f^{-1}, con dominio Y y recorrido X, de la siguiente manera:

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

Propiedades:

- La función $f^{-1}(x)$ es biyectiva, por ende, será inyectiva y sobreyectiva a la vez.
- Los elementos del dominio de la función f coinciden con los elementos del recorrido de la función inversa y viceversa.
- Al realizar las representaciones gráficas, resultan curvas que forman una figura simétrica.
- No todas la funciones tienen inversa.

Cálculo de la función inversa (algebraicamente)

Ejemplo 11

Encontramos $f^{-1}(x)$ si $f: x \mapsto f(x) = \frac{3x+5}{2}$

$y = \frac{3x+5}{2}$

$x = \frac{3y+5}{2}$ Intercambiamos las variables y en vez de x.

$2x = 3y + 5$ Multiplicamos por 2

$\frac{2x-5}{3} = y$ Transponemos 5 y dividimos para 3.

$y = \frac{2x-5}{3}$ Axioma reflexivo.

Finalmente, y se reemplaza por $f^{-1}(x)$ resulta entonces:

$f^{-1}(x) = \frac{2x-5}{3}$

Verificación Gráfica

Método del espejo. No es necesaria ninguna fórmula, consiste en colocar imaginariamente «un espejo» en la recta identidad, las funciones $f^{-1}(x)$ y $f(x)$ deben ser simétricas.

Se verifica entonces que:

$f(x) = \frac{3x+5}{2}$ y $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{3}$ son inversas

Actividades

9. **Calcula** la función inversa de las siguientes funciones:

a. $f: x \mapsto f(x) = x^3 - 1$ b. $g: x \mapsto g(x) = \frac{x+1}{2}$ c. $h: x \mapsto h(x) = \frac{x+1}{x-2}$

33

SOLUCIONARIO ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

a) $f(x) = (x-3)^2$, despejamos x y obtenemos,

$x = \sqrt{y} + 3$, intercambiamos letras y obtenemos,

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 3$$

b) $g^{-1}(x) = (x+4)^4$

c) $h^{-1}(x) = \frac{2x-2}{3}$

d) $i^{-1}(x) = \sqrt[7]{-x}$

e) $j^{-1}(x) = x^{5/2}$

f) $k^{-1}(x) = \frac{3-4x}{x+1}$

g) $l^{-1}(x) = x^3 + 6$

h) $m^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-5}$

i) $f^{-1}(x) = \sqrt{2 - x^2}$

j) $g^{-1}(x) = \frac{2x+5}{x-3}$

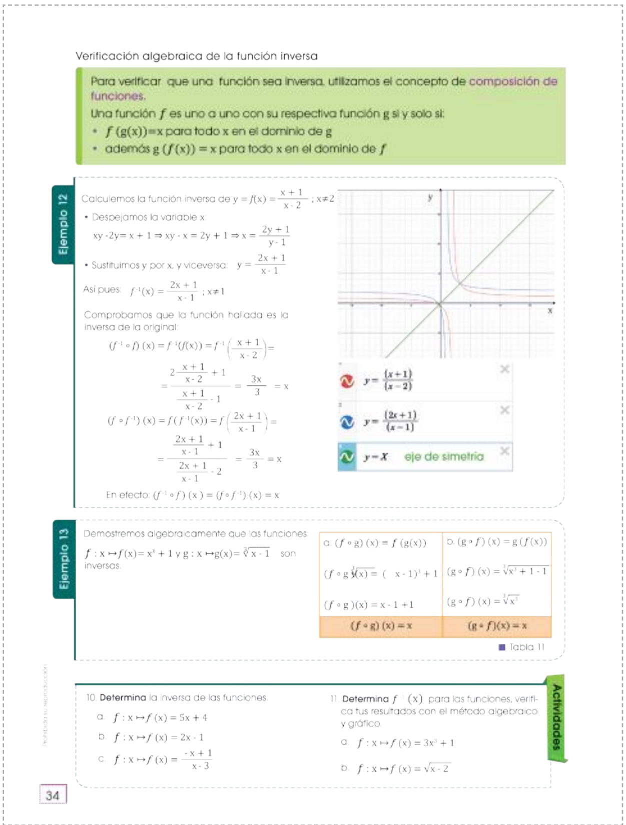
k) $h^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$

l) $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{14}$

m) $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}$

n) $h^{-1}(x) = \sqrt{x+3} - 1$

Página 34



Verificación algebraica de la función inversa

Para verificar que una función sea inversa, utilizamos el concepto de composición de funciones.

Una función f es uno a uno con su respectiva función g si y solo si:

- $f(g(x)) = x$ para todo x en el dominio de g
- además $g(f(x)) = x$ para todo x en el dominio de f

Ejemplo 12

Calculemos la función inversa de $y = f(x) = \frac{x+1}{x-2}$; $x \neq 2$

- Despejamos la variable x:

$xy - 2y = x + 1 \Rightarrow xy - x = 2y + 1 \Rightarrow x = \frac{2y+1}{y-1}$

- Sustituimos y por x, y viceversa: $y = \frac{2x+1}{x-1}$

Así pues: $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-1}$; $x \neq 1$

Comprobamos que la función hallada es la inversa de la original:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \frac{2\frac{x+1}{x-2}+1}{\frac{x+1}{x-2}-1} = \frac{3x}{3} = x$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) = \frac{\frac{2x+1}{x-1}+1}{\frac{2x+1}{x-1}-2} = \frac{3x}{3} = x$$

En efecto: $(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = x$

Ejemplo 13

Demostremos algebraicamente que las funciones: $f: x \mapsto f(x) = x^3 + 1$ y $g: x \mapsto g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ son inversas.

a. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$	b. $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
$(f \circ g)(x) = (\sqrt[3]{x-1})^3 + 1$	$(g \circ f)(x) = \sqrt[3]{x^3+1-1}$
$(f \circ g)(x) = x - 1 + 1$	$(g \circ f)(x) = \sqrt[3]{x^3}$
$(f \circ g)(x) = x$	$(g \circ f)(x) = x$

Tabla 11

Actividades

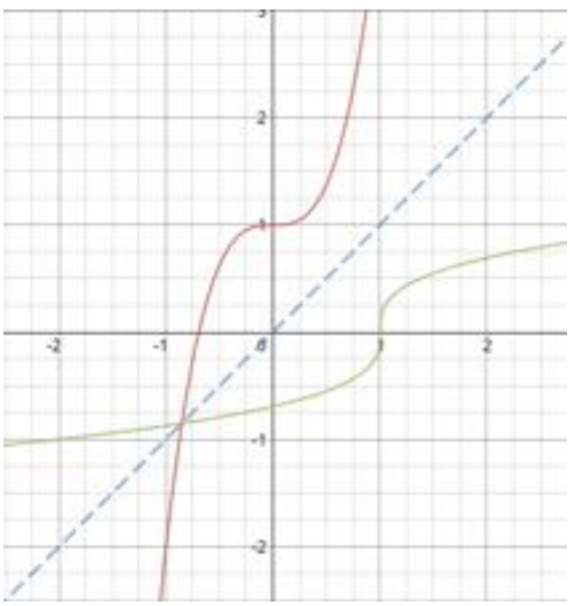
10. **Determina** la inversa de las funciones.
   a. $f: x \mapsto f(x) = 5x + 4$
   b. $f: x \mapsto f(x) = 2x - 1$
   c. $f: x \mapsto f(x) = \frac{-x+1}{x-3}$

11. **Determina** $f^{-1}(x)$ para las funciones, verifica tus resultados con el método algebraico y gráfico.
   a. $f: x \mapsto f(x) = 3x^3 + 1$
   b. $f: x \mapsto f(x) = \sqrt{x-2}$

34

Solucionario

MÉTODO GRÁFICO (literal a)



10. a) $f(x) = 5x + 4$

$y = 5x + 4$, despejamos x

$5x = y - 4$; $x = \frac{y-4}{5}$

Intercambiamos letras

$$f^{-1}(x) = \frac{x-4}{5}$$

b) $f(x) = 2x - 1$

$y = 2x - 1$, despejamos x

$2x = y + 1$; $x = \frac{y+1}{2}$

Intercambiamos letras

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$$

c) $f(x) = \frac{-x+1}{x-3}$

despejamos x ; $xy - 3y = -x + 1$

$xy + x = 3y + 1$; $x = \frac{3y+1}{y+1}$

Intercambiamos letras

$$f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x+1}$$

11. a) $f(x) = 3x^3 + 1$

$y = 3x^3 + 1$, despejamos x

$3x^3 = y - 1$; $x = \sqrt[3]{\frac{y-1}{3}}$

Intercambiamos letras

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{3}}$$

b) $f(x) = \sqrt{x-2}$, despejamos x

$y = \sqrt{x-2}$; $x = y^2 + 2$,

Intercambiamos letras,

$f^{-1}(x) = x^2 +$

Solucionario

$$a_9 = a_1 + (n-1)d$$

$$a_9 = 7 + (9-1)3 = 7 + (8)3$$

$$a_9 = 31$$

b) n = 25, d=3, $a_1 = -6$

$$a_{25} = a_1 + (n-1)d$$

$$a_{25} = -6 + (25-1)3 = -6 + (24)3$$

$$a_{25} = 66$$

c) n = 11, d=$-\frac{1}{5}$, $a_1 = 1$

$$a_{11} = a_1 + (n-1)d$$

$$a_{11} = 1 + (11-1)\left(-\frac{1}{5}\right) = 1 + (10)\left(-\frac{1}{5}\right)$$

$$a_{11} = -1$$

d) n=29, d= –3, $a_1 = -1$

$$a_{29} = a_1 + (n-1)d$$

$$a_{29} = -1 + (28)(-3) = -1 - 84$$

$$a_{29} = -85$$

13. a) n = 11, d = 3, $a_1 = 3$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

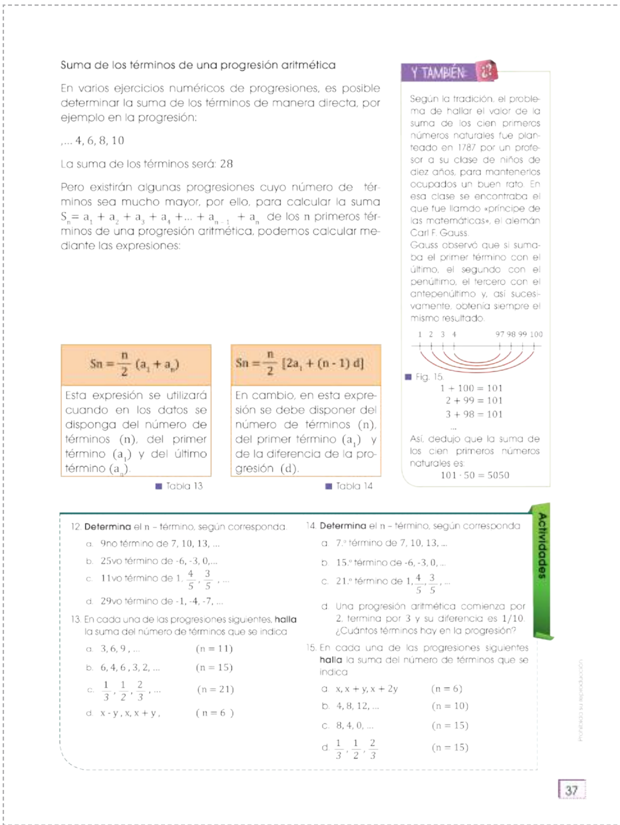
$$S_{11} = \frac{11}{2}[2(3) + (11-1)3]$$

$$S_{11} = 198$$

b) $S_{15} = 57$

c) $S_{21} = 42$

d) $S_6 = 6x + 9y$


Suma de los términos de una progresión aritmética

En varios ejercicios numéricos de progresiones, es posible determinar la suma de los términos de manera directa, por ejemplo en la progresión:

,... 4, 6, 8, 10

La suma de los términos será: 28

Pero existirán algunas progresiones cuyo número de términos sea mucho mayor, por ello, para calcular la suma $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-1} + a_n$ de los n primeros términos de una progresión aritmética, podemos calcular mediante las expresiones:

$Sn = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$
Esta expresión se utilizará cuando en los datos se disponga del número de términos (n), del primer término (a_1) y del último término (a_n).

Tabla 13

$Sn = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$
En cambio, en esta expresión se debe disponer del número de términos (n), del primer término (a_1) y de la diferencia de la progresión (d).

Tabla 14

Y TAMBIÉN

Según la tradición, el problema de hallar el valor de la suma de los cien primeros números naturales fue planteado en 1787 por un profesor a su clase de niños de diez años, para mantenerlos ocupados un buen rato. En esa clase se encontraba el que fue llamdo «príncipe de las matemáticas», el alemán Carl F. Gauss.

Gauss observó que si sumaba el primer término con el último, el segundo con el penúltimo, el tercero con el antepenúltimo y, así sucesivamente, obtenía siempre el mismo resultado.

1 2 3 4 97 98 99 100

Fig. 15.

$1 + 100 = 101$

$2 + 99 = 101$

$3 + 98 = 101$

...

Así, dedujo que la suma de los cien primeros números naturales es:

$101 \cdot 50 = 5050$

Actividades

12. **Determina** el n – término, según corresponda.
a. 9no término de 7, 10, 13, ...
b. 25vo término de -6, -3, 0,...
c. 11vo término de 1, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$, ...
d. 29vo término de -1, -4, -7, ...

13. En cada una de las progresiones siguientes, **halla** la suma del número de términos que se indica
a. 3, 6, 9, ... (n = 11)
b. 6, 4, 6, 3, 2, ... (n = 15)
c. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, ... (n = 21)
d. x - y, x, x + y, (n = 6)

14. **Determina** el n – término, según corresponda
a. 7.º término de 7, 10, 13, ...
b. 15.º término de -6, -3, 0, ...
c. 21.º término de 1, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$, ...
d. Una progresión aritmética comienza por 2, termina por 3 y su diferencia es 1/10. ¿Cuántos términos hay en la progresión?

15. En cada una de las progresiones siguientes **halla** la suma del número de términos que se indica
a. x, x + y, x + 2y (n = 6)
b. 4, 8, 12, ... (n = 10)
c. 8, 4, 0, ... (n = 15)
d. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ (n = 15)

37

14. a) n=7, d= 3, $a_1 = 7$

$$a_7 = a_1 + (n-1)d$$

$$a_7 = 7 + (6)(3) = 7 + 18$$

$$a_7 = 25$$

b) n = 15, d = 3, $a_1 = -6$

$$a_{15} = a_1 + (n-1)d$$

$$a_{15} = -6 + 14(3) = -6 + 42$$

c) a_{21} = ·

$$a_7 = a_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 = 162 \cdot \left(\frac{1}{729}\right)$$

d) $n = 11$ $\quad a_7 = \frac{162}{729}$; $a_7 = \frac{2}{9}$

15. a) n = 6, d=y, $a_1 = x$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$S_6 = \frac{6}{2}[2x + (6-1)y]$$

$$S_6 = 6x + 15y$$

b) n = 10, d = 4, $a_1 = 4$

$$S_{10} = \frac{10}{2}[2(4) + (10-1)4]$$

36] = 220

$$a_2 = \frac{162}{3} \quad ; \quad a_2 = 54$$

$$a_3 = a_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 162 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)$$

$$a_3 = \frac{162}{9} \quad ; \quad a_3 = 18$$

$$a_4 = a_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 162 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)$$

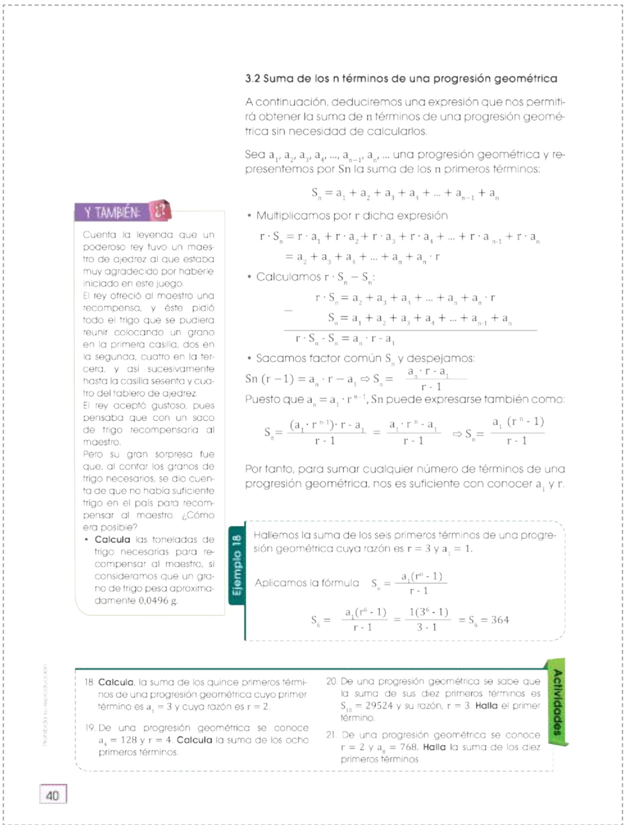
$$a_4 = \frac{162}{27} \quad ; \quad a_4 = 6$$

$$a_5 = 2$$

$$a_6 = a_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 = 162 \cdot \left(\frac{1}{243}\right)$$

$$a_6 = \frac{162}{243} \quad ; \quad a_6 = \frac{2}{3}$$

Página 40



3.2 Suma de los n términos de una progresión geométrica

A continuación, deduciremos una expresión que nos permitirá obtener la suma de n términos de una progresión geométrica sin necesidad de calcularlos.

Sea $a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_{n-1}, a_n, ...$ una progresión geométrica y representemos por Sn la suma de los n primeros términos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-1} + a_n$$

- Multiplicamos por r dicha expresión

$$r \cdot S_n = r \cdot a_1 + r \cdot a_2 + r \cdot a_3 + r \cdot a_4 + ... + r \cdot a_{n-1} + r \cdot a_n$$
$$= a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n + a_n \cdot r$$

- Calculamos $r \cdot S_n - S_n$:

$$\begin{array}{rl} & r \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n + a_n \cdot r \\ - & S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-1} + a_n \\ \hline & r \cdot S_n - S_n = a_n \cdot r - a_1 \end{array}$$

- Sacamos factor común S_n y despejamos:

$$Sn\,(r - 1) = a_n \cdot r - a_1 \Rightarrow S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

Puesto que $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$, Sn puede expresarse también como:

$$S_n = \frac{(a_1 \cdot r^{n-1}) \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot r^n - a_1}{r - 1} \Rightarrow S_n = \frac{a_1\,(r^n - 1)}{r - 1}$$

Por tanto, para sumar cualquier número de términos de una progresión geométrica, nos es suficiente con conocer a_1 y r.

Y TAMBIÉN:

Cuenta la leyenda que un poderoso rey tuvo un maestro de ajedrez al que estaba muy agradecido por haberle iniciado en este juego.
El rey ofreció al maestro una recompensa, y éste pidió todo el trigo que se pudiera reunir colocando un grano en la primera casilla, dos en la segunda, cuatro en la tercera, y así sucesivamente hasta la casilla sesenta y cuatro del tablero de ajedrez.
El rey aceptó gustoso, pues pensaba que con un saco de trigo recompensaría al maestro.
Pero su gran sorpresa fue que, al contar los granos de trigo necesarios, se dio cuenta de que no había suficiente trigo en el país para recompensar al maestro. ¿Cómo era posible?

- **Calcula** las toneladas de trigo necesarias para recompensar al maestro, si consideramos que un grano de trigo pesa aproximadamente 0,0496 g.

Ejemplo 18

Hallemos la suma de los seis primeros términos de una progresión geométrica cuya razón es $r = 3$ y $a_1 = 1$.

Aplicamos la fórmula $S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$

$$S_6 = \frac{a_1(r^6 - 1)}{r - 1} = \frac{1(3^6 - 1)}{3 - 1} = S_6 = 364$$

Actividades

18. **Calcula**, la suma de los quince primeros términos de una progresión geométrica cuyo primer término es $a_1 = 3$ y cuya razón es $r = 2$.
19. De una progresión geométrica se conoce $a_4 = 128$ y $r = 4$. **Calcula** la suma de los ocho primeros términos.
20. De una progresión geométrica se sabe que la suma de sus diez primeros términos es $S_{10} = 29524$ y su razón, $r = 3$. **Halla** el primer término.
21. De una progresión geométrica se conoce $r = 2$ y $a_8 = 768$. **Halla** la suma de los diez primeros términos.

Solucionario

18. $a_1 = 3$; $r = 2$

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S_{15} = \frac{3(2^{15} - 1)}{2 - 1} = \frac{3(32768 - 1)}{1}$$

$$S_{15} = 98301$$

19. $a_4 = 128$; $r = 4$

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

primero hallamos a_1

$$a_4 = a_1 \cdot r^{4-1} = a_1 \cdot r^3$$

$$128 = a_1 \cdot 4^3 ; \; a_1 = \frac{128}{64} = 2$$

$$S_8 = \frac{2(4^8 - 1)}{4 - 1} = \frac{2(65536 - 1)}{3}$$

$$S_8 = \frac{131070}{3} = 43690$$

20. $S_{10} = 29524$; $r = 3$

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S_{10} = \frac{a_1(3^{10} - 1)}{3 - 1} = \frac{a_1(59048)}{2}$$

$$29524 = a_1 \cdot 29524 ; \; a_1 = 1$$

21. $a_8 = 768$; $r = 2$, primero hallamos a_1

$$a_8 = a_1 \cdot r^{8-1} = a_1 \cdot r^7$$

$$768 = a_1 \cdot 2^7 ; \; a_1 = \frac{768}{128} = 6$$

Actividades complementarias

1) Hallar la suma de los 11 primeros términos de una progresión geométrica cuya razón es $r = 5$ y $a_1 = 4$.

SOLUCIONARIO ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

$a_1 = 4$; $r = 5$; $n = 11$

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S_{11} = \frac{4(5^{11} - 1)}{5 - 1} = \frac{4(48828124)}{4}$$

$$S_{11} = 48828124$$

Página 45

Solucionario

22. $C = 15\,000$; $I = 560$; $n = 2$

$$I = C \cdot i \cdot n$$

reemplazando valores y despejando

$$560 = 15\,000 \cdot i \cdot 2$$

$$560 = 30\,000 \cdot i$$

$$i = \frac{560}{30\,000} = \frac{28}{1500} = \frac{14}{750} = \frac{7}{375}$$

$$i = 1{,}9\ \%$$

23. $C = 35\,000$; $i = 6{,}5\ \%$; $n = 2{,}5$

$$I = C \cdot i \cdot n$$

reemplazando valores y calculando

$$I = 35\,000 \cdot 0{,}065 \cdot 2{,}5$$

$$I = 5687{,}5$$

24. $C = 2000$; $i_s = 6\ \%$; $n = 2$;

$$i_c = 5{,}75\ \%$$

Interés simple

$$I = C \cdot i_s \cdot n$$

$$I = 2000 \cdot 0{,}06 \cdot 2 = 240$$

Interés compuesto

$I = C \cdot [(1 + i_c)^n - 1]$, reemplazo valores

$$I = 2000 \cdot [(1 + 0{,}0575)^2 - 1]$$

$$I = 2000 \cdot [0{,}11830625] = 236{,}6$$

Mejor opción: interés simple al 6 %.

25. $C = 5000$; $i = 7{,}5\ \%$; $n = 5$

$C_n = C \cdot (1 + i)^n$ reemplazo valores

$$C_n = 5000 \cdot (1 + 0{,}075)^5$$

$$C_n = 5000 \cdot (1{,}435629326)$$

$$C_n = 7178$$

26. $C_n = 6556{,}36$; $i = 3\ \%$; $n = 3$

$C_n = C \cdot (1 + i)^n$; despejamos C

$$C = \frac{C_n}{(1+i)^n} = \frac{6556{,}36}{(1 + 0{,}03)^3} = \frac{6556{,}36}{1{,}092727}$$

$C = 6000$, aproximadamente.

27. $C = 2500$; $i = 6{,}25\ \%$; $n = 3$

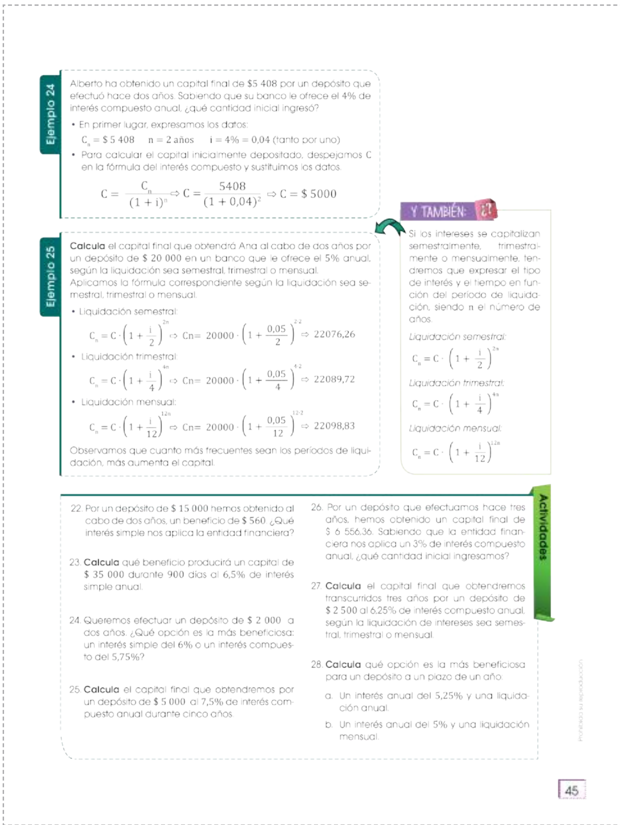
Semestral: $C_n = C \cdot \left(1 + \frac{i}{2}\right)^{2n}$ reemplazo valores

$$C_n = 2500 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0625}{2}\right)^{2\cdot 3} = 3007.$$

Trimestral: $C_n = 3011$ Mensual: $C_n = 3014$

28. a) $C_n = 3157{,}5$ b) $C_n = 3153{,}5$

Es más beneficiosa la opción a.



Ejemplo 24

Alberto ha obtenido un capital final de \$5 408 por un depósito que efectuó hace dos años. Sabiendo que su banco le ofrece el 4% de interés compuesto anual, ¿qué cantidad inicial ingresó?

- En primer lugar, expresamos los datos:

$C_n = \$\,5\,408$ $n = 2$ años $i = 4\% = 0{,}04$ (tanto por uno)

- Para calcular el capital inicialmente depositado, despejamos C en la fórmula del interés compuesto y sustituimos los datos.

$$C = \frac{C_n}{(1+i)^n} \Rightarrow C = \frac{5408}{(1+0{,}04)^2} \Rightarrow C = \$\,5000$$

Ejemplo 25

Calcula el capital final que obtendrá Ana al cabo de dos años por un depósito de \$ 20 000 en un banco que le ofrece el 5% anual, según la liquidación sea semestral, trimestral o mensual.

Aplicamos la fórmula correspondiente según la liquidación sea semestral, trimestral o mensual.

- Liquidación semestral:

$$C_n = C \cdot \left(1 + \frac{i}{2}\right)^{2n} \Rightarrow Cn = 20000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}05}{2}\right)^{2\cdot 2} \Rightarrow 22076{,}26$$

- Liquidación trimestral:

$$C_n = C \cdot \left(1 + \frac{i}{4}\right)^{4n} \Rightarrow Cn = 20000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}05}{4}\right)^{4\cdot 2} \Rightarrow 22089{,}72$$

- Liquidación mensual:

$$C_n = C \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12n} \Rightarrow Cn = 20000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}05}{12}\right)^{12\cdot 2} \Rightarrow 22098{,}83$$

Observamos que cuanto más frecuentes sean los períodos de liquidación, más aumenta el capital.

Y TAMBIÉN:

Si los intereses se capitalizan semestralmente, trimestralmente o mensualmente, tendremos que expresar el tipo de interés y el tiempo en función del período de liquidación, siendo n el número de años.

Liquidación semestral:

$$C_n = C \cdot \left(1 + \frac{i}{2}\right)^{2n}$$

Liquidación trimestral:

$$C_n = C \cdot \left(1 + \frac{i}{4}\right)^{4n}$$

Liquidación mensual:

$$C_n = C \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12n}$$

Actividades

22. Por un depósito de \$ 15 000 hemos obtenido al cabo de dos años, un beneficio de \$ 560. ¿Qué interés simple nos aplica la entidad financiera?

23. **Calcula** qué beneficio producirá un capital de \$ 35 000 durante 900 días al 6,5% de interés simple anual.

24. Queremos efectuar un depósito de \$ 2 000 a dos años. ¿Qué opción es la más beneficiosa: un interés simple del 6% o un interés compuesto del 5,75%?

25. **Calcula** el capital final que obtendremos por un depósito de \$ 5 000 al 7,5% de interés compuesto anual durante cinco años.

26. Por un depósito que efectuamos hace tres años, hemos obtenido un capital final de \$ 6 556,36. Sabiendo que la entidad financiera nos aplica un 3% de interés compuesto anual, ¿qué cantidad inicial ingresamos?

27. **Calcula** el capital final que obtendremos transcurridos tres años por un depósito de \$ 2 500 al 6,25% de interés compuesto anual, según la liquidación de intereses sea semestral, trimestral o mensual.

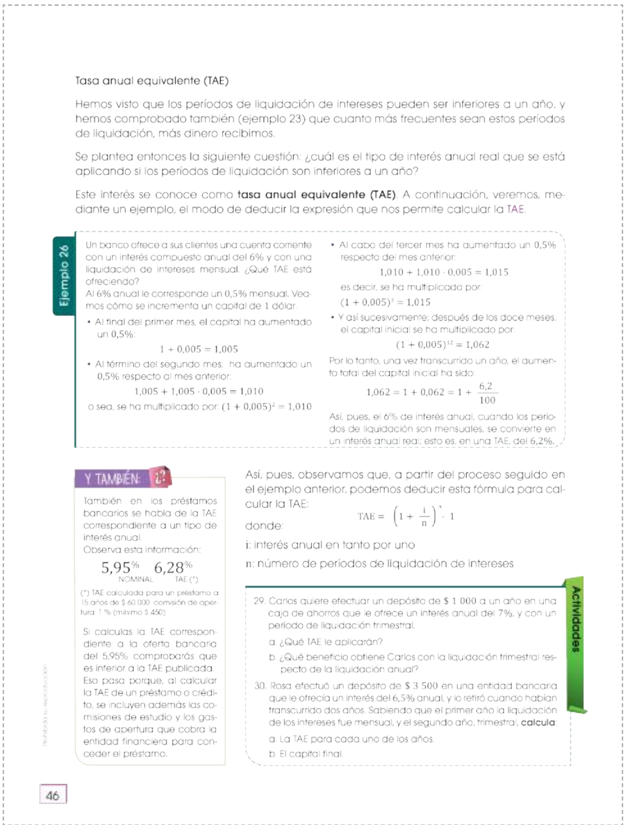
28. **Calcula** qué opción es la más beneficiosa para un depósito a un plazo de un año:

a. Un interés anual del 5,25% y una liquidación anual.

b. Un interés anual del 5% y una liquidación mensual.

45

Página 46



Tasa anual equivalente (TAE)

Hemos visto que los períodos de liquidación de intereses pueden ser inferiores a un año, y hemos comprobado también (ejemplo 23) que cuanto más frecuentes sean estos períodos de liquidación, más dinero recibimos.

Se plantea entonces la siguiente cuestión: ¿cuál es el tipo de interés anual real que se está aplicando si los períodos de liquidación son inferiores a un año?

Este interés se conoce como **tasa anual equivalente (TAE)**. A continuación, veremos, mediante un ejemplo, el modo de deducir la expresión que nos permite calcular la TAE.

Ejemplo 26

Un banco ofrece a sus clientes una cuenta corriente con un interés compuesto anual del 6% y con una liquidación de intereses mensual. ¿Qué TAE está ofreciendo?

Al 6% anual le corresponde un 0,5% mensual. Veamos cómo se incrementa un capital de 1 dólar.

- Al final del primer mes, el capital ha aumentado un 0,5%:

$$1 + 0{,}005 = 1{,}005$$

- Al término del segundo mes, ha aumentado un 0,5% respecto al mes anterior:

$$1{,}005 + 1{,}005 \cdot 0{,}005 = 1{,}010$$

o sea, se ha multiplicado por: $(1 + 0{,}005)^2 = 1{,}010$

- Al cabo del tercer mes ha aumentado un 0,5% respecto del mes anterior:

$$1{,}010 + 1{,}010 \cdot 0{,}005 = 1{,}015$$

es decir, se ha multiplicado por:

$(1 + 0{,}005)^3 = 1{,}015$

- Y así sucesivamente; después de los doce meses, el capital inicial se ha multiplicado por:

$$(1 + 0{,}005)^{12} = 1{,}062$$

Por lo tanto, una vez transcurrido un año, el aumento total del capital inicial ha sido:

$$1{,}062 = 1 + 0{,}062 = 1 + \frac{6{,}2}{100}$$

Así, pues, el 6% de interés anual, cuando los períodos de liquidación son mensuales, se convierte en un interés anual real; esto es, en una TAE, del 6,2%.

Y TAMBIÉN: ¿?

También en los préstamos bancarios se habla de la TAE correspondiente a un tipo de interés anual.

Observa esta información:

5,95% NOMINAL 6,28% TAE (*)

(*) TAE calculada para un préstamo a 15 años de $ 60 000 comisión de apertura: 1 % (mínimo $ 450)

Si calculas la TAE correspondiente a la oferta bancaria del 5,95% comprobarás que es inferior a la TAE publicada. Eso pasa porque, al calcular la TAE de un préstamo o crédito, se incluyen además las comisiones de estudio y los gastos de apertura que cobra la entidad financiera para conceder el préstamo.

Así, pues, observamos que, a partir del proceso seguido en el ejemplo anterior, podemos deducir esta fórmula para calcular la TAE:

$$\text{TAE} = \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{n} - 1$$

donde:

i: interés anual en tanto por uno

n: número de períodos de liquidación de intereses

Actividades

29. Carlos quiere efectuar un depósito de $ 1 000 a un año en una caja de ahorros que le ofrece un interés anual del 7%, y con un período de liquidación trimestral.

a. ¿Qué TAE le aplicarán?

b. ¿Qué beneficio obtiene Carlos con la liquidación trimestral respecto de la liquidación anual?

30. Rosa efectuó un depósito de $ 3 500 en una entidad bancaria que le ofrecía un interés del 6,5% anual, y lo retiró cuando habían transcurrido dos años. Sabiendo que el primer año la liquidación de los intereses fue mensual, y el segundo año, trimestral, **calcula**:

a. La TAE para cada uno de los años.

b. El capital final.

Solucionario

29. a) n = 1; i = 0,07

$$TAE = \left(1+\frac{i}{4}\right)^{4n} \text{reemplazo valores}$$

$$TAE = \left(1+\frac{0{,}07}{4}\right)^{4\cdot 1} = 1{,}0715$$

$$TAE = 7{,}15\ \%$$

b) Liquidación trimestral:

$$C_n = C \cdot \left(1+\frac{i}{4}\right)^{4n} = 1000\left(1+\frac{0{,}07}{4}\right)^{4\cdot 1}$$

$$C_n = 1071{,}86$$

Liquidación anual:

$$C_n = C \cdot (1+i)^n = 1000 \cdot (1+0{,}07)^1$$

Obtiene un beneficio de $ 1,86

30. $C = 3500$; $i = 0{,}065$; $n = 2$

Primer año: (mensual)

$$TAE = \left(1+\frac{i}{12}\right)^{12n} = \left(1+\frac{0{,}065}{12}\right)^{12\cdot 2}$$

$$TAE = \left(1+\frac{0{,}065}{12}\right)^{24} = 2{,}1545$$

$$TAE = 15{,}45\ \%$$

Segundo año: (trimestral)

$$TAE = \left(1+\frac{i}{4}\right)^{4n} = \left(1+\frac{0{,}065}{4}\right)^{4\cdot 2}$$

$$TAE = \left(1+\frac{0{,}065}{4}\right)^{8} = 1{,}1376$$

$$TAE = 13{,}76\%$$

b) $C_n = C \cdot (1+i)^n$

$$C_n = 3500 \cdot (1+0{,}065)^2 = 3969{,}8$$

Actividades complementarias

1) Jorge quiere realizar un depósito de $ 2000 a un año en un banco que le ofrece una tasa de interés anual del 8 % y con un periodo de liquidación trimestral.

a) ¿Qué TAE le aplicarán?

b) ¿Cuál es la liquidación trimestral?

SOLUCIONARIO ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

a) n = 1; i = 0,08; $TAE = \left(1+\frac{i}{4}\right)^{4n}$ reemplazo valores:

$TAE = \left(1+\frac{0{,}08}{4}\right)^{4\cdot 1} = 1{,}0824$; $TAE = 8{,}24\ \%$

b) Trimestral: $C_n = C \cdot \left(1+\frac{i}{4}\right)^{4n} = 2000\left(1+\frac{0{,}08}{4}\right)^{4\cdot 1}$

$$C_n = 1082{,}4$$

Página 48

Solucionario

31. costo \$ 4870; i = 12 %
Pagarla en 24 meses.

$$a=\frac{C\cdot\frac{i}{12}}{1-\left(1+\frac{i}{12}\right)^{-12n}}\text{ reemplazo valores}$$

$$a=\frac{4870\cdot\frac{0{,}12}{12}}{1-\left(1+\frac{0{,}12}{12}\right)^{-24}}=229{,}25$$

32. $C=20000\,;\ n=4\,;\ i=14\ \%$
Anual:

$$a=\frac{C\cdot i}{1-(1+i)^{-n}}$$

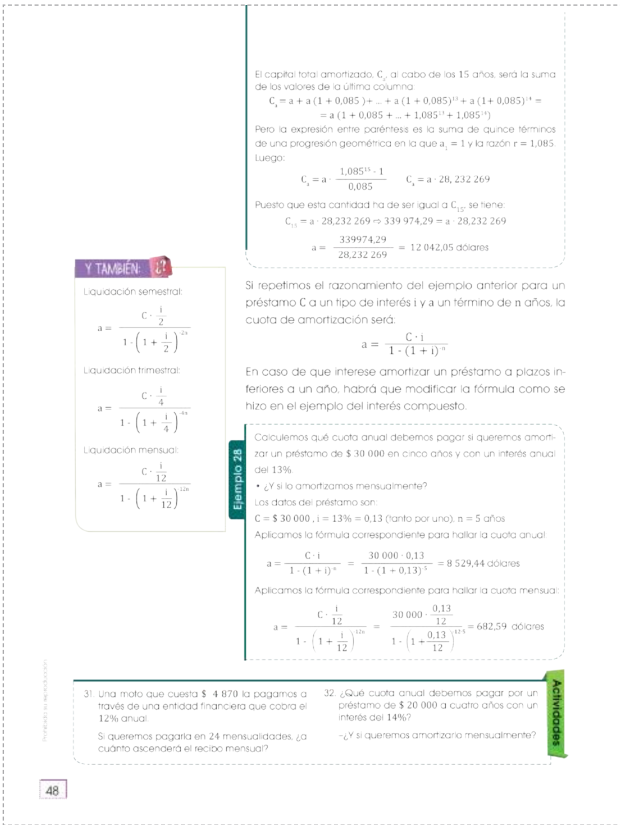
$$=\frac{20\,000\cdot 0{,}14}{1-(1+0{,}14)^{-4}}$$

$$a=\frac{2800}{0{,}407919722}=6864{,}09$$

Mensual:

$$a=\frac{C\cdot\frac{i}{12}}{1-\left(1+\frac{i}{12}\right)^{-12n}}\text{ reemplazo valores}$$

$$a=\frac{20000\cdot\frac{0{,}14}{12}}{1-\left(1+\frac{0{,}14}{12}\right)^{-12\cdot 4}}=546{,}52$$


El capital total amortizado, C_a, al cabo de los 15 años, será la suma de los valores de la última columna:

$$C_a = a + a\,(1+0{,}085)+ \dots + a\,(1+0{,}085)^{13} + a\,(1+0{,}085)^{14} =$$
$$= a\,(1 + 0{,}085 + \dots + 1{,}085^{13} + 1{,}085^{14})$$

Pero la expresión entre paréntesis es la suma de quince términos de una progresión geométrica en la que $a_1 = 1$ y la razón $r = 1{,}085$. Luego:

$$C_a = a\cdot\frac{1{,}085^{15}-1}{0{,}085} \qquad C_a = a\cdot 28{,}232\,269$$

Puesto que esta cantidad ha de ser igual a C_{15}, se tiene:

$$C_{15} = a\cdot 28{,}232\,269 \Rightarrow 339\,974{,}29 = a\cdot 28{,}232\,269$$

$$a = \frac{339974{,}29}{28{,}232\,269} = 12\,042{,}05 \text{ dólares}$$

Y TAMBIÉN: ¿?

Liquidación semestral:

$$a=\frac{C\cdot\frac{i}{2}}{1-\left(1+\frac{i}{2}\right)^{-2n}}$$

Liquidación trimestral:

$$a=\frac{C\cdot\frac{i}{4}}{1-\left(1+\frac{i}{4}\right)^{-4n}}$$

Liquidación mensual:

$$a=\frac{C\cdot\frac{i}{12}}{1-\left(1+\frac{i}{12}\right)^{-12n}}$$

Si repetimos el razonamiento del ejemplo anterior para un préstamo C a un tipo de interés i y a un término de n años, la cuota de amortización será:

$$a=\frac{C\cdot i}{1-(1+i)^{-n}}$$

En caso de que interese amortizar un préstamo a plazos inferiores a un año, habrá que modificar la fórmula como se hizo en el ejemplo del interés compuesto.

Ejemplo 28

Calculemos qué cuota anual debemos pagar si queremos amortizar un préstamo de \$ 30 000 en cinco años y con un interés anual del 13%.

• ¿Y si lo amortizamos mensualmente?

Los datos del préstamo son:

$C = \$\,30\,000$, $i = 13\% = 0{,}13$ (tanto por uno), $n = 5$ años

Aplicamos la fórmula correspondiente para hallar la cuota anual:

$$a=\frac{C\cdot i}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{30\,000\cdot 0{,}13}{1-(1+0{,}13)^{-5}} = 8\,529{,}44 \text{ dólares}$$

Aplicamos la fórmula correspondiente para hallar la cuota mensual:

$$a=\frac{C\cdot\frac{i}{12}}{1-\left(1+\frac{i}{12}\right)^{-12n}} = \frac{30\,000\cdot\frac{0{,}13}{12}}{1-\left(1+\frac{0{,}13}{12}\right)^{-12\cdot 5}} = 682{,}59 \text{ dólares}$$

Actividades

31. Una moto que cuesta \$ 4 870 la pagamos a través de una entidad financiera que cobra el 12% anual.
Si queremos pagarla en 24 mensualidades, ¿a cuánto ascenderá el recibo mensual?

32. ¿Qué cuota anual debemos pagar por un préstamo de \$ 20 000 a cuatro años con un interés del 14%?
–¿Y si queremos amortizarlo mensualmente?

48

Actividades complementarias

1) Una computadora laptop que cuesta \$ 1600; la pagamos a través de un banco que cobra el 12 % anual de interés. Si queremos pagarla en 36 mensualidades, ¿a cuánto ascenderá el recibo mensual?

2) ¿Qué cuota anual se debe pagar por un préstamo de \$ 50 000 a 10 años, con un interés del 9 %?
a) ¿Y si queremos amortizarlo mensualmente?

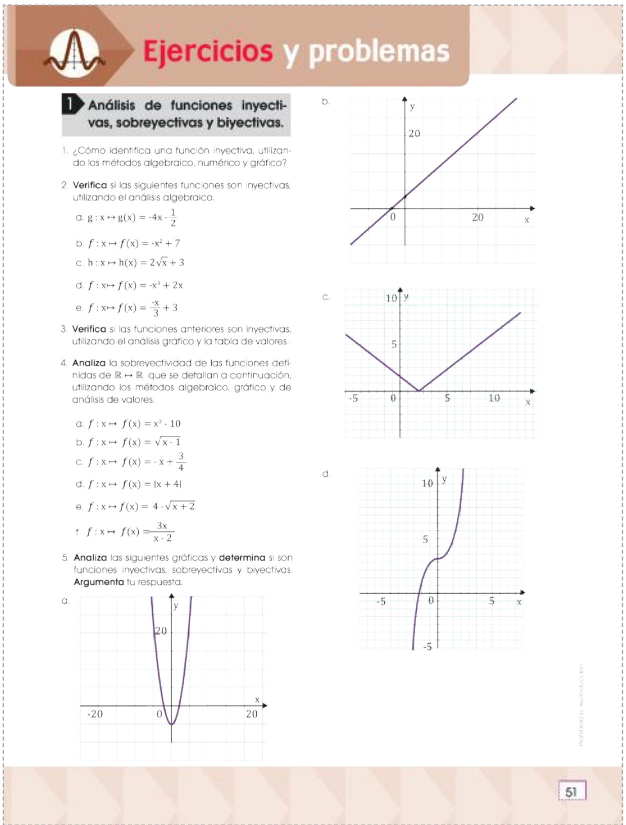
SOLUCIONARIO ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

1) costo \$ 1600; i = 12 %; n = 3; $a=\frac{C\cdot\frac{i}{12}}{1-\left(1+\frac{i}{12}\right)^{-12n}}=\frac{1600\cdot\frac{0{,}12}{12}}{1-\left(1+\frac{0{,}12}{12}\right)^{-36}}=53{,}14$

2) $C=50\,000\,;\ n=10\,;\ i=9\%$; Anual: $a=\frac{C\cdot i}{1-(1+i)^{-n}}=\frac{50\,000\cdot 0{,}09}{1-(1+0{,}09)^{-10}}=\frac{4500}{0{,}407919722}=7791$

a) $a=\frac{C\cdot\frac{i}{12}}{1-\left(1+\frac{i}{12}\right)^{-12n}}=\frac{50\,000\cdot\frac{0{,}09}{12}}{1-\left(1+\frac{0{,}09}{12}\right)^{-12\cdot 10}}=633.37$. Aproximadamente.

Página 51



Ejercicios y problemas

1 Análisis de funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.

1. ¿Cómo identifica una función inyectiva, utilizando los métodos algebraico, numérico y gráfico?
2. **Verifica** si las siguientes funciones son inyectivas, utilizando el análisis algebraico.
   a. $g : x \mapsto g(x) = -4x - \frac{1}{2}$
   b. $f : x \mapsto f(x) = -x^2 + 7$
   c. $h : x \mapsto h(x) = 2\sqrt{x} + 3$
   d. $f : x \mapsto f(x) = -x^3 + 2x$
   e. $f : x \mapsto f(x) = \frac{-x}{3} + 3$
3. **Verifica** si las funciones anteriores son inyectivas, utilizando el análisis gráfico y la tabla de valores.
4. **Analiza** la sobreyectividad de las funciones definidas de $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ que se detallan a continuación, utilizando los métodos algebraico, gráfico y de análisis de valores.
   a. $f : x \mapsto f(x) = x^3 - 10$
   b. $f : x \mapsto f(x) = \sqrt{x - 1}$
   c. $f : x \mapsto f(x) = -x + \frac{3}{4}$
   d. $f : x \mapsto f(x) = |x + 4|$
   e. $f : x \mapsto f(x) = 4 - \sqrt{x + 2}$
   f. $f : x \mapsto f(x) = \frac{3x}{x - 2}$
5. **Analiza** las siguientes gráficas y **determina** si son funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas. **Argumenta** tu respuesta.

51

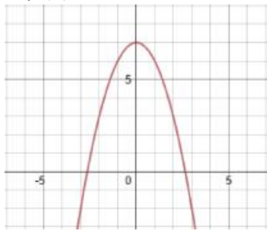
Solucionario

1. Función inyectiva
Método algebraico:
$x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
Método numérico:
Se dan valores de x distintos y se obtienen imágenes diferentes.
Método gráfico:
Si se traza una recta horizontal esta debe cortar como máximo a un punto de la gráfica.

2. a) $g(x) = -4x - \frac{1}{2}$
Si $x_1 = 1$; $g(x_1) = -\frac{9}{2}$
Si $x_2 = -1$; $g(x_2) = \frac{7}{2}$
como $x_1 \neq x_2$ y $g(x_1) \neq g(x_2)$
entonces: $g(x)$ *es inyectiva.*
b) $f(x) = -x^2 + 7$
Si $x_1 = 1$; $f(x_1) = 6$
Si $x_2 = -1$; $f(x_2) = 6$
como $x_1 \neq x_2$ y $f(x_1) = f(x_2)$
entonces: $f(x)$ *no es inyectiva.*
c) $h(x) = 2\sqrt{x} + 3$
Si $x_1 = 1$; $h(x_1) = 5$
Si $x_2 = 0$; $h(x_2) = 3$
como $x_1 \neq x_2$ y $h(x_1) \neq h(x_2)$
entonces: $h(x)$ *es inyectiva.*
d) $f(x)$ *es inyectiva.*
e) $f(x)$ *es inyectiva.*
3. a) $g(x)$ *es inyectiva.*

$$(f+g)(x) = \frac{1 + x^2 - 2x - 8}{x - 4}$$
$$(f+g)(x) = \frac{x^2 - 2x - 7}{x - 4}$$
Dominio: $x \in \mathbb{R} ; x \neq 4$
c) $(f+g)(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+3}$
Dominio: $x \in \mathbb{R} ; x \geq 1$
d) $(f+g)(x) = -x + 3 + \frac{5}{x+5}$
$$(f+g)(x) = \frac{-x^2 - 2x + 20}{x + 5}$$
Dominio: $x \in \mathbb{R} ; x \neq -5$

b) $f(x) = -x^2 + 7$



Al trazar una recta horizontal la grafica se corta en dos puntos.
c) $h(x)$ *si es inyectiva*
d) $f(x)$ *es inyectiva*

e) Inyectiva. Corta en un solo punto.
4. a) Sobreyectiva
b) No sobreyectiva
c) Sobreyectiva
d) No sobreyectiva
e) No sobreyectiva
f) No sobreyectiva
5. a y c no son biyectivas
b y d son biyectivas

e) $(f+g)(x) = -x^2 - x + x - 2 = -x^2 - 2 \, ; \, x \in \mathbb{R}$

f) $(f+g)(x) = \frac{x-3}{x+3} + \frac{2}{x+2} = \frac{x^2+x}{(x+2)(x+3)} \, ; \, x \neq -2 \wedge x \neq -3$

9. a) $\left(\frac{f}{h}\right)(x) = 4(x-1)(x-2) \, ; \; x \in \mathbb{R}$

$$\left(\frac{h}{f}\right)(x) = \frac{\frac{1}{x-2}}{4x-4} = \frac{1}{4(x-1)(x-2)} \; ; \; x \neq 2 \wedge x \neq 1$$

b) $(f-g)(x) = 4x - 4 - \sqrt{x+2} \, ; \, x \in \mathbb{R} \, ; x \geq -2$

$(f \cdot g)(x) = (4x-4) \cdot (\sqrt{x+2}) \, ; \, x \in \mathbb{R} \, ; x \geq -2$

c) No son iguales d) No son iguales e) No son iguales

10. a) $\frac{1}{x}$ b) $\frac{-2x-3}{x+2}$ 12. $(f \circ g) = 12x + 1; (g \circ f) = 12x + 3$

11. a) $12x^6 - 60x^3 + 73$ 13. a) $(f \circ g) = \frac{4x-3+3}{4} = \frac{4x}{4} = x$

b) $3\sqrt{3}$ c) 361 d) $x\sqrt{3}$ $(g \circ f) = 4\left(\frac{x+3}{4}\right) - 3 = x - 3 = x$

Página 53

Solucionario

13\. b) $(f \circ g)=\frac{\frac{1}{x-1}+1}{\frac{1}{x-1}}=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{1}{x-1}}=x$

$$(g\circ f)=\frac{1}{\frac{x+1}{x}-1}=\frac{1}{\frac{x+1-x}{x}}=x$$

c) $(f \circ g)=\frac{3\left(\frac{x-3}{5}\right)+5}{\frac{x-3}{5}}=\frac{\frac{3x+16}{5}}{\frac{x-3}{5}}=\frac{3x+16}{x-3}$

$$(g\circ f)=\frac{\left(\frac{3x+5}{x}\right)-3}{5}=\frac{\frac{5}{x}}{5}=\frac{1}{x}$$

d) $(f \circ g)=\frac{\frac{2x+3}{x+1}+1}{\frac{2x+3}{x+1}-2}=3x+4$

$$(g\circ f)=\frac{2\left(\frac{x+1}{x-2}\right)+3}{\frac{x+1}{x-2}+1}=\frac{5x-4}{2x-1}$$

14\. a) $P.\ A.=\{3,6\}$

b) $P.\ A.=\{5,3,1,-1\}$

c) $P.\ A.=\left\{9,\frac{19}{2},10,\frac{21}{2},11\right\}$

d) $P.\ A.=\left\{4,\frac{13}{3},\frac{14}{3},5,\frac{16}{3},\frac{17}{3}\right\}$

e) $P.\ A.=\left\{6,\frac{29}{5},\frac{28}{5},\frac{27}{5},\frac{26}{5},5,\frac{24}{5},\frac{23}{5}\right\}$

f) $P.\ A.=\left\{12,\frac{93}{8},\frac{45}{4},\frac{87}{8},\frac{21}{2},\frac{81}{8}\right\}$

15\. a) $S_n=\frac{8}{2}[2(9)+(8-1)2]=128$

$128=\frac{8}{2}(a_1+a_n)$; $128=4(9+a_n)$

$a_n=23$

b) $2a_1+(6-1)(-7)=a_1+90$

$2a_1-35=a_1+90$

$a_1=125$

c) $S_n=56$

d) $a_n=-16$

e) $n=0\ \wedge\ n=7$

16\. $ 14 888,26

17\. No, $ 1926,02

18\. $ 49 951,75

19\. $ 38 765,83

20\. $ 817,36

21\. Durante 13 años.

22\. a) $d=2{,}5$; $n=6$

b) $a_n=-5$; $n=8$

c) $a=12$; $n=8$

23\. a) Quinto término

$a_5=(8x-12)+(5-1)(x$

$a_5=(8x-12)+5x+25-$

$a_5=12x+8$

Sexto término

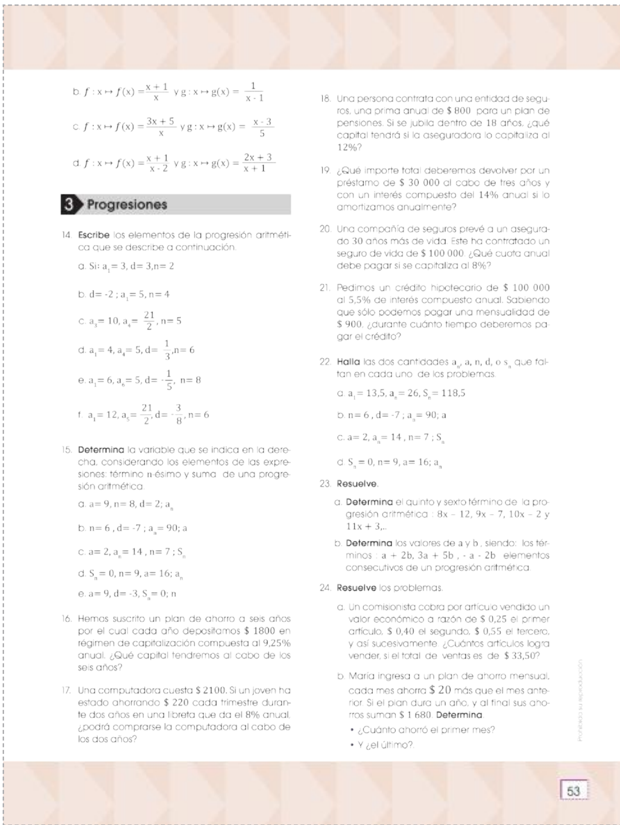
$a_6=(8x-12)+(6-1)(x$

$a_6=(8x-12)+6x+30-$

$a_6=13x+13$

b) $a=5\ \wedge\ b=-3$

24\. a) 20 artículos



b. $f: x \mapsto f(x)=\frac{x+1}{x}$ y $g: x \mapsto g(x)=\frac{1}{x-1}$

c. $f: x \mapsto f(x)=\frac{3x+5}{x}$ y $g: x \mapsto g(x)=\frac{x-3}{5}$

d. $f: x \mapsto f(x)=\frac{x+1}{x-2}$ y $g: x \mapsto g(x)=\frac{2x+3}{x+1}$

3 Progresiones

14\. **Escribe** los elementos de la progresión aritmética que se describe a continuación.

a. Si: $a_1=3$, $d=3$, $n=2$

b. $d=-2$; $a_1=5$, $n=4$

c. $a_3=10$, $a_4=\frac{21}{2}$, $n=5$

d. $a_1=4$, $a_4=5$, $d=\frac{1}{3}$, $n=6$

e. $a_1=6$, $a_6=5$, $d=-\frac{1}{5}$, $n=8$

f. $a_1=12$, $a_5=\frac{21}{2}$, $d=-\frac{3}{8}$, $n=6$

15\. **Determina** la variable que se indica en la derecha, considerando los elementos de las expresiones: término n-ésimo y suma de una progresión aritmética.

a. $a=9$, $n=8$, $d=2$; a_n

b. $n=6$, $d=-7$; $a_n=90$; a

c. $a=2$, $a_n=14$, $n=7$; S_n

d. $S_n=0$, $n=9$, $a=16$; a_n

e. $a=9$, $d=-3$, $S_n=0$; n

16\. Hemos suscrito un plan de ahorro a seis años por el cual cada año depositamos $ 1800 en régimen de capitalización compuesta al 9,25% anual. ¿Qué capital tendremos al cabo de los seis años?

17\. Una computadora cuesta $ 2100. Si un joven ha estado ahorrando $ 220 cada trimestre durante dos años en una libreta que da el 8% anual, ¿podrá comprarse la computadora al cabo de los dos años?

18\. Una persona contrata con una entidad de seguros, una prima anual de $ 800 para un plan de pensiones. Si se jubila dentro de 18 años, ¿qué capital tendrá si la aseguradora lo capitaliza al 12%?

19\. ¿Qué importe total deberemos devolver por un préstamo de $ 30 000 al cabo de tres años y con un interés compuesto del 14% anual si lo amortizamos anualmente?

20\. Una compañía de seguros prevé a un asegurado 30 años más de vida. Este ha contratado un seguro de vida de $ 100 000. ¿Qué cuota anual debe pagar si se capitaliza al 8%?

21\. Pedimos un crédito hipotecario de $ 100 000 al 5,5% de interés compuesto anual. Sabiendo que sólo podemos pagar una mensualidad de $ 900, ¿durante cuánto tiempo deberemos pagar el crédito?

22\. **Halla** las dos cantidades a_n, a, n, d, o s_n que faltan en cada uno de los problemas.

a. $a_1=13{,}5$, $a_n=26$, $S_n=118{,}5$

b. $n=6$, $d=-7$; $a_n=90$; a

c. $a=2$, $a_n=14$, $n=7$; S_n

d. $S_n=0$, $n=9$, $a=16$; a_n

23\. **Resuelve**.

a. **Determina** el quinto y sexto término de la progresión aritmética : $8x-12$, $9x-7$, $10x-2$ y $11x+3$,..

b. **Determina** los valores de a y b , siendo: los términos : $a+2b$, $3a+5b$, $-a-2b$ elementos consecutivos de un progresión aritmética.

24\. **Resuelve** los problemas.

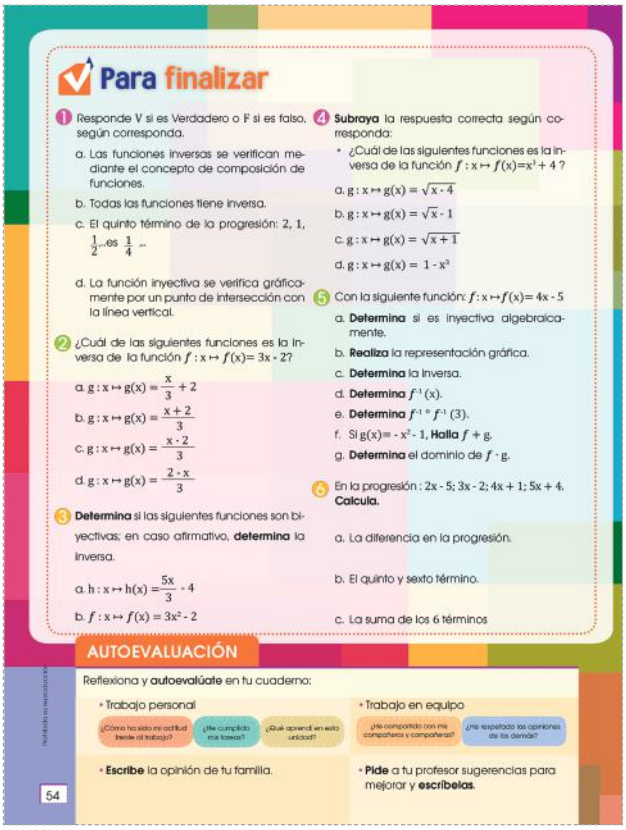
a. Un comisionista cobra por artículo vendido un valor económico a razón de $ 0,25 el primer artículo, $ 0,40 el segundo, $ 0,55 el tercero, y así sucesivamente. ¿Cuántos artículos logra vender, si el total de ventas es de $ 33,50?

b. María ingresa a un plan de ahorro mensual, cada mes ahorra $ 20 más que el mes anterior. Si el plan dura un año, y al final sus ahorros suman $ 1 680. **Determina**.

- ¿Cuánto ahorró el primer mes?
- Y ¿el último?.

53

Página 54



Para finalizar

1. Responde V si es Verdadero o F si es falso, según corresponda.
   a. Las funciones inversas se verifican mediante el concepto de composición de funciones.
   b. Todas las funciones tiene inversa.
   c. El quinto término de la progresión: 2, 1, $\frac{1}{2}$...es $\frac{1}{4}$ ...
   d. La función inyectiva se verifica gráficamente por un punto de intersección con la línea vertical.
2. ¿Cuál de las siguientes funciones es la inversa de la función $f : x \mapsto f(x) = 3x - 2$?
   a. $g : x \mapsto g(x) = \frac{x}{3} + 2$
   b. $g : x \mapsto g(x) = \frac{x+2}{3}$
   c. $g : x \mapsto g(x) = \frac{x-2}{3}$
   d. $g : x \mapsto g(x) = \frac{2-x}{3}$
3. **Determina** si las siguientes funciones son biyectivas; en caso afirmativo, **determina** la inversa.
   a. $h : x \mapsto h(x) = \frac{5x}{3} - 4$
   b. $f : x \mapsto f(x) = 3x^2 - 2$
4. **Subraya** la respuesta correcta según corresponda:
   - ¿Cuál de las siguientes funciones es la inversa de la función $f : x \mapsto f(x) = x^3 + 4$?

   a. $g : x \mapsto g(x) = \sqrt{x-4}$
   b. $g : x \mapsto g(x) = \sqrt{x} - 1$
   c. $g : x \mapsto g(x) = \sqrt{x+1}$
   d. $g : x \mapsto g(x) = 1 - x^3$
5. Con la siguiente función: $f : x \mapsto f(x) = 4x - 5$
   a. **Determina** si es inyectiva algebraicamente.
   b. **Realiza** la representación gráfica.
   c. **Determina** la inversa.
   d. **Determina** $f^{-1}(x)$.
   e. **Determina** $f^{-1} \circ f^{-1}(3)$.
   f. Si $g(x) = -x^2 - 1$, **Halla** $f + g$.
   g. **Determina** el dominio de $f \cdot g$.
6. En la progresión : $2x - 5; 3x - 2; 4x + 1; 5x + 4$. **Calcula.**
   a. La diferencia en la progresión.
   b. El quinto y sexto término.
   c. La suma de los 6 términos

AUTOEVALUACIÓN

Reflexiona y **autoevalúate** en tu cuaderno:

- Trabajo personal

¿Cómo ha sido mi actitud frente al trabajo? ¿He cumplido mis tareas? ¿Qué aprendí en esta unidad?

- Trabajo en equipo

¿He compartido con mis compañeros y compañeras? ¿He respetado las opiniones de los demás?

- **Escribe** la opinión de tu familia.
- **Pide** a tu profesor sugerencias para mejorar y **escríbelas**.

54

Solucionario

1. a) Verdadero b) Falso
c) Falso d) Verdadero

2. $(f \circ g)(x) = 3\left(\frac{x+2}{3}\right) - 2 = x$

$$(g \circ f)(x) = \left(\frac{3x - 2 + 2}{3}\right) = x$$

Por lo tanto, es la b.

3. a) Si es biyectiva

$$h(x) = \frac{5x}{3} - 4$$

$y = \frac{5x}{3} - 4$, despejamos x

$3y = 5x - 12\,;\;\; x = \dfrac{3y + 12}{5}$

$$h^{-1}(x) = \frac{3x + 12}{5}$$

b) No es biyectiva.
c) No es biyectiva.
d) Si es biyectiva.

$$f(x) = \frac{x+3}{3}$$

$y = \frac{x+3}{3}$, despejamos x

$3y = x + 3;\;\; x = 3y - 3$

$f^{-1}(x) = 3x - 3$

e) Si es biyectiva.

$f(x) = 3x^3 - 5$

$y = 3x^3 - 5,$ despejamos x

$3x^3 = y + 5\;;\;\; x = \sqrt[3]{\dfrac{y+5}{3}}$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x+5}{3}}$$

4. $f(x) = x^3 + 4$

$y = x^3 + 4,$ despejamos x

$x^3 = y - 4\;;\;\; x = \sqrt[3]{y - 4}$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 4}$

Por lo tanto, es la opción a.

5. $f(x) = 4x - 5$

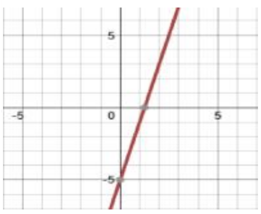
a) para $x_1 = 1$ $\mathit{se\ tiene\ que}\ f(1) = -1$

para $x_2 = -1$ $\mathit{se\ tiene\ que}\ f(-1) = -9$

$x_1 \neq x_2\;;\;\; f(x_1) \neq f(x_2)$

entonces, $f(x)$ *es inyectiva*

b) $f(x) = 4x - 5$



c) y d) $f^{-1} = \frac{x+5}{4}$

e) $(f^{-1} \circ f^{-1})(3) = \frac{7}{4}$

f) $(f + g)(x) = -x^2 + 4x - 6$

g) $(f \cdot g)(x) = -4x^3 - 5x^2 - 4x + 5\;;\;\; x \in \mathbb{R}$

6. a) $d = x + 3$ b) 5.° y 6.° términos: $6x + 7\,; 7x + 10.$ c) 27x+15

TIPOS DE DEPÓSITOS	
Cuenta corriente	*Cuenta de ahorros a la vista*
Depósito en efectivo hecho en una entidad financiera y que tiene una disponibilidad inmediata para el titular. — La entidad informa al cliente de su estado de cuentas mediante el envío de extractos bancarios. — El cliente puede disponer de sus fondos en cualquier momento, retirar dinero en metálico, firmar cheques, ordenar transferencias a otras cuentas corrientes... — Como consecuencia de esta disponibilidad, las entidades financieras suelen pactar tipos de interés muy bajos, que en la mayoría de los casos no llegan ni al 1% anual.	Depósito en efectivo hecho en una entidad financiera y que tiene una disponibilidad inmediata para el titular a través de su libreta de ahorros. — La entidad financiera entrega al cliente una libreta de ahorros en la que se consignan las operaciones. No se envían extractos bancarios. — Para ingresar o retirar dinero es necesario presentar la libreta en la ventanilla de la entidad financiera y no se pueden utilizar cheques para mover fondos. — Las libretas de ahorros suelen tener unos intereses superiores a las cuentas corrientes, ya que la liquidez está más restringida. El tipo de interés varía según la modalidad del ahorro.
Cuenta de ahorros a plazo fijo	*Plan de ahorro*
Depósito que el cliente se compromete a mantener durante un período determinado. — Las entidades financieras suelen ofrecer para este tipo de depósitos de menor liquidez un tipo de interés superior al de las cuentas corrientes o las cuentas de ahorros. — El interés es más alto cuanto más largo es el tiempo pactado y los intereses suelen abonarse al finalizar el plazo. — En caso de que se quiera retirar el depósito antes del período convenido, la entidad financiera aplica una penalización.	Depósito constituido por un conjunto de pagos sucesivos y planificados en el tiempo, con el fin de disponer de un capital en un momento determinado. — Las entidades financieras ofrecen para estos depósitos elevados tipos de interés además de ventajas fiscales como, por ejemplo, desgravaciones en el pago de los impuestos. — La característica común entre los diversos tipos de planes de ahorro es la flexibilidad de las aportaciones (anual, trimestral, mensual). — La recuperación del capital final puede efectuarse de diversas maneras: en un único pago, como una renta temporal o bien como una renta vitalicia.

Cuentas ahorro vivienda

Existen muchos productos financieros en los cuales las personas que ahorran una parte de sus ingresos pueden obtener una buena rentabilidad y ventajas fiscales. Entre ellos están las **cuentas ahorro vivienda.**

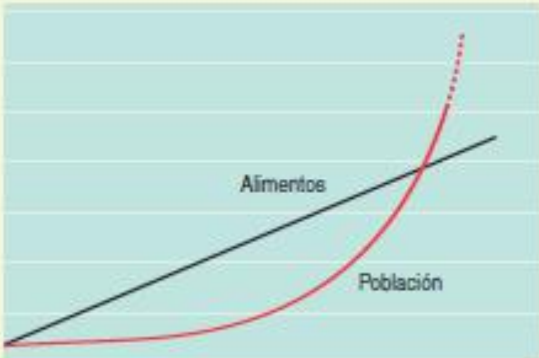
Una de las inversiones más importante que realizamos a lo largo de la vida es la adquisición de nuestra vivienda habitual. La compra de esta vivienda ofrece una serie de descuentos en el pago del Impuesto sobre la Renta de las Personas Físicas (IRPF). Aquellos que tengan previsto comprarse su primera casa o piso en los próximos años pueden empezar a beneficiarse de estas ventajas fiscales antes de realizar la compra. Solamente tienen que acudir a cualquier entidad financiera y comprometerse a destinar el dinero depositado en la cuenta de ahorro a la compra de una vivienda en los próximos cuatro, seis u ocho años, dependiendo de las normas fiscales que rijan en ese territorio. Si en este plazo no se realizara la adquisición, se perderían los derechos y se debería devolver a Hacienda las desgravaciones realizadas con el pago de los correspondientes intereses.

Progresiones y malthusianismo

Thomas R. Malthus (Dorkin 1766-Bath 1834) fue un economista y demógrafo inglés, conocido fundamentalmente por su teoría sobre la evolución de la población, que recibe el nombre de **malthusianismo.**

Según esta teoría, una población aumenta según los términos de una progresión geométrica de crecimiento rápido, mientras que los alimentos lo hacen según los términos de una progresión de crecimiento más lento.

La figura muestra de forma cualitativa las consecuencias de lo anterior. Como ves, a partir de un cierto instante, la población supera a los recursos disponibles. En consecuencia, la propia naturaleza se encargaría de frenar el crecimiento demográfico a causa del hambre y las enfermedades.



Afortunadamente, el progreso de las técnicas de producción de alimentos y el desarrollo de la medicina han podido evitar el desolador panorama que preveía Malthus.

Nombre: ____________________ Fecha: ____________

Dada la función $f(x)=\dfrac{2}{x^2+1}$, calcula:

a) Las imágenes de – 4, –1, 2 y 3.

b) La antiimagen o antiimágenes de $\frac{1}{2}$, 1, 2 y 3.

2.

Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{5}{x-3}$

b) $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-6x+5}$

c) $h(x)=\sqrt{x+1}$

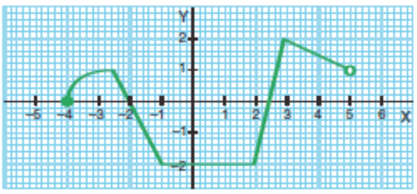
d) $i(x)=\sqrt{2-x^2}$

e) $j(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$

f) $k(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x}}$

3.

En la figura se representa la función *f.*



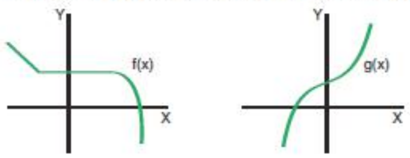
a) Indica su dominio y su recorrido.

b) Halla la imagen de –1 y 3.

c) Halla la antiimagen o antiimágenes de –2 y 0.

4. (Cambiar la palabra exhaustividad por la palabra sobreyectividad

Estudia a partir de su gráfica la inyectividad, la exhaustividad y la biyectividad de las funciones *f* y *g.*



5.

Expresa la función $f(x)=(x-1)^2$ como composición de dos funciones.

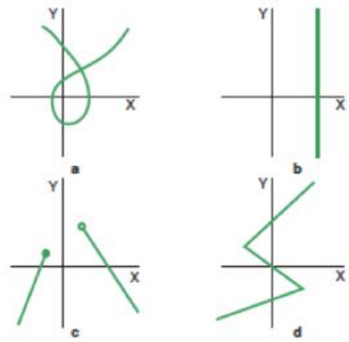
Página 47 Pág. 62. Adaptación curricular ES3 114890 MAT MC GL CAS.

RECURSOS PARA LA EVALUACIÓN

Continuar con la numeración. Cambiar moneda a $.

6.

Indica cuáles de las siguientes gráficas corresponden a una función. Justifica la respuesta.



7.

Dada la función $f(x)=2x-1$, calcula su función inversa f^{-1} y represéntalas sobre un mismo sistema de coordenadas.

8. Página 137. Texto. Matemática I. MHCS.

¿Cuál de las siguientes funciones tiene como imagen –1?

a) $f(x)=x^2$ *b)* $f(x)=\sqrt{x}$ *c)* $f(x)=x$

9.

Considera las funciones $f(x)=x^2+1$ y $g(x)=5x$. ¿Cuál es la función compuesta $g\circ f$?

a) $5x^2+1$ *b)* $5x^2+5$ *c)* $25x^2+1$

10. Dadas las funciones $f(x)=x^2+2x+1$ y $g(x)=x^2-1$. Determina:

a) $(f+g)(1)$

b) $(g-f)(0)$

c) $(f\cdot g)(x)$

d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

e) $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$

1. Calcula el término general de las siguientes sucesiones considerar por separado numerador y denominador.

a) $\frac{13}{2}, \frac{20}{4}, \frac{27}{6}, \frac{34}{8}, \frac{41}{10}...$ c) $\frac{1}{2}$

b) $15, \frac{25}{2}, \frac{35}{3}, \frac{45}{4}, \frac{55}{5}...$ d) $\frac{4}{3}$

2. Escribe el término general de las sucesiones formadas p

a) Los múltiplos de 5. d) Lo

b) Los números pares. e) Lo

c) Los números naturales. f) Los

3. Las sucesiones pueden representarse en un sistema de nadas cartesianas. Para ello asignamos a cada término del plano cuya abscisa es igual al lugar que ocupa el t cuya ordenada es el valor de este.

Observa la imagen de la derecha, que corresponde a la r tación gráfica de una sucesión.

a) Escribe los cuatro primeros términos.

b) ¿Se trata de una progresión aritmética? En caso afi calcula su diferencia.

c) ¿Se trata de una progresión geométrica? En caso afi calcula su razón.

d) Escribe la expresión del término general de la sucesió

e) ¿Podrías decir qué le ocurre al valor de un término qu un lugar muy avanzado?

4. Observa las siguientes construcciones con monedas. Ca cione el número de monedas utilizadas en cada constru cada triángulo.

5. a) ¿Qué condiciones debe cumplir la razón de una progr

b) ¿Qué condiciones debe cumplir la diferencia de una p

6. Un joven ahorra cada mes 2 € más que el mes anterior Determina:

a) La cantidad que ahorró el primer mes.

b) La cantidad que ahorró el último mes.

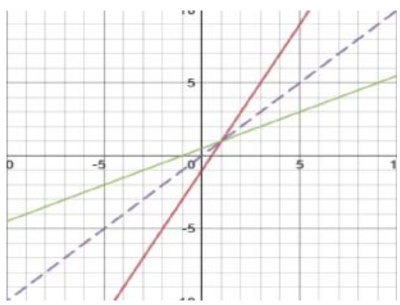
7. El número de bacterias de un cultivo aumenta un 25 % ca bacterias habrá al cabo de cuatro horas?

5. $g(x) = x^2$; $h(x) = x - 1$; $(g \circ h)(x)$

6. Gráfica a, b y d no son funciones porque al trazar una recta vertical, esta corta al menos en dos puntos a la gráfica.

Gráfica c sí es función porque al trazar una recta vertical, esta solo corta como máximo en un punto a la gráfica.

7. $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$



8. La opción c. 9. La opción b.

$f(3) = \frac{1}{5}$

b) $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}, f^{-1}(1) = \{-1, 1\}$

$f^{-1}(2) = \{0\}, f^{-1}(3) = \emptyset$

2. a) $D(f) = \mathbb{R} - \{-2,3\}$
b) $D(g) = \mathbb{R} - \{1,5\}$
c) $D(h) = [-1, +\infty)$
d) $D(i) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
e) $D(j) = (0, +\infty)$
f) $D(k) = (0, +\infty)$

3. a) $D(f) = [-4, 5)$; $R(f) = [-2,2]$
b) $f(-1) = -2$; $f(3) = 2$
c) $f^{-1}(-2) = [-1,2], f^{-1}(0) = \left\{-1, -2, \frac{5}{2}\right\}$

4. a) f *no es inyectiva*. Para diferentes valores de x, existe al menos dos valores iguales de y.
f *es sobreyectiva*. El dominio y rango de f son iguales, es decir, los $\mathbb{R}$.
f *no es biyectiva*.

b) g *es inyectiva*. Para diferentes valores de x, existen distintos valores de y.
g *es sobreyectiva*. El dominio y rango de f son iguales, es decir los $\mathbb{R}$.
g *es biyectiva*.

11.
a) $a_n = \frac{7n+6}{2n}$ c) $a_n = \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}}$

12.
b) $a_n = \frac{10n+5}{n}$ d) $a_n = \frac{n+3}{n+2}$

a) $a_n = 5n$ d) $a_n = 2n - 1$
b) $a_n = 2n$ e) $a_n = n^2$
c) $a_n = n$ f) $a_n = n^3$

13.a)
b)
c)

$a_1 = 1$; $a_2 = 0{,}5$; $a_3 = 0{,}25$; $a_4 = 0{,}125$

No se trata de una progresión aritmética porque:
$a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$

GL

Se trata de una progresión geométrica porque:
$r = \frac{0{,}5}{1} = \frac{0{,}25}{0{,}5} = \frac{0{,}125}{0{,}25} = 0{,}5$

d) $a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}$

e) Tiende a 0 porque, si n, es un valor muy grande, 2^n tiende a infinito y el cociente $\frac{1}{2^{n-1}}$ tiende a 0.

14. $a_n = \frac{n^2 + n}{2}$, donde n es el número de monedas que hay en la base de cada triángulo.

15. a) Debe ser un número real mayor que 1 *(r >*

b) Debe ser un número real mayor que 0 *(d > 0)*.

16.
$S = 80$; $a_1 =$
5. *Primer mes ahorro* \$5, *último mes* \$75

17. Durante 4.ª hora: 390 625 ; al cabo de 4.ª hora: 1

1. Escribe los dos siguientes términos de estas sucesiones:

a) 3, 5, 9, 11, 15, 17, 21,...

b) 10, 7, 4, 1, −2, −5...

c) 1, −2, 3, −4, 5, −6, 7...

d) $\frac{3}{4}, \frac{4}{6}, \frac{5}{8}, \frac{6}{10}...$

2. Dada la sucesión 1, 5, 9, 13, 17..., di qué valores corresponden a a_8 y a a_{10}.

3. Indica en cada caso si la sucesión es creciente (C), decreciente (D) o ninguna de las dos (N):

a) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}...$

b) −4, 5, −3, 6, −2, 7, 0, 8...

c) 1, 2, 4, 8, 16, 32...

d) 20, 13, 6, −1, −8...

4. Escribe los cuatro primeros valores de cada sucesión:

a) $a_n = n^2 + 2$

b) $a_n = \frac{n-3}{n}$

c) $a_n = -2n^3$

d) $a_n = n^2 + n - 1$

5. Averigua el criterio por el que se forman las siguientes sucesiones:

a) 2, 8, 14, 20, 26, 32...

b) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{8}, \frac{27}{16}, \frac{81}{32}...$

c) 16, 8, 4, 2, 1...

d) 1, −2, 3, −4, 5, −6, 7...

PROGRESIONES ARITMÉTICAS

1. Identifica qué sucesiones son progresiones aritméticas; en cada caso, señala su diferencia y añade dos términos más:

a) 9, 13, 17, 21, 25...

b) 2, 4, 7, 10, 14, 20...

c) 3, 6, 12, 24, 48, 96...

d) −20, −18, −16, −14, −12...

e) $4, \frac{7}{2}, 3, \frac{5}{2}, 2, \frac{3}{2}...$

f) 200, 100, 50, 25...

2. Halla el término general de una progresión aritmética cuyo primer término es 4 y su diferencia −3. Calcula también a_7 y a_{10}.

3. Halla la suma de los 50 primeros números naturales.

4. En la progresión −1, 4, 9, 14, 19..., halla el término a_{11} y la suma de los 15 primeros términos.

5. Durante varios años se han introducido, en un parque natural, varios ejemplares de leopardo. Observa en la siguiente tabla el registro anual de leopardos introducidos.

Año	1	2	3	4	5
Leopardos	2	5	8	11	14

Comprueba que la sucesión 2, 5, 8, 11, 14... es una progresión aritmética e indica su diferencia.

Calcula el total de ejemplares reintroducidos al cabo de 10 años.

6. Las edades de tres hermanas están en progresión aritmética y suman 27. Sabiendo que la edad de la mayor es el doble de la edad de la menor, calcula las tres edades.

PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

1. Identifica qué sucesiones son progresiones geométricas; en cada caso, señala su razón y añade dos términos más:

a) 1, 3, 9, 27, 81...

b) 6, −6, 7, −7, 8, −8...

c) 400, 100, 25, $\frac{25}{4}$, $\frac{25}{16}$...

d) $\sqrt{16}, \sqrt{12}, \sqrt{8}, \sqrt{4}$...

e) 3, 6, 12, 18, 24...

f) $\frac{-1}{5}$, −1, −5, −25, −125...

2. Halla el término general de una progresión geométrica cuyo primer término es 6 y el segundo es 9. Calcula también a_5 y a_8.

3. El segundo término de una progresión geométrica es 32 y el cuarto es 8. Halla el término general.

4. En la progresión −3, 6, −12, 24, −48, 96..., halla el término a_{10} y la suma de los 12 primeros términos.

5. La administración de un parque natural tiene asignado un presupuesto anual para la repoblación forestal que evoluciona como muestra la siguiente tabla:

Año	1	2	3	4	5
Presupuesto (€)	375	750	1500	3000	6000

Calcula el término general de la progresión y el presupuesto total destinado al cabo de 8 años.

6. Un herrero vendió un caballo, con sus 4 herraduras de 6 clavos cada una a un capitán del ejército. El herrero le pidió al capitán que pagara por el caballo según el número de clavos, tal y como se indica a continuación: por el primer clavo, 1 moneda; por el segundo, 2 monedas; por el tercero, 4 monedas, y así sucesivamente hasta el último clavo. El capitán, creyendo que hacía un buen negocio, aceptó.

¿Cuánto tuvo que pagar el capitán por el caballo?

¿Cuánto le costó al capitán cada uno de los clavos? ¿Y cada herradura?

Sucesiones

1. a) 23, 25...
b) $-8, -11$...
c) $-8, 9$...
d) $\frac{7}{12}, \frac{8}{14}$...

2. $a_8 = 29$; $a_{10} = 37$

3. a) Creciente
b) Ninguna
c) Creciente
d) Decreciente

4. a) 3, 6, 11, 18
b) $-2, \frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{4}$
c) $-2, -16, -54, -128$
d) 1, 5, 11, 19

5. a) Sumar 6.
b) Multiplicar por $\frac{3}{2}$.
c) Dividir entre 2.
d) Alternar sucesiva y ordenadamente, números impares positivos y números pares negativos.

Progresiones aritméticas

1. a) Progresión aritmética de $d = 4$.
Siguientes términos: 29, 33...
b) No es una progresión aritmética.
c) No es una progresión aritmética.
d) Progresión aritmética de $d = 2$.
Siguientes términos: $-10, -8$...
e) Progresión aritmética de $d = \frac{-1}{2}$.
Siguientes términos: 1, $\frac{1}{2}$...
f) No es una progresión aritmética.

2. $a_n = 4 + (-3) \cdot (n - 1) = 7 - 3n$
$a_7 = 7 - 3 \cdot 7 = -14$
$a_{10} = 7 - 3 \cdot 10 = -23$

3. $S = \frac{1 + 50}{2} \cdot 50 = 1\,275$

4. Progresión aritmética donde: $d = 5$.
$a_{11} = -1 + 10 \cdot 5 = 49$
$a_{15} = -1 + 14 \cdot 5 = 69$
$S = \frac{-1 + 69}{2} \cdot 15 = 510$

5. Es una progresión aritmética porque:
$5 - 2 = 8 - 5 = 11 - 8 = 14 - 11 = ... = 3$
La diferencia d es 3.

Recurso para la evaluación

$a_{10} = 2 + 9 \cdot 3 = 29$

$S = \dfrac{2+29}{2} \cdot 10 = 155$

Al cabo de 10 años se han reintroducido 155 leopardos.

6. $27 = \dfrac{x + 2x}{2} \cdot 3 \rightarrow 9x = 54 \rightarrow x = 6$

La primera hermana tiene 6 años; la tercera, el doble (12 años), y la segunda tiene 9 años. $(27 - 6 - 12 = 9)$.

Los números 6, 9 y 12 forman una progresión aritmética.

Progresiones geométricas

1. a) Progresión geométrica de $r = 3$.

Siguientes términos: 243, 729...

b) No es una progresión geométrica.

c) Progresión geométrica de $r = \dfrac{1}{4}$.

Siguientes términos: $\dfrac{25}{64}, \dfrac{25}{256}$...

d) No es una progresión geométrica.

e) No es una progresión geométrica.

f) Progresión geométrica de $r = 5$.

Siguientes términos: $-625, -3125$...

2. $r = \dfrac{9}{6} = \dfrac{3}{2}$

$a_5 = 6 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^4 = \dfrac{243}{8}$

$a_8 = 6 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^7 = \dfrac{6561}{64}$

3. $a_2 = a_1 \cdot r = 32, \ \ldots, \ a_4 = a_1 \cdot r^3 = 8$

$\dfrac{a_4}{a_2} = \dfrac{a_1 \cdot r^3}{a_1 \cdot r} \rightarrow r^2 = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4} \rightarrow r = \dfrac{1}{2}$

$a_1 = 64$

$a_n = 64 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \dfrac{128}{2^n}$

4. $r = \dfrac{6}{-3} = -2$

$a_{10} = -3 \cdot (-2)^9 = 1536$

$a_{12} = -3 \cdot (-2)^{11} = 6144$

$S = \dfrac{6144 \cdot (-2) - 3}{-2 - 1} = 4097$

5. $r = 750 : 375 = 2$

La razón r de la progresión es 2.

$a_n = 375 \cdot 2^{n-1}$

$a_8 = 375 \cdot 2^7 = 48000$

$S = \dfrac{48000 \cdot 2 - 375}{2 - 1} = 95625$

Al cabo de 8 años se habrán destinado 95 625 € de presupuesto.

6. $a_{24} = a_1 \cdot r^{23} = 2^{23} = 4194304$

$S = \dfrac{a_{24} \cdot r - a_1}{r - 1} = 4194304 \cdot 2 - 1 = 8388607$

Tuvo que pagar 8 388 607 monedas.

Cada clavo le costó 349 525,29 monedas y cada herradura, 2 097 151,75 monedas.

CICLO DEL APRENDIZAJE

¿Cómo dinamizo el aula?

Experiencia

- Aseguramiento del nivel de partida mediante una lluvia de ideas sobre funciones, tipos y gráficas.

  Manipulación de material con fotos y representación de distintos tipos de funciones y sus gráficos.

  Resolución de problemas de aplicación de funciones en el ámbito financiero y comercial.

Conceptualización

- Uso de diagramas que resuman los principales conceptos, propiedades, procedimientos, gráficas y análisis de diferentes funciones.
- Uso de *softwares* que facilitan la representación gráfica y posterior interpretación de información.

Reflexión

¿Qué podemos decir sobre las funciones y sus aportes en la economía?

Identificación de funciones y su aplicación en las finanzas y economía.

Reflexión y análisis sobre dichas aplicaciones.

Aplicación

¿Por qué es importante conocer, graficar, analizar e interpretar gráficas de funciones?

- Planteamiento y resolución de problemas que apliquen funciones en el ámbito financiero y comercial.

46. Escribe los diez primeros términos de las siguientes sucesiones cuyos términos generales son:

$a_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$ *c)* $c_n = \dfrac{1}{n^2}$

$b_n = n^2 - 2n$ *d)* $d_n = \dfrac{n^2-1}{n}$

47. De las siguientes sucesiones di cuáles son progresiones geométricas.

a) 2, –6, 18, –54, ...   *c)* 2, –2, 2, –2, 2, ...

b) 1, 3, 2, 4, 3, 5, ...   *d)* $\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \frac{1}{48}, \ldots$

— Halla la expresión del término general y el valor del término a_{10} de las que sean progresión geométrica.

Sol.: *a)* $a_n = 2\cdot(-3)^{n-1}, a_{10} = 39366$;
c) $a_n = 2\cdot(-1)^{n-1}, a_{10} = -2$;
d) $a_n = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, a_{10} = \frac{1}{3072}$

48. Halla el producto de los diez primeros términos de una progresión geométrica en cada uno de los siguientes casos:

a) $a_1 = 243$ y $r = \frac{1}{3}$

b) $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$

c) $a_1 = \frac{1}{4}$ y $r = 4$

Sol.: *a)* $P_{10} = 243$; *b)* $P_{10} = 2^{-45}$; *c)* $P_{10} = 4^{35}$

49. Halla la suma de los ocho primeros términos de una progresión geométrica cuya razón es $r = 2$ y cuyo primer término es $a_1 = 3$.

Sol.: $S_8 = 765$

50. Halla la suma ilimitada de una progresión geométrica sabiendo que $a_1 = 5$ y $r = \frac{1}{4}$.

Sol.: $\frac{20}{3}$

51. Un número decimal periódico puede expresarse como la suma de los términos de una progresión geométrica ilimitada decreciente. Esto permite utilizar la fórmula de la suma ilimitada para hallar su fracción generatriz.

Utiliza $S_\infty = \dfrac{a_1}{1-r}$ para hallar la fracción generatriz de $0,\overline{12}$, teniendo en cuenta que:

$$0,\overline{12} = 0,12 + 0,0012 + 0,000012 + \ldots$$

Sol.: $\frac{4}{33}$

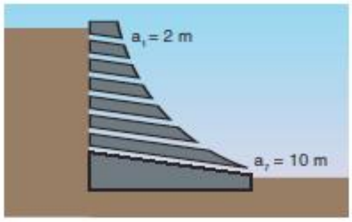
52. Halla el primer término de una progresión geométrica sabiendo que su razón es $r = \frac{1}{4}$ y su suma ilimitada es 8.

Sol.: $a_1 = 6$

53. Dados los números 24 y 648, interpola dos términos geométricos.

Sol.: $r = 3$

54. La figura representa la sección de un muro de contención atravesado por canales de desagüe.



Sabiendo que el primer canal mide 2 m y el último 10 m y que sus longitudes están en progresión geométrica, ¿cuánto miden los restantes?

Sol.: 2,62; 3,42; 4,47; 5,85; 7,65

55. Las edades de tres hermanos están en progresión geométrica y suman 21. Sabiendo que la edad del menor es 3, calcula la edad de los otros dos.

Sol.: 3, 6, 12

56. Un comerciante comienza la temporada de rebajas descontando un 3% en el precio de los artículos y cada semana que pasa descuenta un 3% del precio de la semana anterior. Si la temporada de rebajas dura ocho semanas, ¿cuál será el precio, al final de las rebajas, de un artículo que sin rebajar costaba 42,07 €?

— ¿Cuál sería el precio si se descontara directamente el 24%?

Sol.: 32,97 €, 31,97 €

57. De una cantera se han extraído este año 800 m³ de roca. Si cada año se extrae un 15% más que el anterior, ¿cuántos m³ de roca se habrán extraído al cabo de seis años?

Sol.: 7002,99 m³

58. El primer día de perforación de un túnel se avanzan 3 m. Sabiendo que el túnel medirá 6 km y que cada día se avanzará un 5% más que el anterior, ¿cuánto tiempo tardaremos en finalizar la perforación del túnel?

Sol.: 95 días

La regla de Hondt

Después de unas elecciones al parlamento (autonómico, estatal o europeo) hay que asignar a cada partido político los escaños que le corresponden. Esta asignación no se realiza de manera estrictamente proporcional al número de votos obtenido, sino aplicando la llamada ley o **regla de Hondt**.

Para la aplicación de este método se procede de la siguiente manera. En primer lugar, se ordenan las distintas candidaturas según el resultado de mayor a menor número de votos obtenidos. En cada una de ellas se divide este número de votos por 1, 2, 3... y así sucesivamente hasta el número de escaños que le corresponde a esa circunscripción, y se van atribuyendo los escaños a aquellas candidaturas que vayan obteniendo los cocientes mayores, siguiendo un orden decreciente. Si en algún momento los cocientes correspondientes a distintas candidaturas coinciden, el escaño se asigna a aquella que tenga un número de votos totales mayor. Si éste también coincidiera, el primer empate se resolvería por sorteo, y los sucesivos de forma alternativa.

En algunos parlamentos a esta regla se le añade una modificación, que consiste en que un partido, para poder tener representación parlamentaria, ha de conseguir un determinado porcentaje de los votos totales. En España este porcentaje está en el 3 % en el caso de las elecciones generales. En las elecciones municipales y algunas autonómicas, este porcentaje se sitúa en el 5 %, por debajo del cual, en ningún caso el partido puede tener representación.

Naturaleza y números

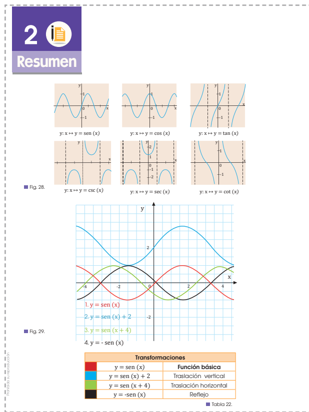
Desde Arquímedes hasta la actualidad, numerosos científicos han investigado modelos numéricos que permitieran comprender la naturaleza.

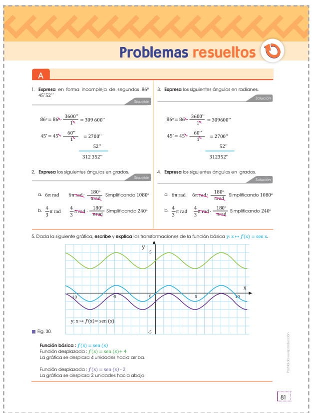
Leonardo de Pisa (1180-1250), conocido como Fibonacci, estudió cierto tipo de problemas que daban lugar a una sucesión de números en que cada término, a partir del tercero, es la suma de los dos anteriores: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21...

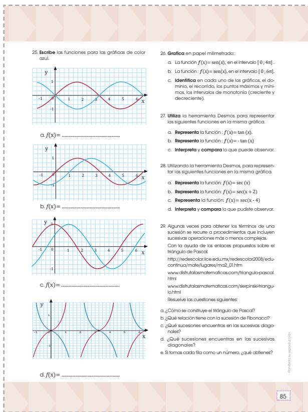
Sorprendentemente, esta sucesión, que recibe su nombre, es un modelo numérico que permite describir fenómenos naturales que nada tienen que ver con los problemas que preocupaban al matemático italiano.

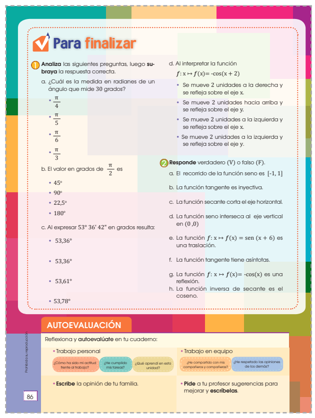
A modo de ejemplo, la disposición en una doble espiral (a derecha y a izquierda) de las semillas de un girasol o la pauta de crecimiento del *Nautilus Pompilus* pueden describirse mediante términos sucesivos de una sucesión de Fibonacci.

Funciones Trigonométricas









UNIDAD 2

Ejes temáticos	Contenidos
Funciones trigonométricas	Funciones trigonométricas
	• Gráfica de la curva trigonométrica seno.......páginas 60-61
	• Gráfica de la curva trigonométrica coseno.......páginas 62-63
	• Gráfica de la curva trigonométrica tangente.......páginas 64
	• Gráfica de la curva trigonométrica cosecante ....páginas 65
	Gráfica de la curva trigonométrica secante.......página 66
	Gráfica de la curva trigonométrica cotangente.......página 67
	Relación gráfica de las funciones seno y cosecante.......página 68
	Comparación de las características de las funciones seno y cosecante ......página 68
	Relación gráfica de las funciones seno y secante.......página 69
	Comparación de las características de las funciones seno y secante.......página 69
	Relación gráfica de las funciones tangente y cotangente.......página 70
	Comparación de las características de las funciones tangente y cotangente...página 70
	Uso de las TIC para graficar funciones
	• Transformaciones e interpretación de funciones.......páginas 74-79
	• Resumen funciones trigonométricas....... página 80
	• Problemas resueltos.......página 81
	• Ejercicios y problemas.......páginas 82-85
	• Para finalizar.......página 86
	• Zona WiFi.......página 87

LOGO INSTITUCIONAL	NOMBRE DE LA INSTITUCIÓN	AÑO LECTIVO

PLAN DE UNIDAD TEMÁTICA

1. DATOS INFORMATIVOS:

Docente:	Nombre del docente que ingresa la información	Área/asignatura:	MATEMÁTICA	Grado/Curso:	2° BACHILLERATO	Paralelo:	
N.º de unidad de planificación:	2	Título de unidad de planificación:	FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS	Objetivos específicos de la unidad de planificación:		Proponer soluciones creativas a situaciones concretas de la realidad nacional y mundial mediante la aplicación de las operaciones básicas de los diferentes conjuntos numéricos, el uso de modelos funcionales, algoritmos apropiados, estrategias y métodos formales y no formales de razonamiento matemático que lleven a juzgar con responsabilidad la validez de procedimientos y los resultados en un contexto. Desarrollar la curiosidad y la creatividad en el uso de herramientas matemáticas al momento de enfrentar y solucionar problemas de la realidad nacional demostrando actitudes de orden, perseverancia y capacidades de investigación.	
PERÍODOS	24			SEMANA DE INICIO:			

2. PLANIFICACIÓN

DESTREZAS CON CRITERIOS DE DESEMPEÑO A SER DESARROLLADAS:	CRITERIOS DE EVALUACIÓN
• Definir las funciones seno, coseno y tangente a partir de las relaciones trigonométricas en el círculo trigonométrico (unidad) e identificar sus respectivas gráficas a partir del análisis de sus características particulares. • Reconocer y graficar funciones periódicas determinando el período y amplitud de las mismas, su dominio recorrido, monotonía, paridad. • Reconocer las funciones trigonométricas (seno, coseno, tangente, secante, cosecante y cotangente), sus propiedades y las relaciones existentes entre estas funciones y representarlas de manera gráfica con apoyo de las TIC (calculadora gráfica, software, applets). • Reconocer y resolver (con apoyo de las TIC) aplicaciones, problemas o situaciones reales o hipotéticas que pueden ser modelizados con funciones trigonométricas identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas y juzgar la validez y pertinencia de los resultados obtenidos.	CE.M.5.3. Opera y emplea funciones reales, lineales, cuadráticas, polinomiales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas para plantear situaciones hipotéticas y cotidianas que puedan resolverse mediante modelos matemáticos; comenta la validez y limitaciones de los procedimientos empleados y verifica sus resultados mediante el uso de las TIC.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	RECURSOS	INDICADORES DE LOGRO	TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN
Debatir la necesidad que existe en las ciencias de las telecomunicaciones de modelar matemáticamenta las ondas electromagnéticas (Las ondas de radio, de televisión, el WI-FI, son ondas electromagnéticas). Comparar las similitudes entre la gráfica de una función seno, con un gráfico de una onda electromagnética. Usar un sistema de referencia adecuado e interpretar las características de la función seno y coseno. Reflexionar acerca de la importancia de estos conocimientos en la tecnología actual. Identificar las características y transformaciones de los gráficos de las funciones trigonométricas básicas. Usar los modelos matemáticos comprendidos en las características fisicas de las ondas. Reconocer e interpretas las características de las funciones trigonométricas. Producir predicciones usando los modelos matemáticos estudiados.	- Texto - Cuaderno - Videos (sitios web) - Pizarra - Calculadora	IM.5.3.1. Grafica funciones reales y analiza su dominio, recorrido, monotonía, ceros, extremos, paridad; identifica las funciones afines, potencia, raíz cuadrada, valor absoluto; reconoce si una función es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva; realiza operaciones con funciones aplicando las propiedades de los números reales en problemas reales e hipotéticos. (I.4.) M.5.3.2. Representa gráficamente funciones cuadráticas; halla las intersecciones con los ejes, el dominio, rango, vértice y monotonía; emplea sistemas de ecuaciones para calcular la intersección entre una recta y una parábola o dos parábolas; emplea modelos cuadráticos para resolver problemas, de manera intuitiva halla un límite y la derivada; optimiza procesos empleando las TIC. (13, 14) M.5.3.3. Reconoce funciones polinomiales de grado n, opera con funciones polinomiales de grado =4 y racionales de grado =3; plantea modelos matemáticos para resolver problemas aplicados a la informática; emplea el teorema de Horner y el teorema del residuo para factorizar polinomios; con la ayuda de las TIC, escribe las ecuaciones de las asíntotas, y discute la validez de sus resultados. (I.3., I.4.) M.5.3.4. Halla gráfica y analíticamente el dominio, recorrido, monotonía, periodicidad, desplazamientos, máximos y mínimos de funciones trigonométricas para modelar movimientos circulares y comportamientos de fenómenos naturales, y discute su pertinencia; emplea la tecnología para corroborar sus resultados. (J.3., I.2.) M.5.3.5. Obtiene la gráfica de una función exponencial a partir de a^x, mediante traslaciones, homotecias y reflexiones; concibe la función logarítmica como inversa de la función exponencial; aplica propiedades de los logaritmos y halla su dominio, recorrido, asíntotas, intersecciones con los ejes; las aplica en situaciones reales e hipotéticas, con y sin apoyo de la tecnología. (I.3.)	Comprobar el desarrollo de las habilidades necesarias para reconocer, interpretar, graficar, analizar las características y operar con funciones de variable real (lineal, cuadrática, exponencial, logarítmica, trigonométrica, polinomiales y racionales). Que el estudiante analice el dominio, el recorrido, la monotonía, los ceros, máximos y mínimos, paridad y composición de las diferentes funciones. También se incluyen las propiedades de inyectividad, sobreyectividad y biyectividad. Apoyándose con las TIC, debe poder graficar, interpretar y encontrar las intersecciones con los ejes, y la intersección de las gráficas de funciones; además de hallar la solución de ecuaciones de manera gráfica; interpretar geométricamente la derivada de una función cuadrática y sus aplicaciones; y comprender la noción de límite y su aplicación, así como la modelización de situaciones reales a través de las funciones.

ELEMENTOS DEL PERFIL DE SALIDA
J.3. Procedemos con respeto y responsabilidad con nosotros y con las demás personas, con la naturaleza y con el mundo de las ideas. Cumplimos nuestras obligaciones y exigimos la observación de nuestros derechos. I.2. Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos e información posibles. I.3. Sabemos comunicarnos de manera clara en nuestra lengua y en otras, utilizamos varios lenguajes como el numérico, el digital, el artístico y el corporal; asumimos con Responsabilidad nuestros discursos. I.4. Actuamos de manera organizada, con autonomía e independencia; aplicamos el razonamiento lógico, crítico y complejo; y practicamos la humildad intelectual en un aprendizaje a lo largo de la vida.

ELABORADO	REVISADO	APROBADO
Docente:	Director del área :	Vicerrector:
Firma:	Firma:	Firma:
Fecha:	Fecha:	Fecha:

Objetivos generales del área que se evalúan

- Emplear progresiones aritméticas, geométricas y sumas parciales finitas de sucesiones numéricas en el planteamiento y resolución de problemas de diferentes ámbitos
- Reconocer las funciones trigonométricas (seno, coseno, tangente, secante, cosecante y cotangente), sus propiedades y las relaciones existentes entre estas funciones y representarlas de manera gráfica con apoyo de las TIC (calculadora gráfica, software, applets).

Objetivos del área por subnivel

- Reconocer y graficar funciones periódicas determinando el período y amplitud de las mismas, su dominio y recorrido, monotonía, paridad.
- Reconocer y resolver (con apoyo de las TIC) aplicaciones, problemas o situaciones reales o hipotéticas que pueden ser modelizados con funciones trigonométricas, identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas, y juzgar la validez y pertinencia de los resultados obtenidos.
- O.M.5.2. Producir, comunicar y generalizar información, de manera escrita, verbal, simbólica, gráfica y/o tecnológica, mediante la aplicación de conocimientos matemáticos y el manejo organizado, responsable y honesto de las fuentes de datos, para así comprender otras disciplinas, entender las necesidades y potencialidades de nuestro país, y tomar decisiones con responsabilidad social.

Objetivo integrador del área por subnivel

- OI.5.2. Aplicar conocimientos de diferentes disciplinas para la toma de decisiones asertivas.
- OI.5.11. Reflexionar y tomar decisiones respecto a una sexualidad responsable y a su participación sistemática en prácticas corporales y estéticas, considerando su repercusión en una vida saludable y la influencia de las modas en la construcción de los hábitos y de las etiquetas sociales en la concepción de la imagen corporal.

Criterios de evaluación

- Opera y emplea funciones reales, lineales, cuadráticas, polinomiales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas para plantear situaciones hipotéticas y cotidianas que puedan resolverse mediante modelos matemáticos; comenta la validez y limitaciones de los procedimientos empleados y verifica sus resultados mediante el uso de las TIC.
- Reconoce patrones presentes en sucesiones numéricas reales, monótonas y definidas por recurrencia; identifica las progresiones aritméticas y geométricas; y, mediante sus propiedades y fórmulas, resuelve problemas reales de matemática financiera e hipotética. y el tráfico de personas esclavizadas liderado por las grandes potencias.

Elementos del perfil de salida a los que se contribuye

- Procedemos con respeto y responsabilidad con nosotros y con las demás personas, con la naturaleza y con el mundo de las ideas. Cumplimos nuestras obligaciones y exigimos la observación de nuestros derechos.
- Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos e información posibles

Indicadores para la evaluación del criterio

- Halla gráfica y analíticamente el dominio, recorrido, monotonía, periodicidad, desplazamientos, máximos y mínimos de funciones trigonométricas para modelar movimientos circulares y comportamientos de fenómenos naturales, y discute su pertinencia; emplea la tecnología para corroborar sus resultados

Comunicación Matemática

La comunicación es una parte esencial de las matemáticas y de la educación matemática. Escuchar las explicaciones de los demás les da oportunidades de desarrollar su comprensión. Los alumnos que se involucran en discusiones para justificar soluciones, especialmente cuando hay desacuerdo, llegan a una mejor comprensión matemática.

Rutinas de comunicación Matemática

El maestro debe capacitar al estudiante en organizar y consolidar su pensamiento matemático a través de la comunicación.

El estudiante comunica su pensamiento matemático con coherencia y claridad a los compañeros y profesores.

El docente analiza y evalúa el pensamiento matemático de los alumnos.

El profesor y los alumnos usan un lenguaje matemático con precisión para expresar ideas matemáticas.

Rutinas de comunicación

Organizar y consolidar su pensamiento matemático a través de la comunicación

Los estudiantes ganan perspicacia en su pensamiento cuando presentan sus métodos para resolver problemas, justifican su razonamiento a un compañero o al profesor o cuando hacen preguntas sobre algo que es extraño para ellos.

La comunicación puede apoyar el aprendizaje de conceptos matemáticos nuevos, cuando escenifican una situación, dibujan utilizan objetos, dan justificaciones o explicaciones verbalmente, utilizan diagramas, escriben y usan símbolos.

La reflexión y la comunicación son procesos entrelazados en el aprendizaje de las matemáticas.

http://goo.gl/GLYJvA

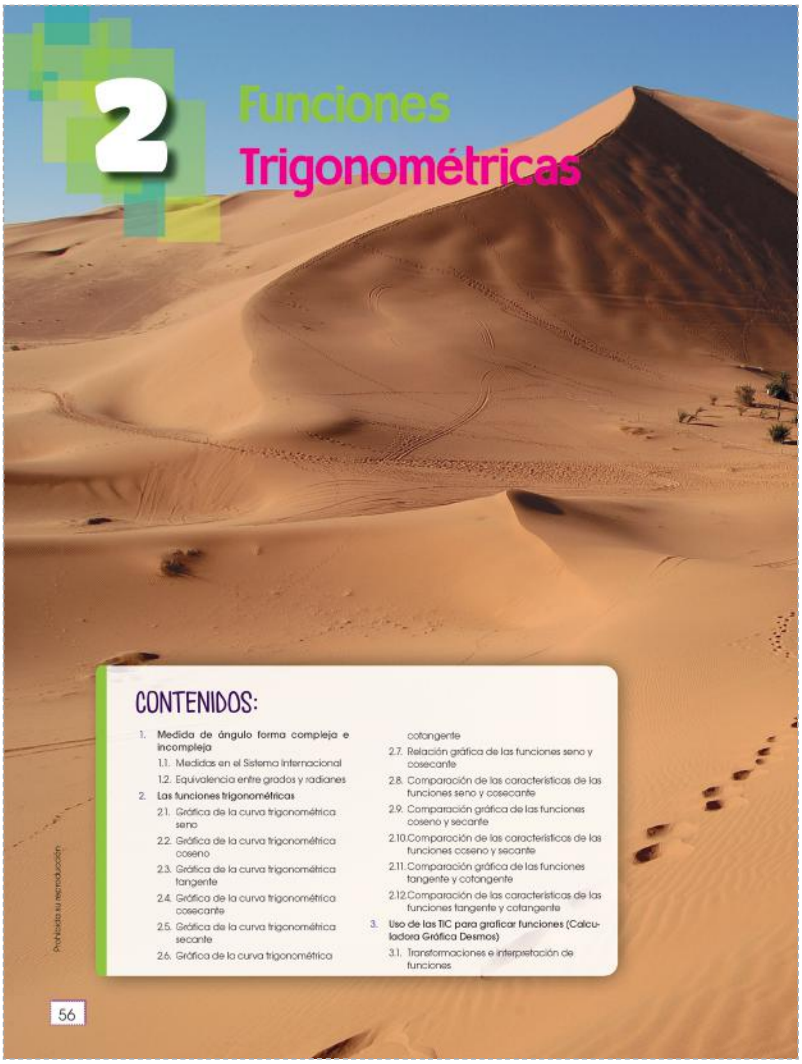
http://goo.gl/aoVRno

http://goo.gl/xuLfBu

Página 44

Orientación didáctica

- En esta unidad hablaremos de las medidas de ángulos y la transformación del sistema sexagesimal a radianes y viceversa, mediante su equivalencia.
- Pasaremos de la forma compleja a la incompleja manualmente mediante el uso de la calculadora.
- Graficará las funciones trigonométricas en el círculo trigonométrico y en el plano cartesiano con la ayuda de una tabla de valores, mediante este último gráfico visualizará claramente las características de cada función, a la vez le permitirá comparar las funciones entre ellas.
- A partir de las funciones básicas analizará las transformaciones e interpretaciones de casa función.
- Utilizará correctamente las TIC'S, para graficar e interpretar funciones trigonométricas en la transformación de su forma básica. Calculadora gráfica DESMOS o el programa GeoGebra



2 Funciones Trigonométricas

CONTENIDOS:

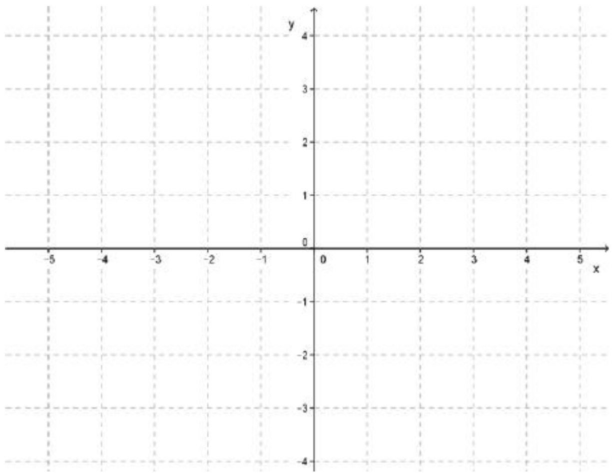
1. Medida de ángulo forma compleja e incompleja
   1.1. Medidas en el Sistema Internacional
   1.2. Equivalencia entre grados y radianes
2. Las funciones trigonométricas
   2.1. Gráfica de la curva trigonométrica seno
   2.2. Gráfica de la curva trigonométrica coseno
   2.3. Gráfica de la curva trigonométrica tangente
   2.4. Gráfica de la curva trigonométrica cosecante
   2.5. Gráfica de la curva trigonométrica secante
   2.6. Gráfica de la curva trigonométrica cotangente
   2.7. Relación gráfica de las funciones seno y cosecante
   2.8. Comparación de las características de las funciones seno y cosecante
   2.9. Comparación gráfica de las funciones coseno y secante
   2.10. Comparación de las características de las funciones coseno y secante
   2.11. Comparación gráfica de las funciones tangente y cotangente
   2.12. Comparación de las características de las funciones tangente y cotangente
3. Uso de las TIC para graficar funciones (Calculadora Gráfica Desmos)
   3.1. Transformaciones e interpretación de funciones

56

Nombre: ______________________________ Fecha: ____________________

1. Ubica en el plano cartesiano los siguientes puntos.

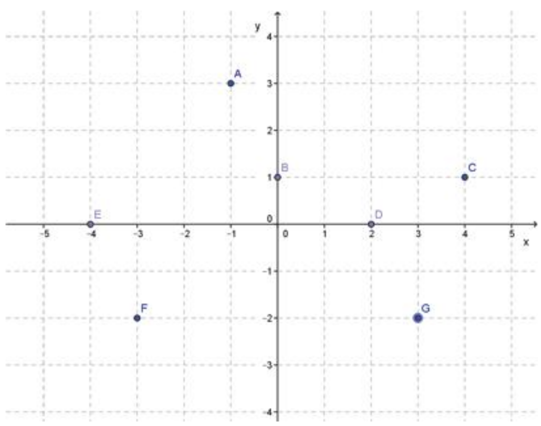
A (2 , 3) ; B (-2 , 4) ; C (-3 , - 3) ; D (4 , - 2)



2. En el siguiente cuadro escribe el nombre del cuadrante en el que se ubicó cada punto del ejercicio anterior.

PUNTO	(2 , 3)	(- 2 , 4)	(- 3 , - 3)	(4 , - 2)
CUADRANTE				

3. Escribe los puntos representados en el plano cartesiano.



PUNTO	Par Ordenado
A	
B	
C	
D	
E	
F	
G	

4. Completa el siguiente cuadro los valores de las funciones trigonométricas sin el uso de la calculadora.

	SEN	COS	TAN
30°			
60°			
45°			

5. Completa correctamente con las funciones trigonométricas inversas.

Sen θ ____________

Cos θ ____________

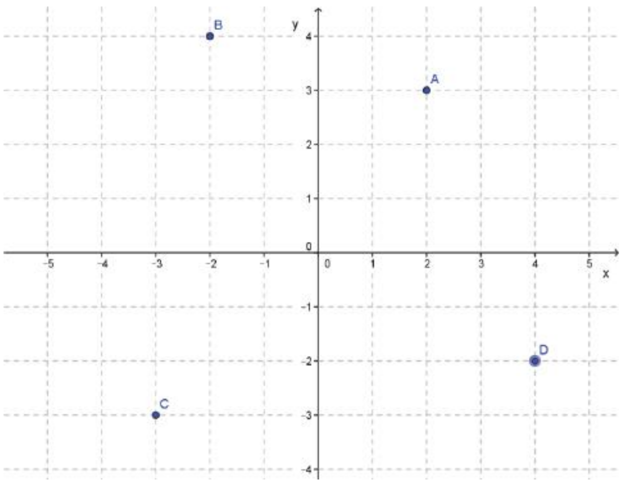
____________ Ctg θ

6. En una circunferencia tenemos 360° su equivalencia en radianes es

____

1. Ubica en el plano cartesiano los siguientes puntos.

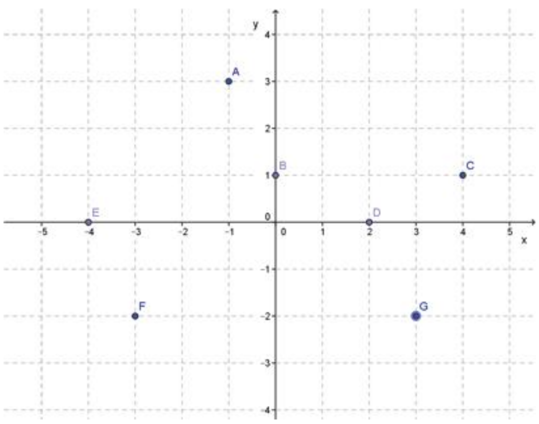
A (2 , 3) ; B (-2 , 4) ; C (-3 , - 3) ; D (4 , - 2)



2. En el siguiente cuadro escribe el nombre del cuadrante en el que se ubicó cada punto del ejercicio anterior.

PUNTO	(2 , 3)	(- 2 , 4)	(- 3 , - 3)	(4 , - 2)
CUADRANTE	primero	Segundo	Tercero	Cuarto

3. Escribe los puntos representados en el plano cartesiano.



PUNTO	Par Ordenado
A	(- 1 , 3)
B	(0 , 1)
C	(4 , 1)
D	(2 , 0)
E	(-4 , 0)
F	(- 3 , - 2)
G	(3 , - 2)

4. Completa el siguiente cuadro los valores de las funciones trigonométricas sin el uso de la calculadora.

	SEN	COS	TAN
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

5. Completa correctamente con las funciones trigonométricas inversas.

Sen θ → Csc θ

Cos θ → Sec θ

Tan θ → Ctg θ

6. En una circunferencia tenemos 360° su equivalencia en radianes es

$2\pi \, rad$

Solucionario

Actividad 1

a. $\alpha = 138\,312''$
b. $\beta = 18\,743''$

Actividad 3

a. $\alpha = 0{,}318\,1\,\pi\,rad$

b. $\alpha = 0{,}254\,7\,\pi\,rad$

c. $\alpha = 0{,}364\,3\,\pi\,rad$

d. $\alpha = 0{,}087\,\pi\,rad$

Página 59

1.1. Medidas en el Sistema Internacional

Como hemos dicho, la unidad de medida de ángulos en el SI es el radián (rad). Para definirlo, procedemos del siguiente modo:

- Trazamos una circunferencia de radio arbitrario y marcamos un radio OA.
- A partir del punto A tomamos un arco AB de longitud igual a la del radio.
- El ángulo central AOB que abarca el arco AB mide un radián.

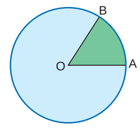


Fig. 2.

Un radián es la medida del ángulo central de una circunferencia que abarca un arco de longitud igual a la del radio.

1.2. Equivalencia entre grados y radianes

Como la longitud de la circunferencia es $2\,\pi\,r$, esta contiene $2\,\pi$ veces la longitud del radio. Por tanto:

$$360° = 2\pi \text{ rad}$$

Esta equivalencia permite pasar de grados a radianes, y viceversa, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3

Expresemos en radianes el ángulo $\alpha = 25{,}3°$.
Escribimos la equivalencia entre grados y radianes en forma de factor de conversión, de manera que aparezcan los grados en el denominador:

$$25{,}3° \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{360°} = \frac{25{,}3\pi}{180} = 0{,}44 \text{ rad}$$

Ejemplo 4

Expresemos en el sistema sexagesimal el ángulo $\beta = \frac{5\pi}{12}$ rad
Escribimos la equivalencia entre grados y radianes en forma de factor de conversión, pero ahora de manera que aparezcan los radianes en el denominador:

$$\frac{5\pi}{12} \text{rad} \cdot \frac{360°}{2\pi \text{ rad}} = 75°$$

Y TAMBIÉN ¿?

Sistema centesimal
Además de las unidades del sistema sexagesimal y los radianes, existen otras unidades de medida de ángulos: el grado, el minuto y el *segundo centesimales*.
Un grado centesimal (1g) es la centésima parte de un ángulo recto.
Sus submúltiplos, el minuto y el segundo, se definen como sigue:

1 minuto $(1^m) = \frac{1}{100}$ de grado

1 segundo $(1^s) = \frac{1}{100}$ de minuto

Así, el paso de unas unidades a otras se efectúa según el esquema.

$$\text{Grado}(^g) \underset{:100}{\overset{\times 100}{\rightleftarrows}} \text{Minuto}(^m) \underset{:100}{\overset{\times 100}{\rightleftarrows}} \text{Segundo}(^s)$$

La ventaja de este sistema es que la transformación de una expresión compleja a incompleja, y viceversa, es automática. **Observa**:
$48{,}5216^g \Leftrightarrow 48^g\,52^m\,16^s$

Actividades

1. **Expresa** en forma incompleja de segundos:
   a. $\alpha = 38°\,25'\,12''$ b. $\alpha = 5°\,12'\,23''$
2. **Expresa** en forma compleja:
   a. $\alpha = 324752''$ c. $\alpha = 45563''$
   b. $\alpha = 124568''$ d. $\alpha = 5652'$
3. **Expresa** en radianes los siguientes ángulos:
   a. $57°\,15'\,32''$ b. $45{,}84°$ c. $65°\,34'\,2''$ d. $15{,}65°$
4. **Expresa** los siguientes ángulos en el sistema sexagesimal. **Escribe** el resultado en forma compleja.
   a. $\frac{5\pi}{3}$ rad b. 1,43 rad c. $\frac{\pi}{8}$ rad d. $\frac{5\pi}{6}$ rad

Página 61

Características de la función trigonométrica seno

A continuación, describimos las características de la función, seno definido por $f(x) = \text{sen}(x)$

$\text{sen} : x \mapsto f(x) = \text{sen}(x)$
Dominio: Los números reales
Recorrido: $[-1; 1]$
Intersecciones con el eje horizontal x: $(0,0), (\pi,0), (2\pi,0)$...
Intersecciones con el eje vertical y: $(0, 0)$
Es una función continua.
La función es simétrica con respecto al origen.
No presente asíntotas.
No es una función inyectiva.
No es una función sobreyectiva.
Máximo relativo: $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$
Mínimo relativo: $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$

Tabla 2.

Además de las características descritas, analizaremos los intervalos de monotonía (crecimiento y decrecimiento) y concavidad en la siguiente tabla.

Cuadrante	Variación eje horizontal (x)	Variación eje vertical (y)	Concavidad
I	Entre 0 a $\frac{\pi}{2}$	Crece de 0 a 1	Cóncava hacia abajo
II	Entre $\frac{\pi}{2}$ a π	Decrece de 1 a 0	Cóncava hacia abajo
III	Entre π a $\frac{3\pi}{2}$	Decrece de 0 a -1	Cóncava hacia arriba
IV	Entre $\frac{3\pi}{2}$ a 2π	Crece de -1 a 0	Cóncava hacia arriba

Tabla 3.

La gráfica de la función $y = \text{sen}(x)$, descrita en más de un período, que constituye una cima y un valle.

Actividades

5. **Representa** gráficamente, sobre papel milimetrado, tres períodos de la función sen: $x \mapsto f(x) = \text{sen}\, x$ en el intervalo $[0, 6\pi]$.

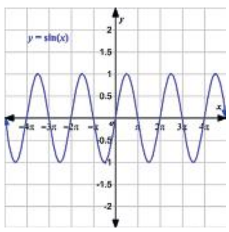
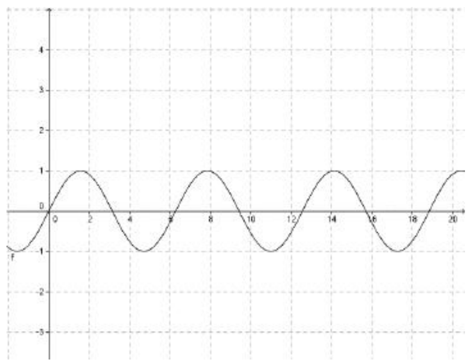


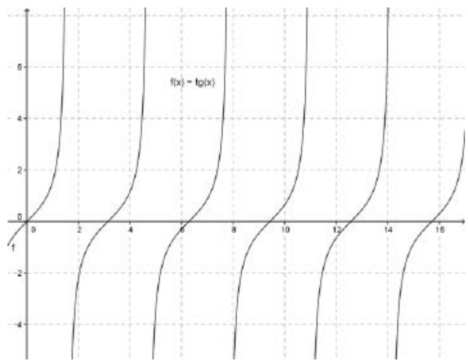
Fig. 5.

Solucionario

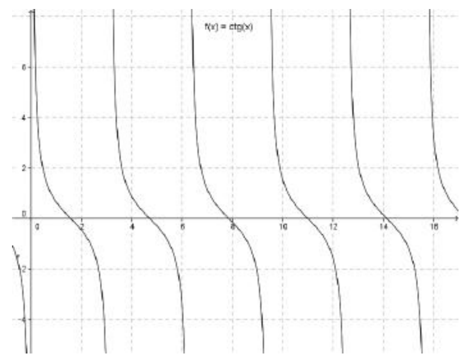


Solucionario

Actividad 7



Actividad 9



Página 67

2.6. Gráfica de la curva trigonométrica cotangente

Es la función trigonométrica inversa a la tangente se denota con cot y se define: $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}$; $\text{sen}(x) \neq 0$. Observemos las características que presenta en relación a su representación gráfica y a su tabla de valores durante el periodo designado.

Valores de *X* Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Valores de *X* (grados)	0^o	30^o	60^o	90^o	120^o	150^o	180^o	210^o	240^o	270^o	300^o	330^o	360^o
$f(x) = \cot(x)$	N.D	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	N.D	$\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	N.D
$(x, \cot(x))$	$\{(0, \text{N.D}); \left(\frac{\pi}{6}, \sqrt{3}\right); \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right); \left(\frac{\pi}{2}, 0\right); \left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right); \left(\frac{5\pi}{6}, \sqrt{3}\right); (\pi, \text{N.D});$ $\left(\frac{7\pi}{6}, \sqrt{3}\right); \left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right); \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right); \left(\frac{5\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right); \left(\frac{11\pi}{6}, -\sqrt{3}\right); (2\pi, \text{N.D})\}$												

Tabla 16.

Análisis de la función cotangente en el en el intervalo $[0, 2\pi]$

$\cot : x \mapsto f(x) = \cot(x)$
Dominio: $\mathbb{R}$- $\{k\pi\}$, con $k \in Z$
Recorrido: $\mathbb{R}$
No corta al eje Y
Corta al eje X en el punto $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$
Es una función continua en los reales salvo en los puntos en los que no está definida.
La función es simétrica con respecto al eje origen.
Presenta asíntotas en los puntos $(0, 0)$; $(\pi, 0)$ y $(2\pi, 0)$
No es una función inyectiva
No es una función sobreyectiva
No tienen máximos ni mínimos relativos
Es estrictamente decreciente en todo su dominio.

Tabla 17.

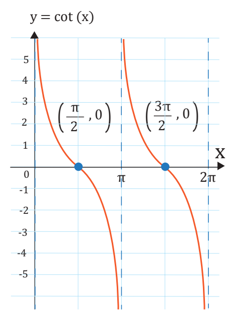


Fig. 15.

Actividades

6. **Representa** gráficamente, sobre papel milimetrado, cuatro periodos de la función $\csc : x \mapsto f(x) = \csc(x)$ en el intervalo $[0, 6\pi]$.
7. **Representa** gráficamente, sobre papel milimetrado, dos periodos de la función $\tan : x \mapsto f(x) = \tan x$ en el intervalo $[0, 4\pi]$.
8. **Representa** gráficamente, sobre papel milimetrado, tres periodos de la función $f(x) = \sec x$ en el intervalo $[0, 6\pi]$.
9. **Representa** gráficamente, sobre papel milimetrado, dos periodos de la función $\cot : x \mapsto f(x) = \cot(x)$ en el intervalo $[0, 4\pi]$.

Página 75

En cambio, las traslaciones horizontales se relacionan, con el signo de la variable r, con una traslación en el eje de las abscisas (eje x), si se tiene:

$y = p\,\text{sen}(qx + r) \longrightarrow$ la gráfica se traslada hacia la izquierda de su posición original.

$y = p\,\text{sen}(qx - r) \longrightarrow$ la gráfica se traslada hacia la derecha de su posición original.

Y TAMBIÉN:

Los signos + y - , que llamaremos signos internos, por el hecho de encontrarse dentro del paréntesis, se deben cambiar para recorrer la distancia según la constante (número) que se indica.

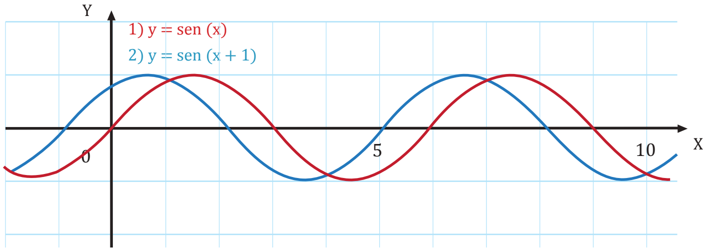


Fig. 20.

En la función $y : x \mapsto y = \sin(x + 1)$, se mueve una unidad a la izquierda con respecto a la función $y = \text{sen}(x)$.

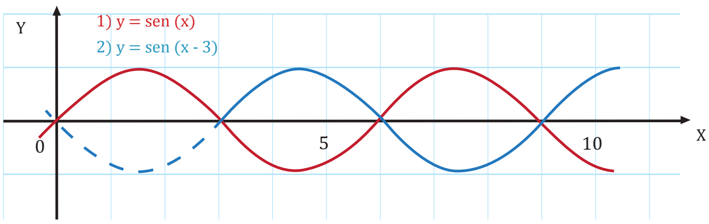


Fig. 21.

En la función $y : x \mapsto y = \text{sen}\,(x - 3)$, se mueve tres unidades a la derecha con respecto a la función $y = \text{sen}\,(x)$.

Actividades

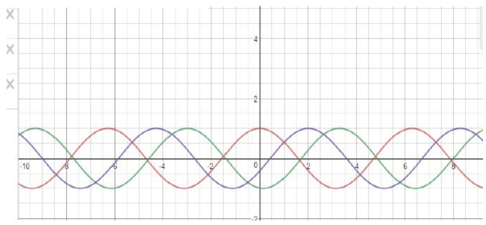
11. **Grafica**, en papel milimetrado, las funciones básica de $y : x \mapsto y = \cos\,(x)$, además de las funciones $y : x \mapsto y = \cos x + 3$ y $y : x \mapsto y = \cos x - 2$, explicando las traslaciones.

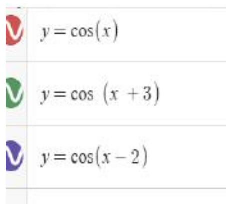
12. **Grafica**, en papel milimetrado, las funciones básica de $y : x \mapsto y = \sin\,(x)$, además de las funciones $y : x \mapsto y = \text{sen}\,(x + 4)$ y $y : x \mapsto y = \text{sen}\,(x - 5)$, explicando las traslaciones.

75

Solucionario

Actividad 11





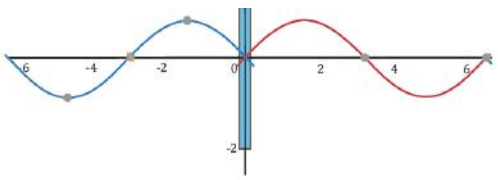
Función básica $f(x) = \cos\,(x)$

Función básica $f(x) = \cos\,(x + 3)$, la gráfica se mueve tres unidades a la izquierda.

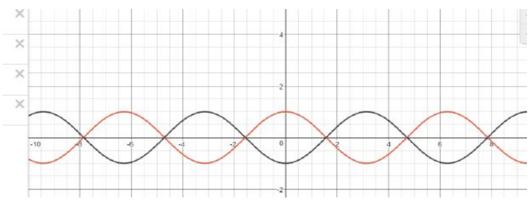
$f(x) = \cos\,(x - 2)$ la gráfica se mueve dos unidades a la derecha respecto de la función básica.

Solucionario

Actividad 13



Como podemos observar, la función: $y = \text{sen}\,(-x)$, se refleja sobre el eje vertical (y).



Función básica f(x) = cos(x)

La función f(x) = - cos (x) se refleja sobre el eje horizontal x

La función f(x) = cos(-x) se refleja sobre el eje vertical y, confundiéndose con la función original.

Página 76

Reflexiones

La trasformación en reflejo se la puede intuir mediante la «colocación imaginaria» de un espejo sobre los ejes.

Así:

Caso 1: Cuando se incluye un signo negativo antes de la función.

$y: x \mapsto y = -\text{sen}\,(x) \longrightarrow$ la gráfica se refleja sobre el eje x.

Observemos la gráfica:

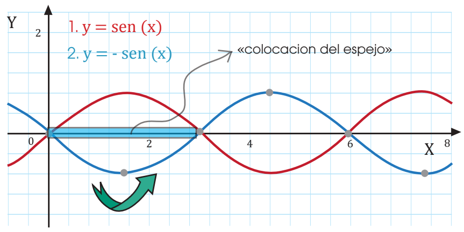


Fig. 22.

Como podemos observar, la función: $y: x \mapsto y = -\text{sen}\,x$, se refleja sobre el eje horizontal (x).

Caso 2: Cuando se incluye un signo negativo antes del ángulo x.

$y: x \mapsto y = \text{sen}\,(-x) \longrightarrow$ la gráfica se refleja sobre el eje y.

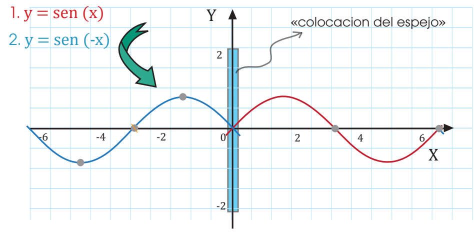


Fig. 23.

Como podemos observar, la función: $y: x \mapsto y = \text{sen}\,(-x)$, se refleja sobre el eje vertical (y).

13. **Analiza** gráficamente las reflexiones en los ejes de coordenadas de la función $y: x \mapsto y = \cos(x)$.

Actividades

76

Página 77

Estiramientos y compresiones verticales

Los estiramientos se caracterizan con el producto de un número con la variable p.

Caso 1: Cuando se multiplica por un número mayor que 1.

$y = p\ \text{sen}\ (x) \longrightarrow$ la gráfica se estira con respecto a los puntos de referencia hacia arriba y abajo con respecto a los nodos de la función básica, el número de veces que indica la constante.

Observemos la gráfica.

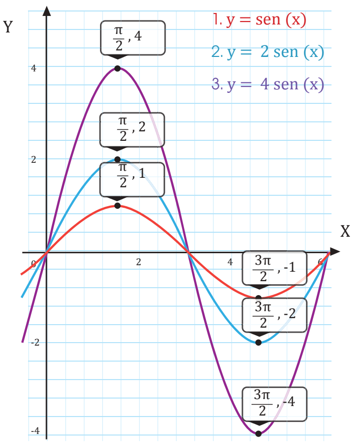


Fig. 24.

Como podemos observar, la función: $y: x \mapsto y = 2\ \text{sen}\ (x)$ se estira dos unidades hacia arriba y hacia abajo con respecto a la función básica de $y = \text{sen}\ (x)$.

Además, de igual manera, la función: $y: x \mapsto y = 4\ \text{sen}\ (x)$ se estira cuatro unidades hacia arriba y hacia abajo con respecto a la función básica $y: x \mapsto y = \text{sen}\ (x)$.

Actividades

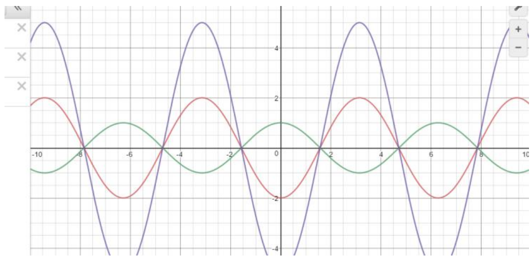
14. **Analiza** gráficamente los estiramientos y alargamientos en los ejes de coordenadas de la función $y: x \mapsto y = \cos(x)$.

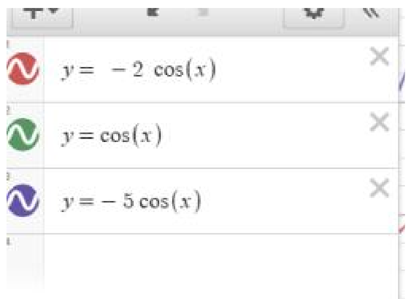
15. **Analiza** lo que debería suceder con los estiramientos y alargamientos en los ejes de coordenadas de las funciones: $y: x \mapsto y = -2\cos(x)$ y con $y: x \mapsto y = -5\cos(x)$.

77

Solucionario

Actividad 15



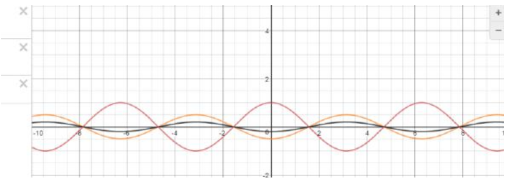


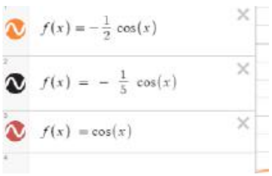
Función básica $f(x) = \cos(x)$

La función $f(x) = -2\cos(x)$, se refleja al eje x y se alarga 2 unidades.

La función $f(x) = -5\cos(x)$, se refleja al eje x y se alarga 5 unidades.

Solucionario





Función básica f(x) = cos (x)

La función f(x) = - ½ cos (x) , se refleja en el eje x y se comprime 2 unidades hacia abajo y hacia arriba referente a la función básica.

La función f(x) = - 1/5 cos (x) , se refleja en el eje x y se comprime 5 unidades hacia arriba y hacia abajo referente a la función básica.

Página 78

Las compresiones verticales se caracterizan con el producto entre un número fraccionario y la variable *p*.

Caso 2: Cuando se multiplica por un número mayor que cero y menor que la unidad.

$y = \frac{1}{2}\ p\ \text{sen}\ (x) \longrightarrow$ la gráfica se comprime con respecto a los puntos de referencia hacia arriba y abajo con respecto a los nodos de la función básica, el número de unidades que indica el denominador.

Observemos la gráfica.

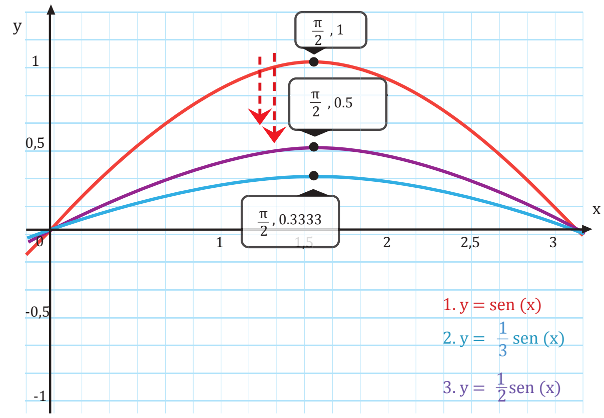


Fig. 25.

Como podemos observar, la funciones: $y\colon x \mapsto y = \frac{1}{2}$ sen (x) , $y\colon x \mapsto y = \frac{1}{3}$ sen (x) se comprimen dos y tres unidades respectivamente, hacia arriba y hacia abajo con respecto a la función básica de $y\colon x \mapsto y =$ sen (*x*).

Actividades

16. **Dibuja**, en papel milimetrado, las compresiones verticales de la función $y\colon x \mapsto y = \cos(x)$.

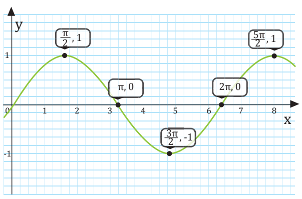
17. **Analiza** lo que debería suceder con las compresiones en los ejes de coordenadas de las funciones:
$y\colon x \mapsto y = -\frac{1}{5}\cos(x)$ y con $y\colon x \mapsto y = -\frac{1}{2}\cos(x)$.

Página 82

Ejercicios y problemas

1 Funciones Trigonométricas

1. **Observa** la siguiente gráfica.



- **Responde** las preguntas.

a. **Escribe** la función que representa la gráfica.

b. **Escribe** el dominio de la función así como el recorrido.

c. **Escribe** las intersecciones con los ejes horizontal y vertical, respectivamente.

d. **Escribe** los máximos y mínimos que se observan.

e. **Escribe** los intervalos donde la función es creciente.

f. **Escribe** los intervalos donde la función es decreciente.

2. **Elabora** una tabla de valores de x con intervalos de $\frac{\pi}{9}$ desde 0 a 2π.

- Para representar $f(x) = \tan(x)$

3. **Elabora** una tabla de valores de x con intervalos de $\frac{\pi}{6}$ desde 0 a 4π.

- Para representar $f(x) = \text{sen}(x)$

4. Considerando la siguiente tabla.

Valores de X Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Valores de X (grados)	0 º	30º	60º	90º	120º	150º	180º	210º	240º	270º	300º	330º	360º
$f(x)$= sec x	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	N.D	-2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2	N.D	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1

- **Realiza** la representación gráfica y **responde** las siguientes preguntas.

a. **Escribe** la función que representa la gráfica.

b. **Escribe** el dominio y recorrido de la función.

c. **Escribe** las intersecciones con los ejes horizontal y vertical, respectivamente.

d. **Escribe** los máximos y mínimos que se observan.

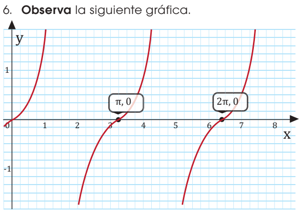
e. **Escribe** los intervalos donde la función es creciente.

f. **Escribe** los intervalos donde la función es decreciente

g. **Escribe** si la gráfica tiene asíntotas. **Explica.**

5. **Grafica** las funciones $f(x) = \text{sen}(x)$ y $f(x) = \cos(x)$, utilizando el graficador Desmos.

6. **Observa** la siguiente gráfica.



- **Responde** las preguntas

a. **Escribe** la función que representa la gráfica.

b. **Escribe** el dominio de la función así como el recorrido.

c. **Escribe** las intersecciones con los ejes horizontal y vertical, respectivamente.

d. **Escribe** los máximos y mínimos que se observan.

e. **Escribe** los intervalos donde la función es creciente.

Solucionario

Actividad 15

Solucionario de los ejercicios y problemas

1. a. $f(x) = \text{Sen } x$

b. Don(sen) = R ; Rec(Sen) = [-1, 1]

c. Intersección eje x : $(0,0)$; $(\pi, 0)$; $(2\pi, 0)$

Intersección con el eje y : $(0, 0)$

d. Máximos : $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$; $\left(\frac{5\pi}{2}, 1\right)$

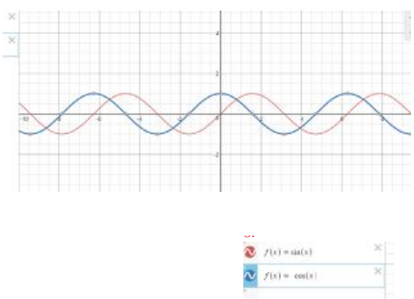
Mínimos : $\left(\frac{3\pi}{2}, 1\right)$

e. Creciente: $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$

f. Decreciente: $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

Valores de x en Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Valores de x en grados	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
f(x) = Sen(x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	- 1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Valores de x en Radianes	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{8\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{6}$	3π	$\frac{19\pi}{6}$	$\frac{10\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{3}$	$\frac{23\pi}{6}$	4π
Valores de x en grados	390°	420°	450°	480°	510°	540°	570°	600°	630°	660°	690°	720°
f(x)= Sen(x)	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0



Solucionario

7. a. 53,6116°

b. 12,1139°

c. 3,2061°

d. 89,67°

e. 125,7°

f. 12,5345°

,9.

Intervalo	Función	Crece o decrece
$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	Sen x	Crece
$[0, \pi]$	Cos x	Decrece
$\left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$	Tan x	Creciente
$]0, \pi[$	Ctg x	Decreciente
$\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$	Csc x	Decreciente
$\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$	Sec x	Creciente

11.

Función	Máximos	Mínimos
Sen x	$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$
Cos x	$(0, 1);\ (2\pi, 1)$	$(\pi, -1)$
Tan x	No	No
Ctg x	No	No
Csc x	$\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$
Sec x	$(0, 1); (2\pi, 1)$	$(\pi, -1)$

Función	Intersección eje x	Intersección eje y
Sen x	$(0,0), (\pi, 0), (2\pi, 0)$	(0, 0)
Cos x	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right); \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$	(0, 0)
Tan x	$(0,0); (\pi, 0); (2\pi, 0)$	(0, 0)
Ctg x	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right); \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$	No
Csc x	No	No
Sec x	No	(0, 1)

Página 83

f. **Escribe** los intervalos donde la función es decreciente

7. **Reduce** los siguientes ángulos a grados.

a. 53° 36' 42"

b. 12° 6' 50"

c. 3° 12' 22"

d. 89° 40'

e. 125° 42"

f. 12° 32' 5"

8. **Expresa** los siguientes medidas de grados en radianes.

a. 120°

b. 12,25°

c. 110°

d. 150°

e. 125° 42"

f. 12° 32' 5"

11. **Grafica** el siguiente par de funciones y **establece** dos observaciones con respecto a la comparación de las mismas.

a. $f: x \mapsto f(x) = \text{sen } x;\ f: x \mapsto f(x) = \text{sen } (x + 4)$

b. $f: x \mapsto f(x) = \cos x;\ f: x \mapsto f(x) = \cos (x - 3)$

c. $f: x \mapsto f(x) = \csc x;\ f: x \mapsto f(x) = \csc (x - 5)$

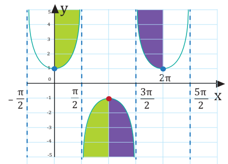
d. $f: x \mapsto f(x) = \tan x;\ f: x \mapsto f(x) = 2 \tan (x + 1)$

e. $f: x \mapsto f(x) = \sec x;\ f: x \mapsto f(x) = \frac{1}{4} \sec (x + 2)$

f. $f: x \mapsto f(x) = \cos x;\ f: x \mapsto f(x) = -\cos (x + 2)$

g. $f: x \mapsto f(x) = \text{ctg } x;\ f: x \mapsto f(x) = -\cos (x + 2)$

11. **Identifica** los puntos máximos y mínimos relativos en el siguiente gráfico de la función $y = \sec (x)$.



9. **Completa** el siguiente cuadro de las características de variación de la función trigonométrica coseno.

Cuadrante	Variación eje horizontal (x)	Variación eje vertical (y)	Concavidad
I		Decrece de 1 a 0	Cóncava hacia abajo
II	Entre $\frac{\pi}{2}$ a π		Cóncava hacia arriba
III		Crece de -1 a 0	Cóncava hacia arriba
IV	Entre $\frac{3\pi}{2}$ a 2π	Crece de 0 a 1	

10. **Completa** el cuadro de la tabla de valores de la función trigonométrica seno.

Valores de X Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π			$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$		2π
Valores de X (grados)	0°	30°	60°		120°		180°	210°	240°		300°	330°	360°
$f(x) = \text{sen } x$	0		$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1		$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1		$\frac{1}{2}$	

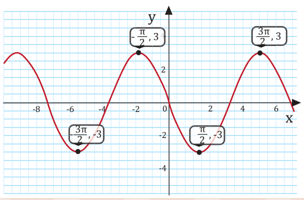
Página 84

2 Transformaciones

14. **Responde** a las siguientes preguntas.
    a. ¿Cuántos tipos de transformaciones conoce?
    b. ¿Qué efecto genera el tipo de traslación horizontal?
    c. ¿Cómo identifica el tipo de transformación horizontal?
    d. ¿Cuántas formas de traslación horizontal pueden manifestarse?
    e. **Explica** la transformación en reflejo
    f. ¿En qué consiste la teoría del espejo?
    g. ¿Qué debe cambiar en una función para que represente una reflexión sobre el eje *x*?

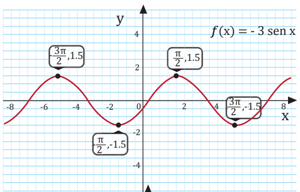
15. **Identifica** y **describe** las transformaciones que se presentan en las siguientes funciones trigonométricas.
    a. $f: x \mapsto f(x) = 3 \text{ sen } x$
    b. $f: x \mapsto f(x) = -8 \cos x$
    c. $f: x \mapsto f(x) = 0{,}25 \text{ sen } x$
    d. $f: x \mapsto f(x) = \text{sen } (x+1)$
    e. $f: x \mapsto f(x) = -0{,}5 \text{ sen } (x+4)$
    f. $f: x \mapsto f(x) = -0{,}25 \text{ sen}(x-5) + 3$

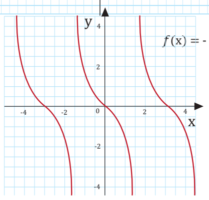
16. **Grafica** las funciones, utilizando el graficador Desmos; **identifica** el dominio y el recorrido de forma gráfica.
    a. $f(x) = -7\text{sen } x$
    b. $f(x) = \cos (x-3)$
    c. $f(x) = \csc (x-2) + 4$
    d. $f(x) = \frac{1}{2} \sec (x+3)$
    e. $f(x) = -\cos (x-2) - 2$



17. En los ejercicios anteriores, **grafica** dos periodos de las funciones, sin utilizar calculadora.

18. En los siguientes gráficos, **especifica** la amplitud de cada una de las funciones y **explica** las traslaciones que se manifiestan.





19. **Escribe** el proceso para expresar $53° 36' 42''$ en grados.

20. **Utiliza** el resultado obtenido en la pregunta anterior para expresarlo en radianes

21. **Escribe** las características de la función seno.

22. **Dibuja** las funciones seno, coseno y tangente en intervalos de 15° $\left(\frac{\pi}{12}\right)$

23. **Dibuja** las funciones secante, cosecante y cotangente en intervalos de 15 ° $\left(\frac{\pi}{12}\right)$

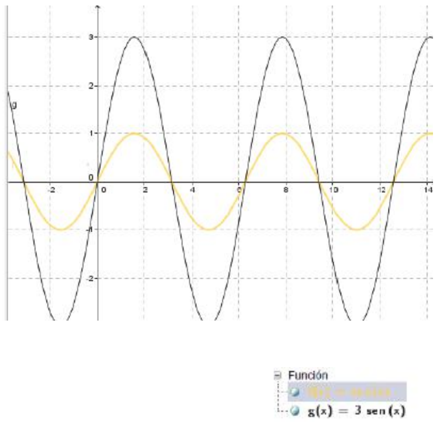
24. **Elabora** una tabla de doble entrada en la que compares las representaciones gráficas seno – secante, coseno- secante y tangente – cotangente.

84

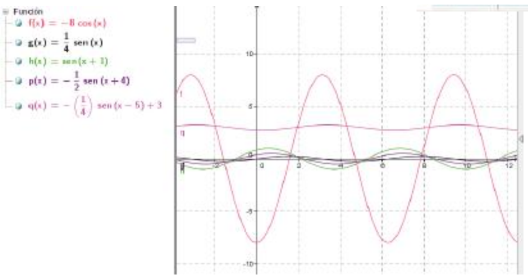
Solucionario

f(x) = 3 senx	La gráfica se estira tres veces hacia arriba y hacia abajo con respecto a los nodos de la función básica.
f(x) = -8 cosx	La gráfica se estira ocho veces hacia arriba y hacia abajo con respecto a los nodos de la función básica. A la vez que se refleja en el eje x.
f(x) = 0,25 sen(x)	La gráfica se comprime cuatro veces de la función original.
f(x) = sen (x + 1)	La gráfica se mueve una unidad a la izquierda.
f(x) = -0,5sen (x + 4)	La gráfica se comprime dos veces de la función original, a la vez que se refleja en el eje x y se mueve 4 unidades a la izquierda.
f(x) = -0,25 sen (x-5) + 3	La gráfica se refleja en el eje x, se comprime cuatro veces, se mueve cinco veces a la derecha y se traslada tres unidades hacia arriba.

15.



Solucionario



19. Para transformar 53°36’42”, primero transformamos los minutos a grados y los segundos a grados y, finalmente, sumamos las fracciones resultantes, para luego dividir la fracción resultante y encontramos el valor en grados. 53,6117°

23. Para realizar las gráficas se requiere la siguiente tabla de valores (presentamos como apoyo)

Valores en radianes	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$
Valores en grados	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
f(x) = Senx	0	0,26	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0,97	1	0,97	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0,26
f(x) = Cosx	1	0,97	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0,26	0	-0,25	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0,97
f(x) = Tanx	0	0,27	0,58	1	1,73	3,73	∞	-3,73	-1,73	-1	-0,58	-0,27

Valor en radianes	π	$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{19\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{23\pi}{12}$	2π
Valores en grados	180°	195°	210°	225°	240°	255°	270°	285°	300°	315°	330°	345°	360°
f(x) = Senx	0	-0,26	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0,97	-1	-0,96	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1/2	-0,26	0
f(x) = Cosx	-1	-0,97	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-0,26	0	0,26	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0,97	1
f(x) = Tanx	0	0,27	0,58	1	1,73	3,73	∞	-3,73	-1,73	-1	-0,58	-0,27	0

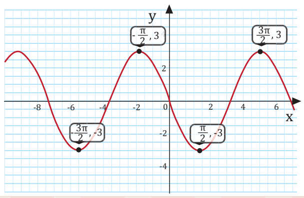
Página 84

2 Transformaciones

14. **Responde** a las siguientes preguntas.
    a. ¿Cuántos tipos de transformaciones conoce?
    b. ¿Qué efecto genera el tipo de traslación horizontal?
    c. ¿Cómo identifica el tipo de transformación horizontal?
    d. ¿Cuántas formas de traslación horizontal pueden manifestarse?
    e. **Explica** la transformación en reflejo
    f. ¿En qué consiste la teoría del espejo?
    g. ¿Qué debe cambiar en una función para que represente una reflexión sobre el eje *x*?

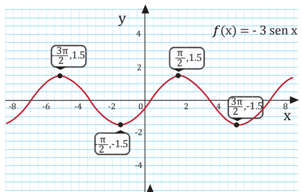
15. **Identifica** y **describe** las transformaciones que se presentan en las siguientes funciones trigonométricas.
    a. $f: x \mapsto f(x) = 3\,\text{sen}\,x$
    b. $f: x \mapsto f(x) = -8\cos x$
    c. $f: x \mapsto f(x) = 0{,}25\,\text{sen}\,x$
    d. $f: x \mapsto f(x) = \text{sen}\,(x+1)$
    e. $f: x \mapsto f(x) = -0{,}5\;\text{sen}\,(x+4)$
    f. $f: x \mapsto f(x) = -0{,}25\;\text{sen}(x-5)+3$

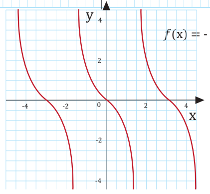
16. **Grafica** las funciones, utilizando el graficador Desmos; **identifica** el dominio y el recorrido de forma gráfica.
    a. $f(x) = -7\text{sen}\,x$
    b. $f(x) = \cos\,(x-3)$
    c. $f(x) = \csc\,(x-2)+4$
    d. $f(x) = \frac{1}{2}\sec\,(x+3)$
    e. $f(x) = -\cos\,(x-2)-2$



17. En los ejercicios anteriores, **grafica** dos periodos de las funciones, sin utilizar calculadora.

18. En los siguientes gráficos, **especifica** la amplitud de cada una de las funciones y **explica** las traslaciones que se manifiestan.





19. **Escribe** el proceso para expresar 53° 36' 42" en grados.

20. **Utiliza** el resultado obtenido en la pregunta anterior para expresarlo en radianes

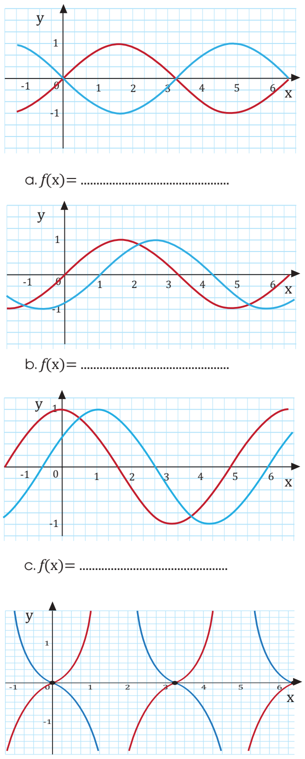
21. **Escribe** las características de la función seno.

22. **Dibuja** las funciones seno, coseno y tangente en intervalos de 15° $\left(\frac{\pi}{12}\right)$

23. **Dibuja** las funciones secante, cosecante y cotangente en intervalos de 15° $\left(\frac{\pi}{12}\right)$

24. **Elabora** una tabla de doble entrada en la que compares las representaciones gráficas seno – secante, coseno- secante y tangente – cotangente.

Página 85



25. **Escribe** las funciones para las gráficas de color azul.

a. $f(x)=$ ....

b. $f(x)=$ ....

c. $f(x)=$ ....

d. $f(x)=$ ....

26. **Grafica** en papel milimetrado:

a. La función $f(x)=\operatorname{sen}(x)$, en el intervalo $[0;4\pi]$.

b. La función : $f(x)=\operatorname{sen}(x)$, en el intervalo $[0;6\pi]$.

c. **Identifica** en cada uno de los gráficos, el dominio, el recorrido, los puntos máximos y mínimos, los intervalos de monotonía (creciente y decreciente).

27. **Utiliza** la herramienta Desmos para representar las siguientes funciones en la misma gráfica.

a. **Representa** la función : $f(x)=\tan(x)$.

b. **Representa** la función : $f(x)=-\tan(x)$

c. **Interpreta** y **compara** lo que puede observar.

28. Utilizando la herramienta Desmos, para representar las siguientes funciones en la misma gráfica.

a. **Representa** la función: $f(x)=\sec(x)$

b. **Representa** la función: $f(x)=\sec(x+2)$

c. **Representa** la función: $f(x)=\sec(x-4)$

d. **Interpreta** y **compara** lo que pudiste observar.

29. Algunas veces para obtener los términos de una sucesión se recurre a procedimientos que incluyen sucesivas operaciones más o menos complejas.

Con la ayuda de los enlaces propuestos sobre el triángulo de Pascal:

http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar2008/educontinua/mate/lugares/ma2_01.htm

www.disfrutalasmatematicas.com/triangulo-pascal.html

www.disfrutalasmatematicas.com/sierpinski-triangulo.html

Resuelve las cuestiones siguientes:

a. ¿Cómo se construye el triángulo de Pascal?

b. ¿Qué relación tiene con la sucesión de Fibonacci?

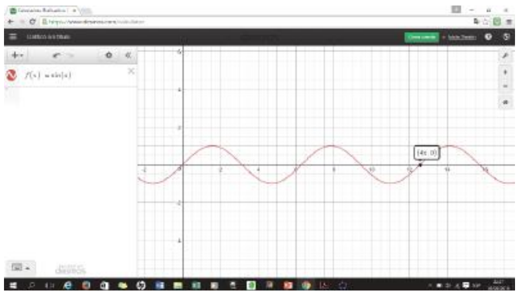
c. ¿Qué sucesiones encuentras en las sucesivas diagonales?

d. ¿Qué sucesiones encuentras en las sucesivas diagonales?

e. Si tomas cada fila como un número, ¿qué obtienes?

Solucionario

27. a.

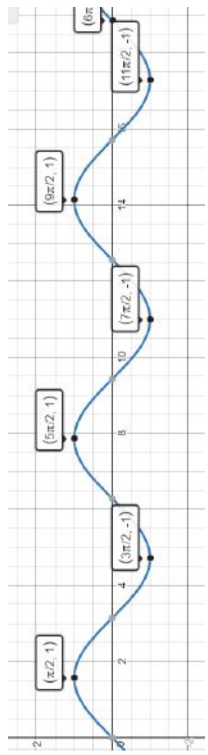


27.**Grafica** en papel milimetrado:

a. Dos períodos de la función : $f(x)=\operatorname{sen}(x)$ en el intervalo $[0;4\pi]$.

b. Tres períodos de la función : $f(x)=\operatorname{sen}(x)$ en el intervalo $[0;6\pi]$.

c. **Identifica** en cada uno de los gráficos, el dominio, el recorrido, los puntos máximos y mínimos, los intervalos de monotonía (creciente y decreciente).



Solucionario

c.

	$sen\ (4\pi)$	$sen(6\pi)$
Dom (sen(x))	R	R
Rec (sen(x))	[-1, 1]	[-1 , 1]
Máximos	$\left[\frac{\pi}{2},1\right];\ \left[\frac{5\pi}{2},1\right]$	$\left[\frac{\pi}{2},1\right];\ \left[\frac{5\pi}{2},1\right];\ \left[\frac{9\pi}{2},1\right]$
Mínimos	$\left[\frac{3\pi}{2},-1\right];\ \left[\frac{7\pi}{2},-1\right]$	$\left[\frac{3\pi}{2},-1\right];\ \left[\frac{7\pi}{2},-1\right]\left[\frac{11\pi}{2},-1\right]$
Crece	$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{2},4\pi\right]$	$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{2},\frac{9\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{11\pi}{2},6\pi\right]$
Decrece	$\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{5\pi}{2},\frac{7\pi}{2}\right[$	$\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{5\pi}{2},\frac{7\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{9\pi}{2},\frac{11\pi}{2}\right[$

29.

29.Utilizando la herramienta Desmos, representa las siguientes funciones en la misma gráfica.

a. **Representa** la función: $f(x)= \sec(x)$

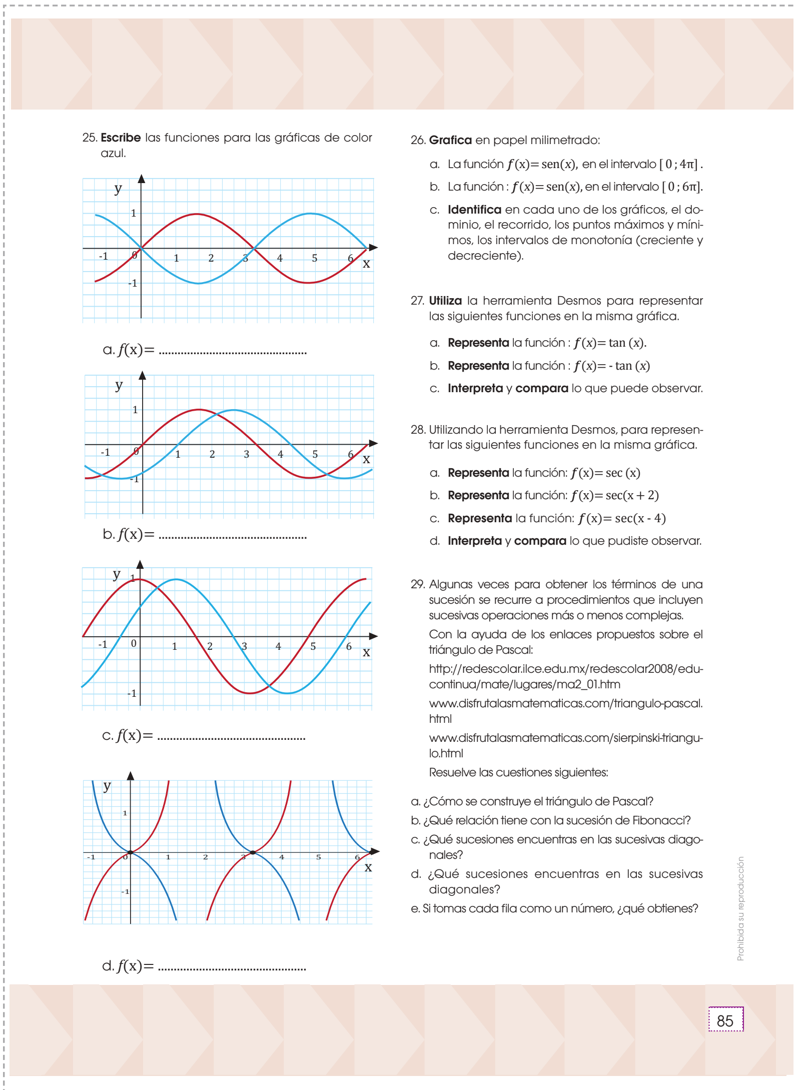
b. **Representa** la función: $f(x)= \sec(x+2)$

c. **Representa** la función: $f(x)= \sec(x-4)$

d. **Interpreta** lo que pudiste observar.

c. Interpretación: La gráfica f(x) = Sec(x + 2) se mueve dos unidades a la izquierda y la gráfica f(x) = Sec(x – 4) se mueve cuatro unidades a la derecha de la función original.

Página 85



25. **Escribe** las funciones para las gráficas de color azul.

a. $f(x)=$ ....

b. $f(x)=$ ....

c. $f(x)=$ ....

d. $f(x)=$ ....

26. **Grafica** en papel milimetrado:

a. La función $f(x)= sen(x)$, en el intervalo $[0;4\pi]$.

b. La función : $f(x)= sen(x)$, en el intervalo $[0;6\pi]$.

c. **Identifica** en cada uno de los gráficos, el dominio, el recorrido, los puntos máximos y mínimos, los intervalos de monotonía (creciente y decreciente).

27. **Utiliza** la herramienta Desmos para representar las siguientes funciones en la misma gráfica.

a. **Representa** la función : $f(x)= \tan(x)$.

b. **Representa** la función : $f(x)= -\tan(x)$

c. **Interpreta** y **compara** lo que puede observar.

28. Utilizando la herramienta Desmos, para representar las siguientes funciones en la misma gráfica.

a. **Representa** la función: $f(x)= \sec(x)$

b. **Representa** la función: $f(x)= \sec(x+2)$

c. **Representa** la función: $f(x)= \sec(x-4)$

d. **Interpreta** y **compara** lo que pudiste observar.

29. Algunas veces para obtener los términos de una sucesión se recurre a procedimientos que incluyen sucesivas operaciones más o menos complejas.

Con la ayuda de los enlaces propuestos sobre el triángulo de Pascal:

http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar2008/educontinua/mate/lugares/ma2_01.htm

www.disfrutalasmatematicas.com/triangulo-pascal.html

www.disfrutalasmatematicas.com/sierpinski-triangulo.html

Resuelve las cuestiones siguientes:

a. ¿Cómo se construye el triángulo de Pascal?

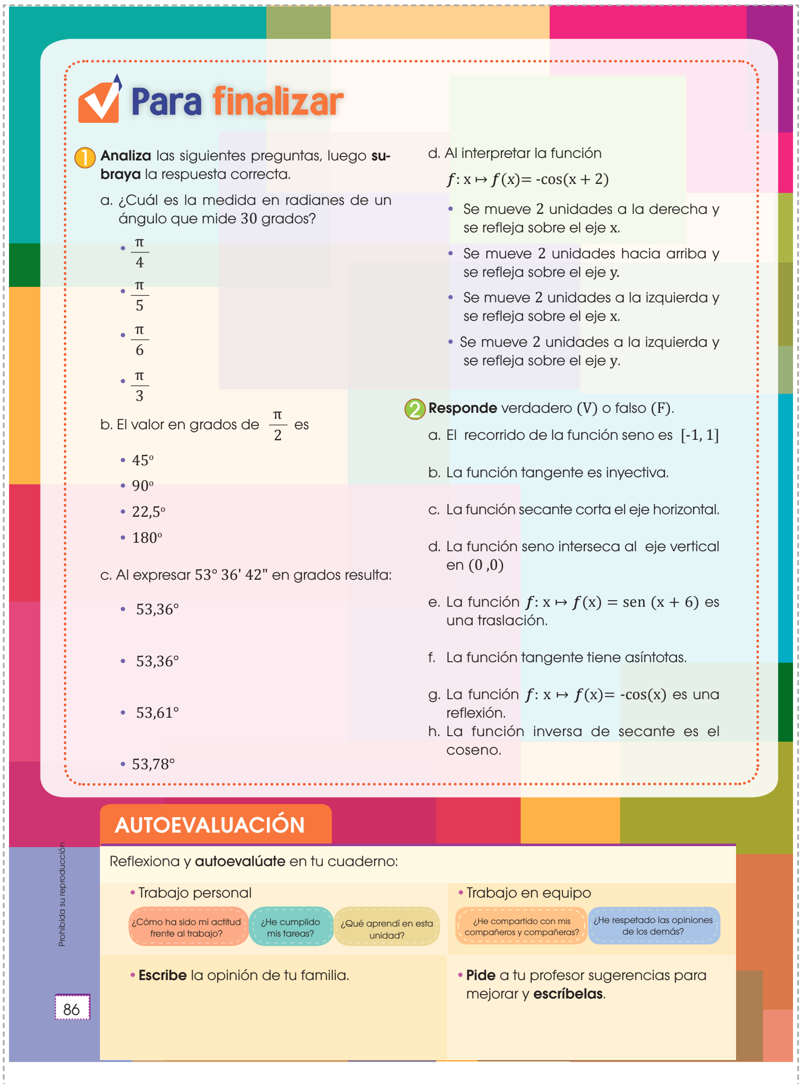
b. ¿Qué relación tiene con la sucesión de Fibonacci?

c. ¿Qué sucesiones encuentras en las sucesivas diagonales?

d. ¿Qué sucesiones encuentras en las sucesivas diagonales?

e. Si tomas cada fila como un número, ¿qué obtienes?

Página 86



Para finalizar

1. **Analiza** las siguientes preguntas, luego **subraya** la respuesta correcta.

a. ¿Cuál es la medida en radianes de un ángulo que mide 30 grados?

- $\frac{\pi}{4}$
- $\frac{\pi}{5}$
- $\frac{\pi}{6}$
- $\frac{\pi}{3}$

b. El valor en grados de $\frac{\pi}{2}$ es

- 45°
- 90°
- 22,5°
- 180°

c. Al expresar 53° 36' 42" en grados resulta:

- 53,36°
- 53,36°
- 53,61°
- 53,78°

d. Al interpretar la función

$f: x \mapsto f(x) = -\cos(x+2)$

- Se mueve 2 unidades a la derecha y se refleja sobre el eje x.
- Se mueve 2 unidades hacia arriba y se refleja sobre el eje y.
- Se mueve 2 unidades a la izquierda y se refleja sobre el eje x.
- Se mueve 2 unidades a la izquierda y se refleja sobre el eje y.

2. **Responde** verdadero (V) o falso (F).

a. El recorrido de la función seno es [-1, 1]

b. La función tangente es inyectiva.

c. La función secante corta el eje horizontal.

d. La función seno interseca al eje vertical en (0 ,0)

e. La función $f: x \mapsto f(x) = \text{sen}\ (x+6)$ es una traslación.

f. La función tangente tiene asíntotas.

g. La función $f: x \mapsto f(x) = -\cos(x)$ es una reflexión.

h. La función inversa de secante es el coseno.

AUTOEVALUACIÓN

Reflexiona y **autoevalúate** en tu cuaderno:

- Trabajo personal: ¿Cómo ha sido mi actitud frente al trabajo? ¿He cumplido mis tareas? ¿Qué aprendí en esta unidad?
- Trabajo en equipo: ¿He compartido con mis compañeros y compañeras? ¿He respetado las opiniones de los demás?
- **Escribe** la opinión de tu familia.
- **Pide** a tu profesor sugerencias para mejorar y **escríbelas**.

Solucionario

Solucionario de la autoevaluación

1. a. $\pi 6$

b. 90°

c. 53,61°

d. Se mueve dos unidades a la derecha y se refleja sobre el eje x.

2.

a. V

b. F

c. F

d. V

e. V

f. V

g. V

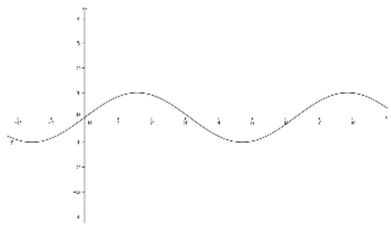
h. V

Nombre: ______________________ Fecha: ______________

1. Responde verdadero (V) o falso (F) en los siguientes enunciados.

a. La medida de $\frac{3\pi}{2}$ en grados es 210°. ( )

b. La medida del ángulo 28°15′12″ en forma incompleja en grados es 28,253° ( ).



c. La gráfica representa la función $f(x) = \text{sen } x$. ( )

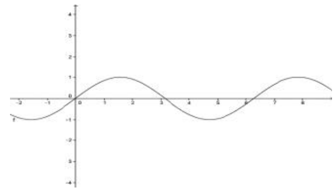
d. La función $f(x) = \cos(-x)$ tiene una reflexión con el eje x. ( )

e. La función $f(x) = \csc(x)$ corta al eje de las x en el punto (0,0). ( )

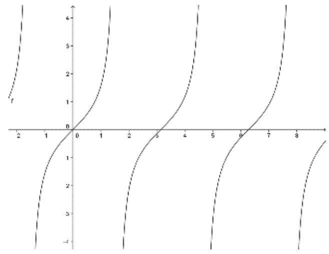
2. **Analiza** las siguientes preguntas luego encierra en un círculo la respuesta correcta

A) La gráfica de la función $f(x) = \cos(x)$ es:

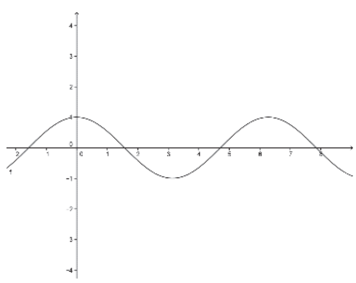
a.



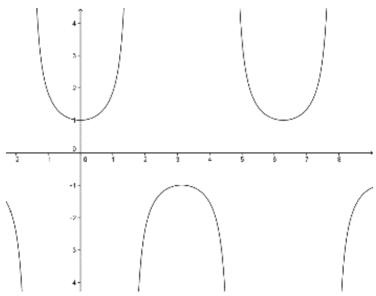
b.



c.



d.



B) El recorrido de la función $f(x) = \cot(x)$ es:

a. $[- 1 , 1]$

b. R

c. $[1, - 1]$

d. Ninguno

C) La medida del ángulo 138312″ en forma compleja es:

a. 38°25′12″

b.86°25′12°

c. 230°31′12°

d. Ninguno

D) En la función $f(x) = 12\, sen\, x$ la gráfica se:

a. Estira hacia arriba y abajo.

b. Se refleja con el eje x.

c. Se comprime hacia la derecha.

d. Se comprime hacia arriba y abajo.

E) En un período $[0,\ 2\pi]$, la intersección con el eje horizontal de la función

$f(x) = \mathrm{Sen}(x)$ es:

a. $(0,0)$; $(\pi ,1)$; $(2\pi ,0)$

b. $(0 ,0)$; $(\pi ,0)$; $(2\pi ,0)$

c. $(0 ,0)$; $(\pi ,0)$; $(2\pi ,1)$

d. $(0,0)$; $(0 ,\pi)$; $(2\pi ,0)$

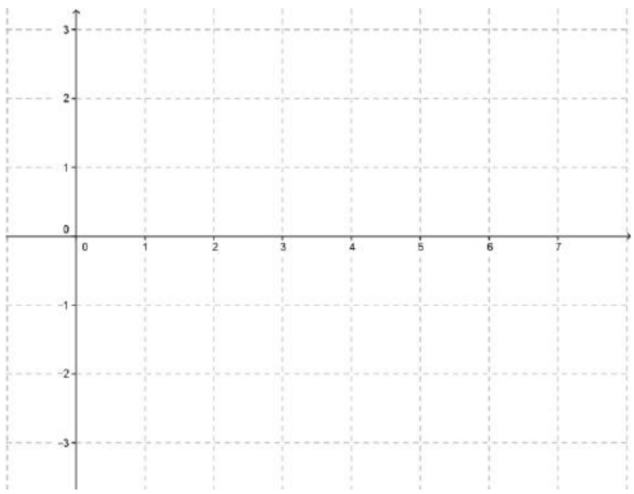
Nombre: ______________________ Fecha: ______________

3. **Completa** correctamente de acuerdo a la pregunta.

a. **Llena** los espacios en blanco la siguiente tabla para la función f(x) = tan (x) con un intervalo de $\frac{\pi}{4}$ en un período de $[0\ ,\pi]$.

Valor en radianes	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$		π
Valor en grados		45°			
f(x) = tan(x)	0			- 1	

b. Con base a la tabla anterior grafica la función f(x) = tan(x).



c. La función y = Sen $(12\frac{1}{2}x)$ se estira .... el recíproco de ......

d. En la función f(x) = Cos (x + 2) la gráfica se mueve ....unidades hacia la ...., respecto de la función original f(x) = Cos (x).

e. En la función f(x) = - Sen (x – 2), la gráfica se refleja en el eje ....y se mueve dos unidades a la ....

Solucionario de la evaluación de la unidad

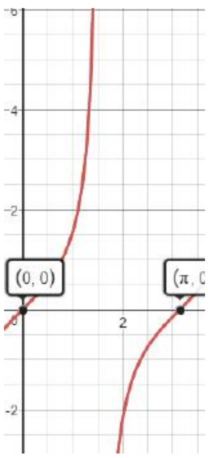
1. a. F; b. V; c. V; d. F; e. F

2. A) c; B) b; C) b; D) d; E) b

3. a.

Valor en radianes	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
Valor en grados	0°	45°	90°	135°	180°
f(x) = tan(x)	0	1	∞	-1	0

b)



c. Horizontalmente; $\frac{1}{2}$

d. Dos; Izquierda

e. Eje X; Derecha

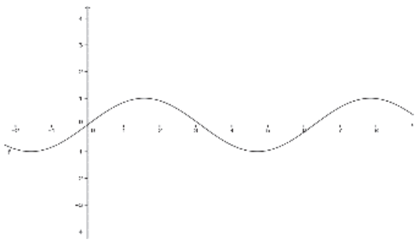
Nombre: ______________________ Fecha: ______________

1. Escribe (V) o (F)

a. La medida de $\frac{\pi}{2}$ en grados es 180° ( )

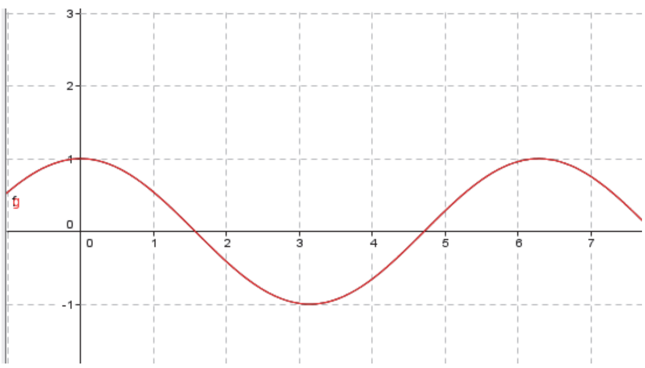
b. La medida de 25° 15’ en forma incompleja es 25,25’ ( )

c. La gráfica representa la función f(x) = sen x ( )



d. La función f(x) = cos (-x) tiene una reflexión con el eje x ( )

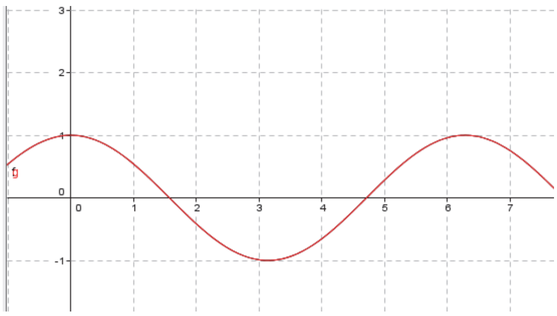
Guíate con la gráfica comparando con la función original, observa aparentemente las dos gráficas coinciden.



$f(x) = \cos(x)$

$g(x) = \cos(-x)$

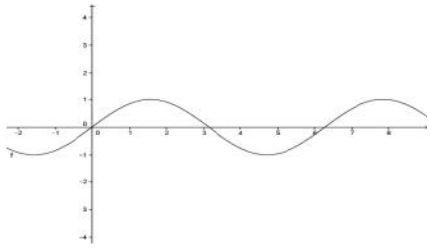
e. La función f(x) = csc (x) corta al eje de las x en el punto (0,0). ( )



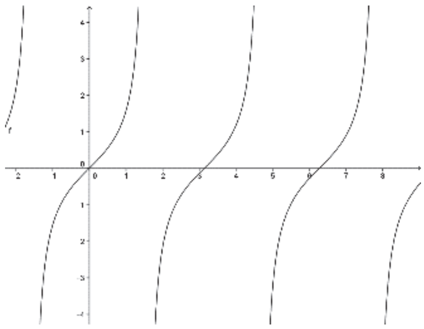
2. Analiza las siguientes preguntas luego encierra en un círculo la respuesta correcta.

A) La gráfica de la función $f(x) = \cos(x)$ es:

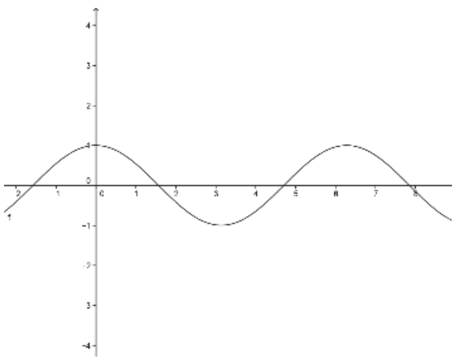
a.



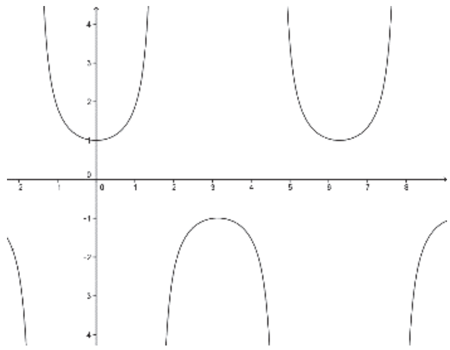
b.



c.



d.



B) El recorrido de la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ es:

a. [- 1 , 1]

b. R

c. [1, - 1]

d. Ninguno

Nombre: ______________________ Fecha: ______________

C) La medida de 360’ en grados es:

a. 36°

b. 6°

c. 9°

d. Ninguna

D) La función f(x) = 2 Sen (x) se:

a. Estira hacia arriba y abajo.

b. Se refleja con el eje x.

c. Se comprime hacia la derecha.

d. Se comprime hacia arriba y abajo.

E) En un período $[0, 2\pi]$, la intersección con el eje horizontal de la función

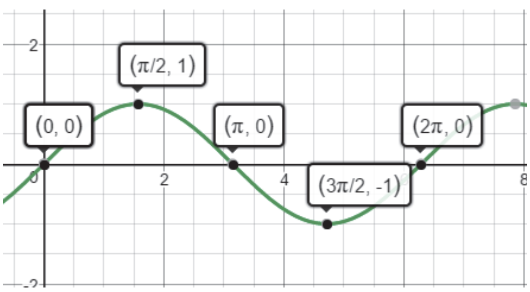
f(x) = Sen(x) es:

a. (0,0) ; (π ,1) ; (2π,0)

b. (0,0) ; (π ,0) ; (2π,0)

c. (0,0) ; (π ,0) ; (2π,1)

d. (0,0) ; (0 ,π) ; (2π,0)



3. Completa correctamente.

a. En la función f(x) = Cos (x + 2) la gráfica se mueve ………………... unidades hacia la ……………………, respecto de la función original f(x) = Cos (x).

b. En la función f(x) = - Sen (x), la gráfica se refleja en el eje ……….

Solucionario de evaluación con adaptaciones curriculares

1. a. F

b. V

c. V

d. F

e. F

2. A) c

B) a

C) b ;

D) a ;

E) b

3. a. Dos, Izquierda

b. Eje X

CICLO DEL APRENDIZAJE

¿Cómo dinamizo el aula?

Experiencia

Debatir la necesidad que existe en las ciencias de las telecomunicaciones de modelar matemáticamenta las ondas electromagnéticas (Las ondas de radio, de televisión, el WI-FI, son ondas electromagnéticas).

Conceptualización

Comparar las similitudes entre la gráfica de una función seno, con un gráfico de una onda electromagnética.

Usar un sistema de referencia adecuado e interpretar las características de la función seno y coseno.

Reflexión

Reflexionar acerca de la importancia de estos conocimientos en la tecnología actual.

Identificar las características y transformaciones de los gráficos de las funciones trigonométricas básicas.

Aplicación

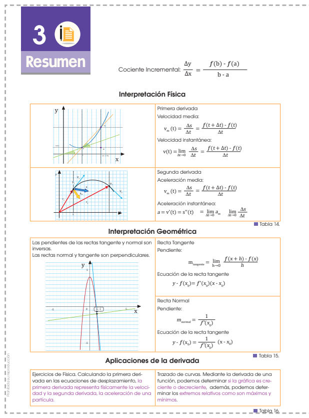
Usar los modelos matemáticos comprendidos en las características fisicas de las ondas.

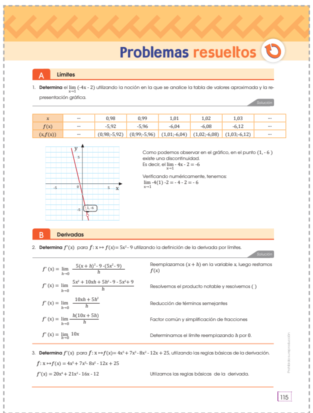
Reconocer e interpretas las características de las funciones trigonométricas.

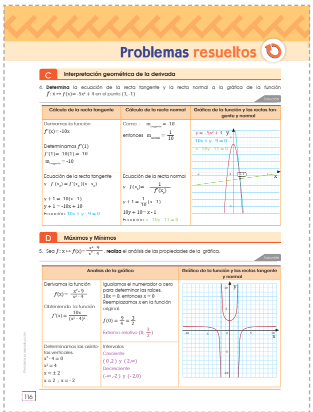
Producir predicciones usando los modelos matemáticos estudiados.

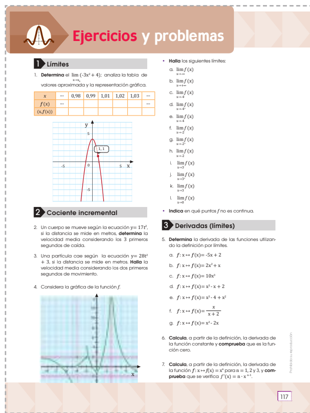
Derivadas

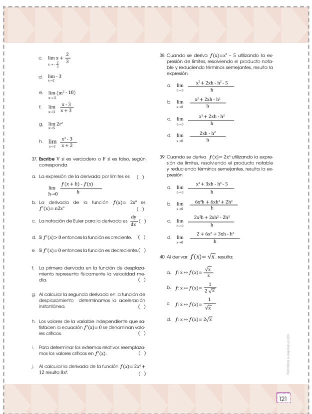

En Internet
EN CONTEXTO
89

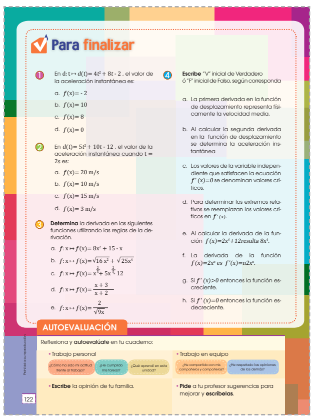

3
Resumen
Interpretación Física
Interpretación Geométrica
Aplicaciones de la derivada


Problemas resueltos
Límites
Derivadas
115


Problemas resueltos
Interpretación geométrica de la derivada
Máximos y Mínimos
116


Ejercicios y problemas
Límites
Cociente incremental
Derivadas (límites)
117


121


Para finalizar
AUTOEVALUACIÓN
122


ZONA
Proporción marginal al ahorro
Costo Marginal
Ingeniero en Finanzas
123

UNIDAD 3

Ejes temáticos	Contenidos
Derivadas	• La idea intuitiva de límite.......página 90 Estimación numérica de un límite.......página 91-92 • Cociente incremental.......página 93 Derivada de una función.......página 93 Calculo de la derivada de una función mediante la definición de límites.......página 94 La derivada y algunas de sus reglas básicas en funciones polinomiales.......página 95 Interpretación física del cociente incremental (velocidad media) ....páginas 96-97 Interpretación física del cociente incremental (velocidad instantánea) ....páginas 98-99 Interpretación geométrica de la primera derivada.......páginas 100-101 La derivada de funciones polinomiales utilizando las TIC.......páginas 102-103 Derivada de una función racional mediante la definición de limites.......página 104 La derivada de funciones racionales utilizando las TIC.......páginas 105-106 Segunda derivada de funciones polinómicas ....página 107 Interpretación física de la segunda derivada (aceleración media) ....página 108 Interpretación física de la segunda derivada aceleración instantánea.......página 109 Monotonía de funciones polinomiales de grado ≤ 4.......página 110 Unidad 3 En contexto... pág. 89 Propuesta para incentivar el debate a partir de la lectura e investigacion de documentos on-line. Resumen pág. 114 Es un resumen de los conceptos, definiciones y procedimientos más importantes de la unidad. Problemas resueltos págs. 115 -116 Es un registro de problemas resueltos que sirven como guia al estudiante. Ejercicios y problemas propuestos págs. 117 -121 Se proponen nuevos ejercicios relacionados con el tema abordado en la unidad. Para finalizar pág. 122 Propone nuevos ejercicios del tema de la unidad y una autoevaluacion. Zona WiFi pág. 123 Se aborda algunas aplicaciones de los contenidos de la unidad en la vida real. Análisis de intervalos (crecientes, decrecientes y constantes) ....página 111 Máximos y mínimos de una función.......páginas 112-113 Resumen.......página 114 Problemas resueltos.......páginas 115-116 Ejercicios y problemas.......páginas 117-121 Para finalizar.......página 122 Zona WiFi.......página 123

Prohibida su reproducción

93

<table>
<tr><th>LOGO INSTITUCIONAL</th><th colspan="4">NOMBRE DE LA INSTITUCIÓN</th><th colspan="3">AÑO LECTIVO</th></tr>
<tr><td colspan="8">PLAN DE UNIDAD TEMÁTICA</td></tr>
<tr><td colspan="8">1. DATOS INFORMATIVOS:</td></tr>
<tr><td>Docente:</td><td>Nombre del docente que ingresa la información</td><td>Área/asignatura:</td><td>MATEMÁTICA</td><td>Grado/Curso:</td><td>2° BACHILLERATO</td><td>Paralelo:</td><td></td></tr>
<tr><td>N.º de unidad de planificación:</td><td>3</td><td>Título de unidad de planificación:</td><td>DEERIVADAS DE FUNCIONES REALES</td><td colspan="2">Objetivos específicos de la unidad de planificación:</td><td colspan="2">Proponer soluciones creativas a situaciones concretas de la realidad nacional y mundial mediante la aplicación de las operaciones básicas de los diferentes conjuntos numéricos, el uso de modelos funcionales, algoritmos apropiados, estrategias y métodos formales y no formales de razonamiento matemático que lleven a juzgar con responsabilidad la validez
de procedimientos y los resultados en un contexto.

Producir, comunicar y generalizar información de manera escrita, verbal, simbólica, gráfica y/o tecnológica mediante la aplicación de conocimientos
Matemáticos y el manejo organizado, responsable y honesto de las fuentes de datos para comprender otras
disciplinas, entender las necesidades y potencialidades de nuestro
país y tomar decisiones con responsabilidad social.

Desarrollar la curiosidad y la creatividad en el uso de herramientas matemáticas al momento de enfrentar y solucionar problemas de la realidad nacional demostrando actitudes de orden, perseverancia y capacidades de investigación.</td></tr>
<tr><td>PERÍODOS</td><td colspan="2">24</td><td colspan="2"></td><td>SEMANA DE INICIO:</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="8">2. PLANIFICACIÓN</td></tr>
<tr><td colspan="6">DESTREZAS CON CRITERIOS DE DESEMPEÑO A SER DESARROLLADAS:</td><td colspan="2">CRITERIOS DE EVALUACIÓN</td></tr>
</table>

94

• Resolver (con o sin el uso de la tecnología) problemas o situaciones reales o hipotéticas que pueden ser modelizados con unciones cuadráticas identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas; juzgar la pertinencia y validez de los resultados obtenidos. • Calcular de manera intuitiva el límite cuando $h \to 0$ de una función cuadrática con el uso de calculadora como una distancia entre dos número reales. Calcular de manera intuitiva la derivada de funciones cuadráticas a partir del cociente incremental. • Interpretar de manera geométrica (pendiente de la secante) y física el cociente incremental (velocidad media) de funciones cuadráticas con apoyo de las TIC. • Interpretar de manera geométrica y física la primera derivada (pendiente de la tangente, velocidad instantánea) de funciones cuadráticas con apoyo de las TIC. • Interpretar de manera física la segunda derivada (aceleración media, aceleración instantánea) de una función cuadrática con apoyo de las TIC (calculadora gráfica, software, applets). • Resolver y plantear problemas reales o hipotéticos que pueden ser modelizados con derivadas de funciones cuadráticas entificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas, juzgando la pertinencia y validez de los resultados obtenidos. • Interpretar de manera geométrica y física la primera derivada (pendiente de la tangente, velocidad instantánea) de funciones polinomiales de grado = 4 con apoyo de las TIC. • Interpretar de manera física la segunda derivada (aceleración media, aceleración instantánea) de una función polinomial de grado = 4 para analizar la monotonía, determinar los máximos y mínimos de estas funciones y graficarlas con apoyo de las TIC (calculadora gráfica, software, applets). • Calcular de manera intuitiva la derivada de funciones racionales cuyos numeradores y denominadores sean polinomios de grado = 2 para analizar la monotonía, determinar los máximos y mínimos de estas funciones y graficarlas con apoyo de las TIC (calculadora gráfica, software, applets). • Resolver aplicaciones reales o hipotéticas con ayuda de las derivadas de funciones polinomiales de grado = 4 y de funciones racionales cuyos numeradores y denominadores sean polinomios de grado = 2 y juzgar la validez y pertinencia de los resultados obtenidos.	CE.M.5.3. Opera y emplea funciones reales, lineales, cuadráticas, polinomiales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas para plantear situaciones hipotéticas y cotidianas que puedan resolverse mediante modelos matemáticos; comenta la validez y limitaciones de los procedimientos empleados y verifica sus resultados mediante el uso de las TIC.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	RECURSOS	INDICADORES DE LOGRO	TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN
Aplicar el principio de incrementos, como introducción al tema de derivada de una función. Debatir en clase los fenómenos de velocidad y aceleración, estudiados en física, para poner en contexto el tema de derivadas de una función. Analizar una imagen de la noción geométrica de secante y tangente a una curva, evidenciando las características principales de estos conceptos. Diferenciar los conceptos entre incrementos grandes e infinitecimales en una función, por medio del concepto de límite de una función, numéricamente. Comparar las relaciones entre derivada de una función. Interpretar el significado de cociente incremental. Reflexionar acerca de la importancia de estos modelos matemáticos en ciencias como física, química, economía, etc. Identificar los métodos básicos de derivación de funciones elementales. Atravez de un gráfico evidenciar con un ejemplos la utilidad de los temas tratados en esta unidad, en problemas físicos, químicos, etc. Reconocer los elementos (variables) involucradas en los gráfico y sus respectivas ecuaciones. Producir predicciones usando los modelos matemáticos estudiados.	- Texto - Cuaderno - Videos (sitios web) - Pizarra - Calculadora	IM.5.3.1. Grafica funciones reales y analiza su dominio, recorrido, monotonía, ceros, extremos, paridad; identifica las funciones afines, potencia, raíz cuadrada, valor absoluto; reconoce si una función es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva; realiza operaciones con funciones aplicando las propiedades de los números reales en problemas reales e hipotéticos. (I.4.) M.5.3.2. Representa gráficamente funciones cuadráticas; halla las intersecciones con los ejes, el dominio, rango, vértice y monotonía; emplea sistemas de ecuaciones para calcular la intersección entre una recta y una parábola o dos parábolas; emplea modelos cuadráticos para resolver problemas, de manera intuitiva halla un límite y la derivada; optimiza procesos empleando las TIC. (13, 14) M.5.3.3. Reconoce funciones polinomiales de grado n, opera con funciones polinomiales de grado =4 y racionales de grado =3; plantea modelos matemáticos para resolver problemas aplicados a la informática; emplea el teorema de Horner y el teorema del residuo para factorizar polinomios; con la ayuda de las TIC, escribe las ecuaciones de las asíntotas, y discute la validez de sus resultados. (I.3., I.4.) M.5.3.4. Halla gráfica y analíticamente el dominio, recorrido, monotonía, periodicidad, desplazamientos, máximos y mínimos de funciones trigonométricas para modelar movimientos circulares y comportamientos de fenómenos naturales, y discute su pertinencia; emplea la tecnología para corroborar sus resultados. (J.3., I.2.)	Comprobar el desarrollo de las habilidades necesarias para reconocer, interpretar, graficar, analizar las características y operar con funciones de variable real (lineal, cuadrática, exponencial, logarítmica, trigonométrica, polinomiales y racionales). Que el estudiante analice el dominio, el recorrido, la monotonía, los ceros, máximos y mínimos, paridad y composición de las diferentes funciones. También se incluyen las propiedades de inyectividad, sobreyectividad y biyectividad. Apoyándose con las TIC, debe poder graficar, interpretar y encontrar las intersecciones con los ejes, y la intersección de las gráficas de funciones; además de hallar la solución de ecuaciones de manera gráfica; interpretar geométricamente la derivada de una función cuadrática y sus aplicaciones; y comprender la noción de límite y su aplicación, así como la modelización de situaciones reales a través de las funciones.

ELEMENTOS DEL PERFIL DE SALIDA

J.3. Procedemos con respeto y responsabilidad con nosotros y con las demás personas, con la naturaleza y con el mundo de las ideas. Cumplimos nuestras obligaciones y exigimos la observación de nuestros derechos.
I.2. Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos e información posibles.
I.3. Sabemos comunicarnos de manera clara en nuestra lengua y en otras, utilizamos varios lenguajes como el numérico, el digital, el artístico y el corporal; asumimos con

ELABORADO	REVISADO	APROBADO
Docente:	Director del área :	Vicerrector:
Firma:	Firma:	Firma:
Fecha:	Fecha:	Fecha:

Objetivos generales del área que se evalúan

- Emplear progresiones aritméticas, geométricas y sumas parciales finitas de sucesiones numéricas en el planteamiento y resolución de problemas de diferentes ámbitos
- Reconocer las funciones trigonométricas (seno, coseno, tangente, secante, cosecante y cotangente), sus propiedades y las relaciones existentes entre estas funciones y representarlas de manera gráfica con apoyo de las TIC (calculadora gráfica, software, applets).

Objetivos del área por subnivel

- Reconocer y graficar funciones periódicas determinando el período y amplitud de las mismas, su dominio y recorrido, monotonía, paridad.
- Reconocer y resolver (con apoyo de las TIC) aplicaciones, problemas o situaciones reales o hipotéticas que pueden ser modelizados con funciones trigonométricas, identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas, y juzgar la validez y pertinencia de los resultados obtenidos.
- O.M.5.2. Producir, comunicar y generalizar información, de manera escrita, verbal, simbólica, gráfica y/o tecnológica, mediante la aplicación de conocimientos matemáticos y el manejo organizado, responsable y honesto de las fuentes de datos, para así comprender otras disciplinas, entender las necesidades y potencialidades de nuestro país, y tomar decisiones con responsabilidad social.

Objetivo integrador del área por subnivel

- OI.5.2. Aplicar conocimientos de diferentes disciplinas para la toma de decisiones asertivas.
- OI.5.11. Reflexionar y tomar decisiones respecto a una sexualidad responsable y a su participación sistemática en prácticas corporales y estéticas, considerando su repercusión en una vida saludable y la influencia de las modas en la construcción de los hábitos y de las etiquetas sociales en la concepción de la imagen corporal.

Nombre: ______________________ Fecha: ______________

Criterios de evaluación

- Opera y emplea funciones reales, lineales, cuadráticas, polinomiales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas para plantear situaciones hipotéticas y cotidianas que puedan resolverse mediante modelos matemáticos; comenta la validez y limitaciones de los procedimientos empleados y verifica sus resultados mediante el uso de las TIC.
- Reconoce patrones presentes en sucesiones numéricas reales, monótonas y definidas por recurrencia; identifica las progresiones aritméticas y geométricas; y, mediante sus propiedades y fórmulas, resuelve problemas reales de matemática financiera e hipotética. y el tráfico de personas esclavizadas liderado por las grandes potencias.

Elementos del perfil de salida a los que se contribuye

- Procedemos con respeto y responsabilidad con nosotros y con las demás personas, con la naturaleza y con el mundo de las ideas. Cumplimos nuestras obligaciones y exigimos la observación de nuestros derechos.
- Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos e información posibles

Indicadores para la evaluación del criterio

- Halla gráfica y analíticamente el dominio, recorrido, monotonía, periodicidad, desplazamientos, máximos y mínimos de funciones trigonométricas para modelar movimientos circulares y comportamientos de fenómenos naturales, y discute su pertinencia; emplea la tecnología para corroborar sus resultados

Prohibida su reproducción

97

1. Completa correctamente.

a. $(x - 2)(x + 4) =$..

b. $5x - x(x + 2) =$ ....

c. $16x2 - 40x + 25 =$ ....

d. $\frac{x^2 - 4x}{x-4} =$ ....

2. Responde verdadero (V) o falso (F).

a. $x2 - 25 = (x - 5)2$ ( )

b. El valor numérico de la expresión $5x2 - 3x + 1$ para $x = 3$ es 37. ( )

c. La pendiente de la recta $3x - 2y = 5$ ( )

d. La fórmula para calcular la altura en caída libre de un cuerpo es:

$$h = \frac{1}{2} gt^2$$

3. Escoge la respuesta correcta.

A) La pendiente de la recta perpendicular a la recta –x + 2y = 4 es:

a. 2

b. 12

c. -2

B) La ecuación de pendiente 3 y que pasa por el punto (2, -3) es:

a. y = - 3 x – 9

b. y = 3x - 9

c. y = - 3 x + 9

d. y = x – 9

C) El valor numérico de $\frac{x-2}{x+4}$ para x = 0,1.

a. – 0,46

b. 0, 46

c. 0,51

d. – 0,51

D) Al simplificar la expresión $\frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$ se obtiene:

a. x – 2

b. x - 1

c. – x + 1

d. x + 1

Prohibida su reproducción

98

1. a. x2 + 2 x – 8

b. - x2 + 3 x

c. (4 x – 5)2

d. x

2. a. F

b. V

c. F

d. V

3. A. c

B. b

C. a

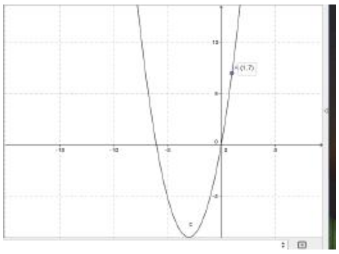
D. d

Solucionario

Actividad 1

a.

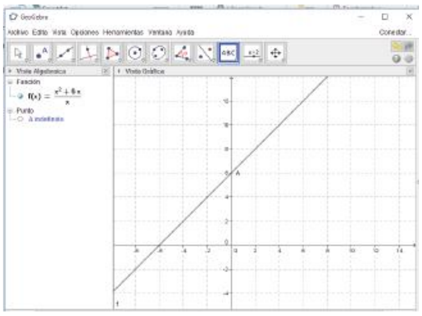
x	-	0,98	0,99	1,01	1,02	1,03	-
f(x)	-	6,84	6,92	7,08	7,16	7,24	-



Comparación: Para valores de x > 1 , f(x) crece y para valores x < 1 , f(x) decrece.

b.

x	-	-0,1	-0	0,001	0,11	-
f(x)	-	5,9	5,999	6,001	6,11	-



Comparación: Para valores de x > 0, f(x) crece y para valores x < 0, f(x) decrece.

Página 91

Estimación numérica de un límite

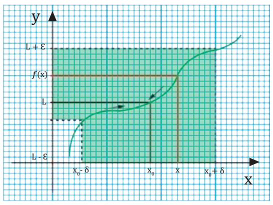


Fig. 1.

Un número real L es el límite de una función f cuando x tiende o se aproxima a x_0 si y solo si para cualquier número real positivo ε, por pequeño que sea, existe un número real positivo δ, tal que para todo $x \neq x_0$, si la distancia entre x y x_0 es menor que δ, entonces la distancia entre $f(x)$ y L es menor que ε.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Ejemplo 2

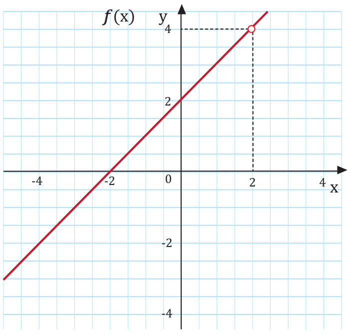
Considerando la función:

$$f: x \mapsto f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}, \; x \neq 2$$

Supongamos que es posible representar gráficamente la función f, pero es notable observar que cuando x = 2, la función no podría representarse, debido a que se anula el denominador.

Para observar el comportamiento de la función, generamos una tabla de valores que se aproximen a dos por la izquierda y por la derecha, es decir utilizamos valores un poco menores y un poco mayores que 2, como se ilustra en la siguiente tabla.

x	...	1,98	1,99	2,01	2,02	2,03	...
$f(x)$	...	3,98	3,99	4,01	4,02	4,03	...



Como es notable, el límite de la función es 4, debido a que se acerca por la izquierda y por la derecha.

Actividades

1. Considerando los siguientes límites, **completa** las tablas respectivas y **estima** el límite. **Compara** el resultado con la representación gráfica respectiva.

a. $\lim_{x\to 1} (x^2 + 6x)$

x	...	0,98	0,99	1,01	1,02	1,03	...
$f(x)$	...						...
$(x, f(x))$							

b. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{x^2 + 6x}{x}\right)$

x	...	-0,1	-0,001	0,001	0,1	...
$f(x)$	...					...
$(x, f(x))$						

c. $\lim_{x\to 4} \left(\frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4}\right)$

x	...	3,98	3,99	4,01	4,02	4,03	...
$f(x)$	...						...
$(x, f(x))$							

d. $\lim_{x\to -1} \left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 4}\right)$

x	...	-0,99	-0,98	1,01	1,02	...
$f(x)$	...					...
$(x, f(x))$						

Página 91

Estimación numérica de un límite

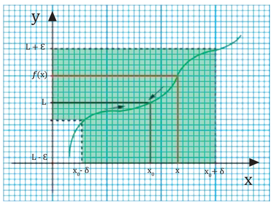


Fig. 1.

Un número real L es el límite de una función f cuando x tiende o se aproxima a x_0 si y solo si para cualquier número real positivo ε, por pequeño que sea, existe un número real positivo δ, tal que para todo $x \neq x_0$, si la distancia entre x y x_0 es menor que δ, entonces la distancia entre $f(x)$ y L es menor que ε.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Ejemplo 2

Considerando la función:

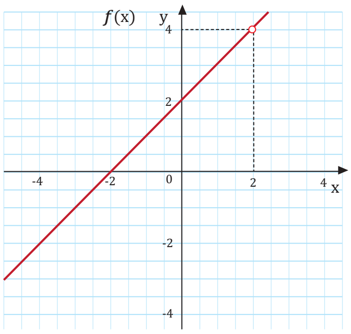
$f: x \mapsto f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$, $x \neq 2$

Supongamos que es posible representar gráficamente la función f, pero es notable observar que cuando x = 2, la función no podría representarse, debido a que se anula el denominador.

Para observar el comportamiento de la función, generamos una tabla de valores que se aproximen a dos por la izquierda y por la derecha, es decir utilizamos valores un poco menores y un poco mayores que 2, como se ilustra en la siguiente tabla.

x	...	1,98	1,99	2,01	2,02	2,03	...
$f(x)$	...	3,98	3,99	4,01	4,02	4,03	...

Como es notable, el límite de la función es 4, debido a que se acerca por la izquierda y por la derecha.



Actividades

1. Considerando los siguientes límites, **completa** las tablas respectivas y **estima** el límite. **Compara** el resultado con la representación gráfica respectiva.

a. $\lim_{x \to 1} (x^2 + 6x)$

x	...	0,98	0,99	1,01	1,02	1,03	...
$f(x)$	...						...
$(x, f(x))$							

b. $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2 + 6x}{x}\right)$

x	...	-0,1	-0,001	0,001	0,1	...
$f(x)$	...					...
$(x, f(x))$						

c. $\lim_{x \to 4} \left(\dfrac{x^2 - 6x + 8}{x - 4}\right)$

x	...	3,98	3,99	4,01	4,02	4,03	...
$f(x)$	...						...
$(x, f(x))$							

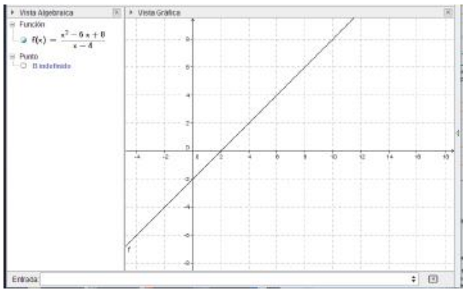
d. $\lim_{x \to -1} \left(\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x + 4}\right)$

x	...	-0,99	-0,98	1,01	1,02	...
$f(x)$	...					...
$(x, f(x))$						

Solucionario

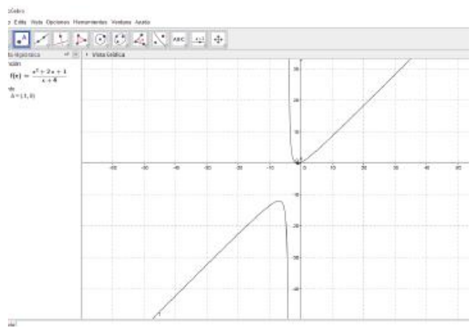
c.

x	-	3,98	3,99	4,01	4,02	4,03	-
f(x)	-	1,98	1,99	2,01	2,02	2,03	-



Comparación: Para valores de x > 4, f(x) crece y para valores x < 4 , f(x) decrece.

x	...	-0,99	-0,98	
f(x)	...	3,3E-05	0,00013	0,8



Comparación: Para valores de x > -1, f(x) crece en el primer ramal y en el intervalo $]-4, -1]$ f(x) decrece en el primer ramal; mientras que en el segundo ramal en la primera parte crece y la segunda parte decrece.

Solucionario

3,18 m/s

Página 94

Cálculo de la derivada de una función mediante la definición de límites

En los procesos esenciales para obtener la derivada intervienen: productos notables, simplificación de expresiones semejantes y sustituciones numéricas; así tenemos:

Ejemplo No 1	Ejemplo No 2
Determinemos $f'(x)$ para $f: x \mapsto f(x) = 8x + 5$	Determinemos $f'(x)$ para $f: x \mapsto f(x) = -5x^2 - 3$
En cada variable x insertamos la adición de h; luego restamos la función original.	
$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{8(x+h) + 5 - (8x+5)}{h}$	$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-5(x+h)^2 - 5 - (-5x - 3)}{h}$
Propiedad distributiva en los paréntesis.	Productos notables y propiedad distributiva en los paréntesis.
$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{8x + 8h + 5 - 8x - 5}{h}$	$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-5x^2 - 10xh - 5h^2 - 3 + 5x^2 + 3}{h}$
Reducimos términos semejantes	
$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{8h}{h}$	$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-10xh - 5h^2}{h}$
Simplificamos h	Sacamos el factor común y simplificamos
$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{8\cancel{h}}{\cancel{h}}$	$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-5\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}}$
Finalmente, calculamos el límite reemplazando h por 0	
$f'(x) = 8$	$f'(x) = -10x$

Tabla 2.

Actividades

2. Suponiendo que el movimiento de un cuerpo se interpreta según la ecuación: $y = 10t^2$, **determina** la velocidad media considerando los dos primeros segundos de caída.

3. Suponiendo que el movimiento de un cuerpo se interpreta según la ecuación: $y = 3t^2 - 2$, **determina** la velocidad media considerando los cinco primeros segundos de caída.

4. **Determina** la derivada de las funciones utilizando la definición de la derivada.

   a. $f: x \mapsto f(x) = -16x + 9$
   b. $f: x \mapsto f(x) = 5x$
   c. $f: x \mapsto f(x) = x^2 - x$
   d. $f: x \mapsto f(x) = 4x^3 + 3x + 2$
   e. $f: x \mapsto f(x) = x - 6x^2$

Página 95

A continuación se presentan algunas reglas básicas de la derivación, las cuales permitirán calcular las derivadas sin el uso de la definición de la derivada por límites.

Regla 1: Sea la función constante definida por: $f: x \mapsto f(x) = k$, donde k es constante. La derivada de una función constante es cero. $f'(x) = 0$.

Explica que al derivar una función constante, en general un número real, entonces la derivada es cero.

Hallamos las derivadas de:

a. $f: x \mapsto f(x) = -5$ entonces $f'(x) = 0$

b. $f: x \mapsto f(x) = 9\pi c$ entonces $f'(x) = 0$

c. $\frac{d}{dx}\sqrt{5}$ entonces $\frac{d}{dx} = 0$

d. $f: x \mapsto f(x) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{3}{5}$ entonces $f'(x) = 0$

Regla 2: Sea la función definida por: $f: x \mapsto f(x) = x^n$. La derivada de esta función es $f'(x) = nx^{n-1}$. Cuando n es cualquier número real.

Explica que el exponente multiplica a la función y que la base x tiene una nueva potencia reducida en una unidad, con respecto a la función inicial.

Hallamos las derivadas de:

a. $f: x \mapsto f(x) = -5x^3$ entonces $f'(x) = -15x^2$

b. $f: x \mapsto f(x) = 9x^5$ entonces $f'(x) = 45x^4$

c. $f: x \mapsto f(x) = -4x^{-2}$ entonces $f'(x) = 8x^{-3}$

Regla 3: La derivada en la adición o sustracción. Siendo las funciones g y h diferenciables:

Expone que la derivada de la suma o la resta de funciones es la suma o diferencia de las derivadas independientes de cada función de manera independiente.

$$\text{sea } f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

$$\text{sea } u(x) = g(x) - h(x) \Rightarrow u'(x) = g'(x) - h'(x)$$

Hallamos las derivadas de:

a. $f: x \mapsto f(x) = x^3 + 8x^2$ entonces $f'(x) = 3x^2 + 16x$

b. $f: x \mapsto f(x) = 9x^5 + 12x^3$ entonces $f'(x) = 45x^4 + 36x^2$

c. $f: x \mapsto f(x) = -4x^{-2} - 15x$ entonces $f'(x) = 8x^{-3} - 15$

Estudiaremos el resto de reglas en el curso superior, debido a que el propósito de explicar únicamente las reglas mencionadas es que el estudiante pueda verificar los resultados obtenidos en la diferenciación por límites.

Actividades

5. **Deriva** las funciones utilizando las reglas de diferenciación básicas (reglas 1 a 3).

a. $f: x \mapsto f(x) = -5x^2 + 8$

b. $f: x \mapsto f(x) = -5\pi^3$

c. $f: x \mapsto f(x) = -e^2 + \frac{3}{7}$

d. $f: x \mapsto f(x) = -12x^2 + 8x + 15$

e. $f: x \mapsto f(x) = -20x^2 + \sqrt{12}$

f. $f: x \mapsto f(x) = \pi x + \sqrt{5}$

95

Solucionario

5.

a. $f'(x) = -10x$

b. $f'(x) = 0$

c. $f'(x) = 0$

d. $f'(x) = -24x + 8$

e. $f'(x) = -40x$

f. $f'(x) = \pi$

Página 99

Solucionario

7.- 55 ; - 125

Segundo método: Utilizando las reglas básicas de derivación (página 91).
Determinamos la primera derivada de la función:
$s(t) = 8t^2 - 5t + 2$. Aplicando las reglas 1, 2 y 3.
$s'(t) = 16t - 5$
Reemplazamos el valor de $t = 4{,}7$ segundos
$s'(4{,}7) = 16(4{,}7) - 5$
Resolvemos las operaciones

$v = 70{,}2\ \frac{m}{s}$

Respuesta: La velocidad instantánea es $70{,}2\ \frac{m}{s}$

Es notable que los resultados obtenidos, utilizando los dos métodos, son iguales.

Ejemplo 7

Se deja caer una piedra desde un edificio de 300 metros de altura. ¿Cuál es el tiempo en el que la piedra llega al suelo y con qué velocidad lo hace?
Razonamiento: Es notable que en el enunciado del ejercicio no disponemos del valor del tiempo, por ende, lo primero que se debe hacer es calcularlo.
Sea la ecuación de caída libre: $s(t) = v_o + \frac{1}{2}gt^2$ y sabiendo que $v_o = 0$ (se deja caer), $s = 300m$ y que el valor de $g = 9{,}8\ \frac{m}{s^2}$, resulta la expresión:
$300 = 4{,}9t^2$
Despejamos la variable tiempo.

$$4{,}9\,t^2 = 300;\ t^2 = \frac{300}{4{,}9};\ t = \sqrt{\frac{300}{4{,}9}}\quad;\quad t = 7{,}8\text{ s}$$

Derivamos la expresión: $s(t) = 4{,}9\,t^2$

$s'(t) = 9{,}8\,t;\quad s'(7{,}8) = 9{,}8\,(7{,}8);\quad s'(7{,}8) = 76{,}44\ \frac{m}{s}$

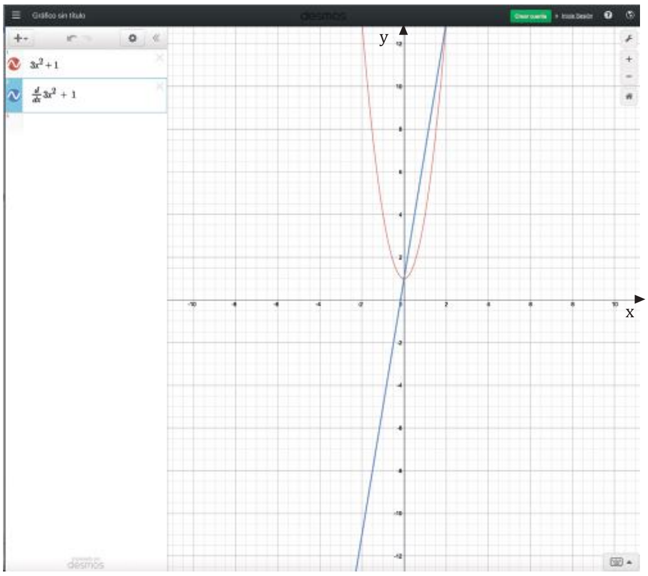
La piedra llega al suelo en 7,8 segundos con una velocidad de $76{,}44\ \frac{m}{s}$

Actividades

7. Se lanza hacia arriba una bola de béisbol con una velocidad inicial de $115\ \frac{m}{s}$, su distancia s en función de t está dada por $s: t \mapsto s(t) = 115t - 10t^2$. **Halla** la velocidad que alcanza en $t = 3$ y $t = 12$.
8. El desplazamiento en metros de una partícula que se mueve en línea recta se expresa con $s: t \mapsto s(t) = 2t^3 + 5t^2 - 3t$, donde t está expresada en segundos. **Halla** la velocidad instantánea cuando $t = 5$.

Página 103

5. En la pantalla se visualizará el siguiente resultado:



Es notable en el gráfico que, al derivar una función polinomial, la derivada resulta una función de grado menor.

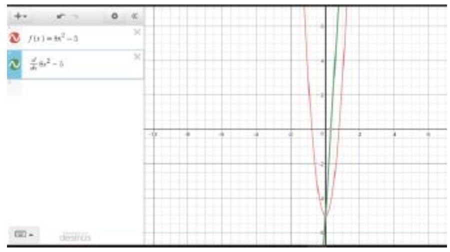
Como muestra la gráfica, una función cuadrática (azul) de segundo grado, luego de derivar, resulta una función lineal (verde) de grado 1.

Actividades

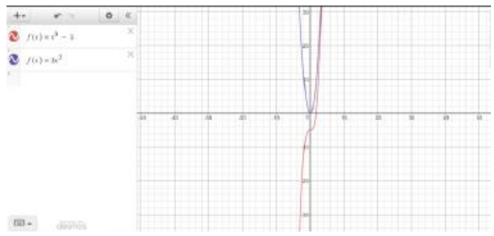
9. Utilizando el graficador Desmos, **determina** las representaciones gráficas de la función con su respectiva derivada.
   a. $f: x \mapsto f(x) = 8x^2 - 5$
   b. $f: x \mapsto f(x) = x^3 - 5$
   c. $f: x \mapsto f(x) = x^4 - 4x^3 + 8x$
   d. $f: x \mapsto f(x) = -x^5 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{5}{7}x - 12$

Solucionario

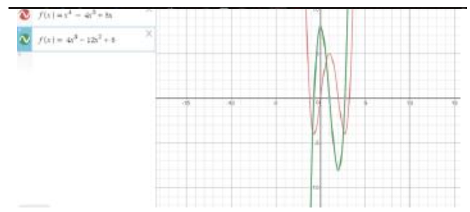
9. a



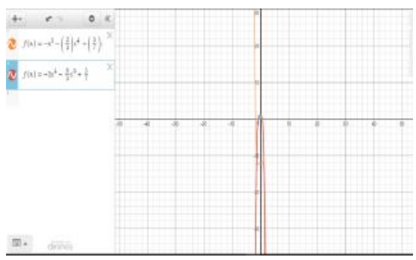
b. La gráfica de color violeta es la derivada.



c. La gráfica de color verde es la derivada.



d. La gráfica de color rojo es la derivada.



Solucionario

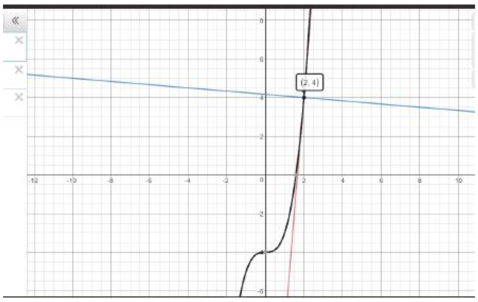
11.

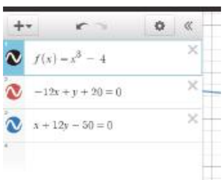
Ecuación de la recta tangente.

$-12x + y + 20 = 0$

Ecuación de la recta normal.

$x + 12\,y - 50 = 0$





Página 104

Derivada de una función racional mediante la definición de límites

De forma análoga, es posible obtener la derivada de una función racional cuyos esenciales son: adición y/o sustracción de fracciones algebraicas, fracciones complejas, simplificación de expresiones semejantes y sustituciones numéricas; así tenemos:

Ejemplo No 1	Ejemplo No 2
Determine $f'(x)$ para $f(x)=\frac{3}{x}$	Determine $f'(x)$ para $f(x)=\frac{x}{(x-4)}$
En cada variable x insertamos la adición de h; luego, restamos la función original.	
$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{3}{(x+h)} - \frac{3}{x}}{h}$	$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{x+h}{x+h-4} - \frac{x}{(x-4)}}{h}$
Resolvemos la diferencia de fracciones algebraicas	
$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{3x-3x-3h}{(x+h)\,(x)}}{h}$	$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{x^2+xh-4x-4h-x^2-xh+4x}{(x+h-4)\,(x-4)}}{h}$
Dividimos las fracciones algebraicas	
$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3x-3x-3h}{(x+h)\,(x)\,(h)}$	$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x^2+xh-4x-4h-x^2-xh+4x}{h(x+h-4)\,(x-4)}$
Reducimos los términos semejantes y simplificamos las fracciones	
$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3\cancel{h}}{(x+h)\,(x)\,(\cancel{h})}$	$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cancel{x^2}+\cancel{xh}-\cancel{4x}-4h-\cancel{x^2}-\cancel{xh}+\cancel{4x}}{h(x+h-4)\,(x-4)}$
Finalmente, calculamos el límite reemplazando h por 0	
$f'(x) = -\dfrac{3}{x^2}$	$f'(x) = \dfrac{-4}{(x-4)^2}$

Tabla 8.

Actividades

10. **Determina** la ecuación de la recta tangente y la recta normal a la gráfica de la función $f: x \mapsto f(x) = x^2 + 2$ en el punto (1, 3). **Realiza** la representación gráfica de la función y de las rectas: tangente y normal.

11. **Determina** la ecuación de la recta tangente y la recta normal a la gráfica de la función $f: x \mapsto f(x) = x^3 - 4$ en el punto (2, 4). **Realiza** la representación gráfica de la función y de las rectas tangente y normal.

12. **Determina** la derivada de las funciones racionales utilizando la definición de la derivada por límites.

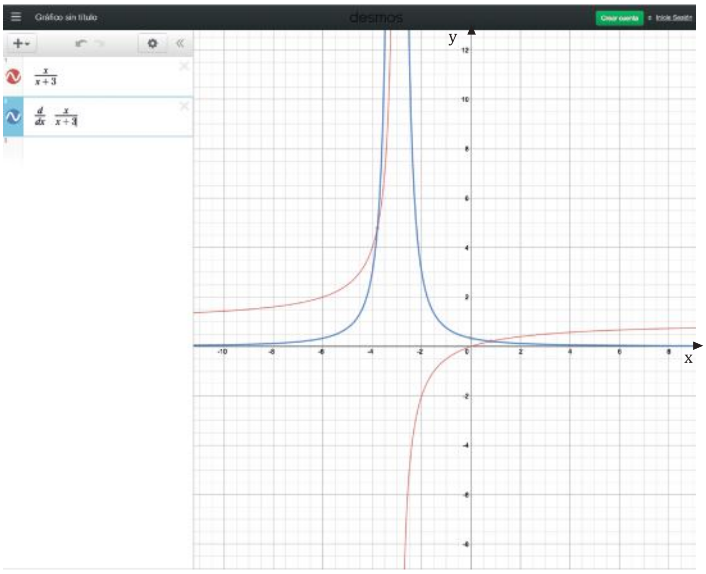
a. $f: x \mapsto f(x) = \dfrac{5x}{x+3}$

b. $f: x \mapsto f(x) = \dfrac{4}{x^2-1}$

c. $f: x \mapsto f(x) = \dfrac{x-3}{x+1}$

Página 106

5. En la pantalla se visualizará el siguiente resultado:



En la gráfica se aprecia $f(x)=\dfrac{x}{x+3}$ con asíntota vertical en x = -3 y su respectiva derivada, que resulta la función $f(x)=\dfrac{3}{(x+3)^2}$ con asíntota horizontal $y=0$.

Actividades

13. Utilizando el graficador Desmos, **determina** las representaciones gráficas de la función con su respectiva derivada.

a. $f: x \mapsto f(x)=\dfrac{4}{x-5}$

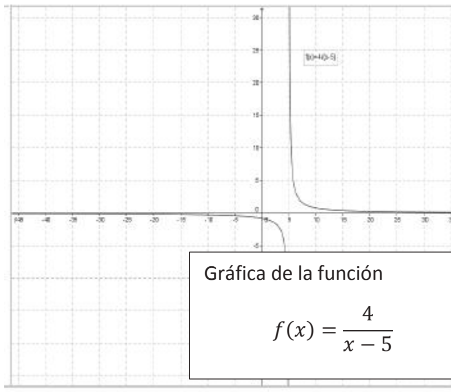
b. $f: x \mapsto f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

c. $f: x \mapsto f(x)=\dfrac{5}{x^2-1}$

d. $f: x \mapsto f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-1}$

Solucionario

9. a

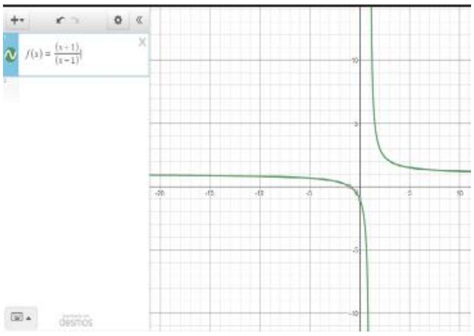


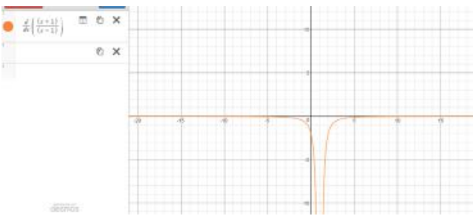
Gráfica de la función

$$f(x)=\frac{4}{x-5}$$

Solucionario

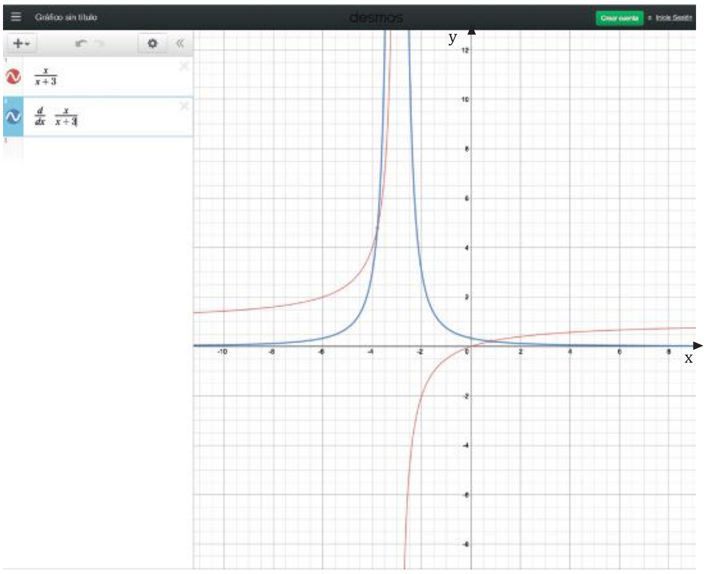
b.





Página 106

5. En la pantalla se visualizará el siguiente resultado:



En la gráfica se aprecia $f(x)=\frac{x}{x+3}$ con asíntota vertical en x = -3 y su respectiva derivada, que resulta la función $f(x)=\frac{3}{(x+3)^2}$ con asíntota horizontal $y=0$.

Actividades

13. Utilizando el graficador Desmos, **determina** las representaciones gráficas de la función con su respectiva derivada.

a. $f: x \mapsto f(x)=\frac{4}{x-5}$

b. $f: x \mapsto f(x)=\frac{x+1}{x-1}$

c. $f: x \mapsto f(x)=\frac{5}{x^2-1}$

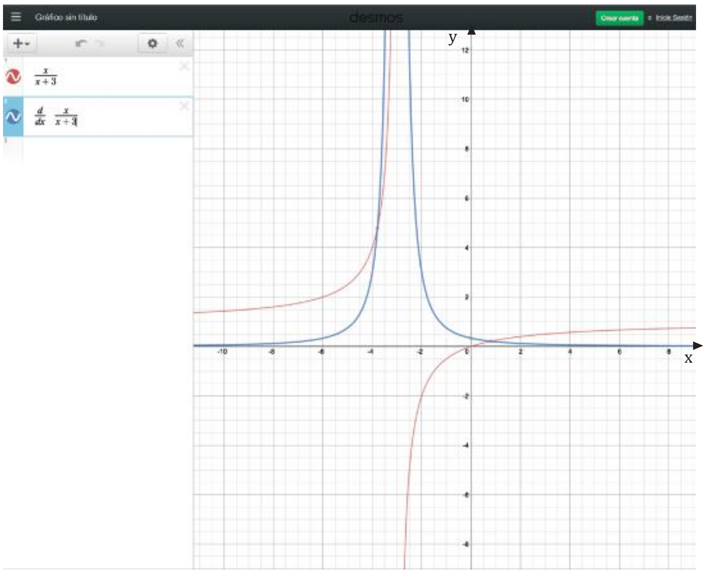
d. $f: x \mapsto f(x)=\frac{x-3}{x^2-1}$

106

Solucionario

Página 106

5. En la pantalla se visualizará el siguiente resultado:



En la gráfica se aprecia $f(x)=\dfrac{x}{x+3}$ con asíntota vertical en x = -3 y su respectiva derivada, que resulta la función $f(x)=\dfrac{3}{(x+3)^2}$ con asíntota horizontal $y = 0$.

Actividades

13. Utilizando el graficador Desmos, **determina** las representaciones gráficas de la función con su respectiva derivada.

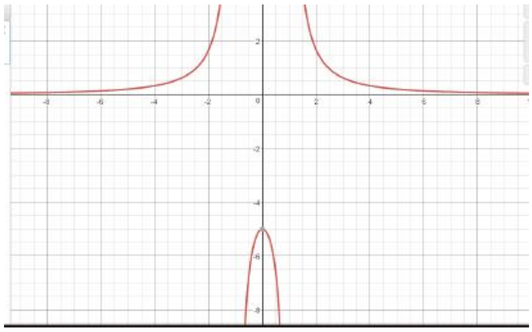
a. $f: x \mapsto f(x)= \dfrac{4}{x-5}$

b. $f: x \mapsto f(x)= \dfrac{x+1}{x-1}$

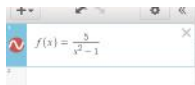
c. $f: x \mapsto f(x)= \dfrac{5}{x^2-1}$

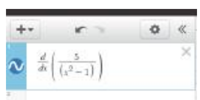
d. $f: x \mapsto f(x)= \dfrac{x-3}{x^2-1}$

106



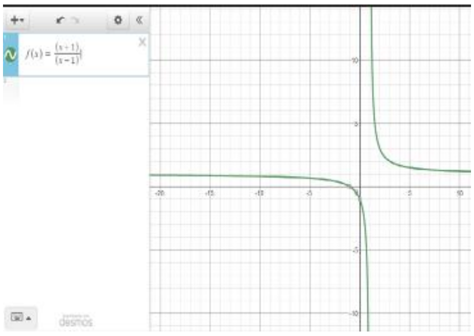
c.

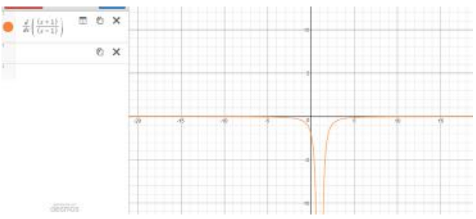




Solucionario

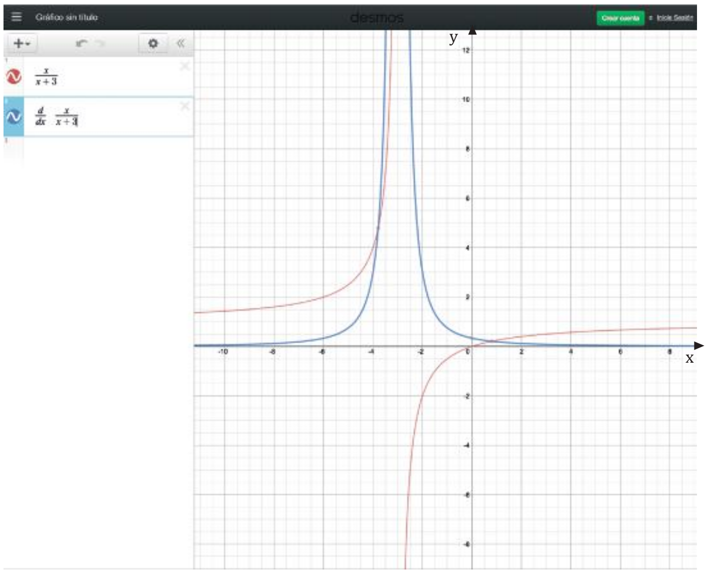
b.





Página 106

5. En la pantalla se visualizará el siguiente resultado:



En la gráfica se aprecia $f(x)=\dfrac{x}{x+3}$ con asíntota vertical en x = -3 y su respectiva derivada, que resulta la función $f(x)=\dfrac{3}{(x+3)^2}$ con asíntota horizontal $y=0$.

Actividades

13. Utilizando el graficador Desmos, **determina** las representaciones gráficas de la función con su respectiva derivada.

a. $f: x \mapsto f(x)=\dfrac{4}{x-5}$

b. $f: x \mapsto f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

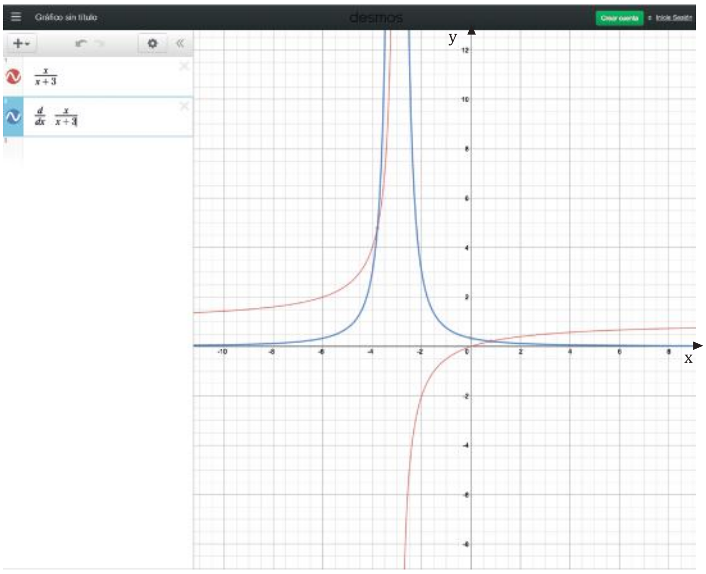
c. $f: x \mapsto f(x)=\dfrac{5}{x^2-1}$

d. $f: x \mapsto f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-1}$

106

Página 106

5. En la pantalla se visualizará el siguiente resultado:



En la gráfica se aprecia $f(x)=\frac{x}{x+3}$ con asíntota vertical en x = -3 y su respectiva derivada, que resulta la función $f(x)=\frac{3}{(x+3)^2}$ con asíntota horizontal $y=0$.

Actividades

13. Utilizando el graficador Desmos, **determina** las representaciones gráficas de la función con su respectiva derivada.

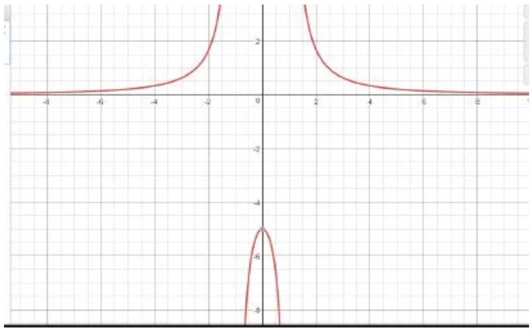
a. $f: x \mapsto f(x)=\frac{4}{x-5}$

b. $f: x \mapsto f(x)=\frac{x+1}{x-1}$

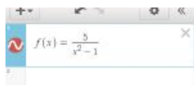
c. $f: x \mapsto f(x)=\frac{5}{x^2-1}$

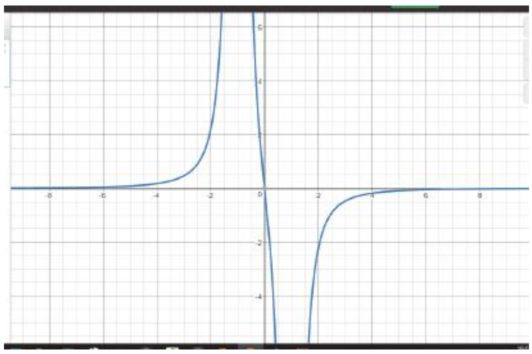
d. $f: x \mapsto f(x)=\frac{x-3}{x^2-1}$

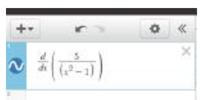
Solucionario



c.

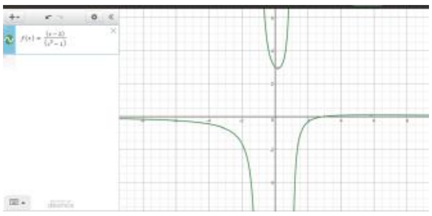


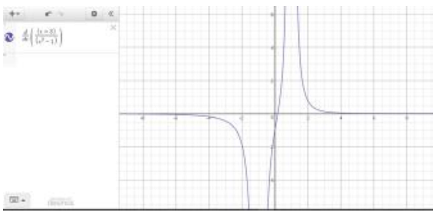




Solucionario

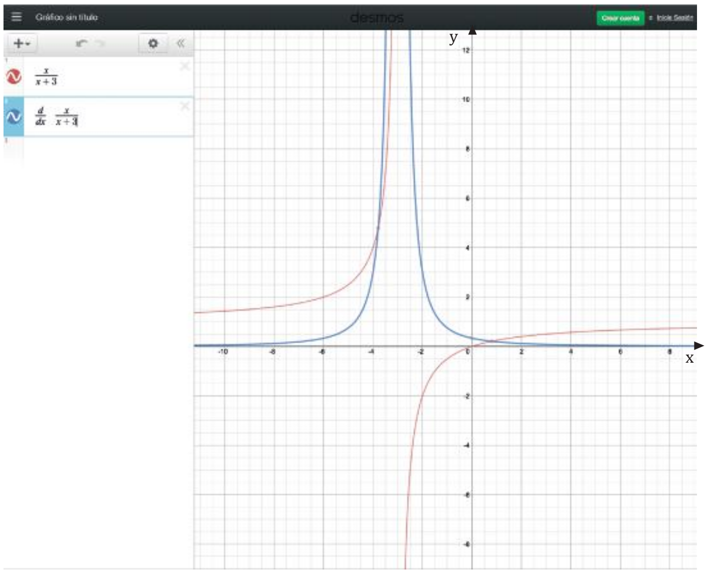
d.





Página 106

5. En la pantalla se visualizará el siguiente resultado:



En la gráfica se aprecia $f(x)=\dfrac{x}{x+3}$ con asíntota vertical en x = -3 y su respectiva derivada, que resulta la función $f(x)=\dfrac{3}{(x+3)^2}$ con asíntota horizontal $y = 0$.

13. Utilizando el graficador Desmos, **determina** las representaciones gráficas de la función con su respectiva derivada.

a. $f: x \mapsto f(x)=\dfrac{4}{x-5}$

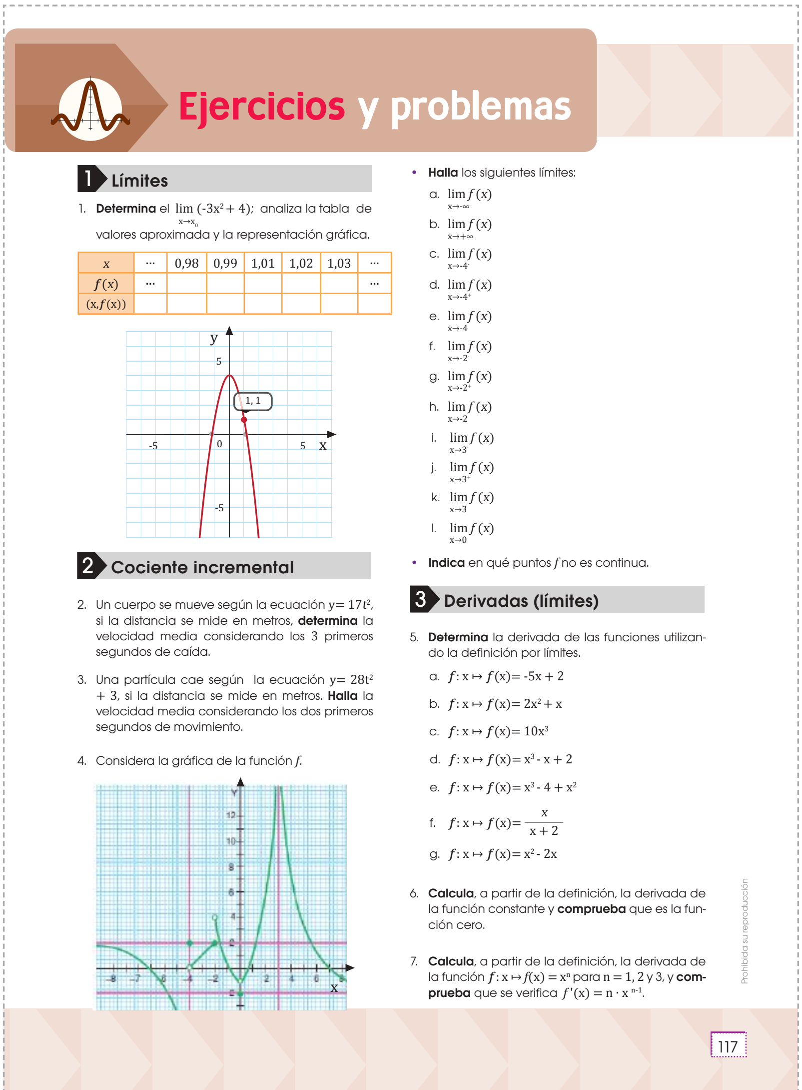
b. $f: x \mapsto f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

c. $f: x \mapsto f(x)=\dfrac{5}{x^2-1}$

d. $f: x \mapsto f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-1}$

Actividades

Página 117



Ejercicios y problemas

1 Límites

1. **Determina** el $\lim_{x \to x_0} (-3x^2 + 4)$; analiza la tabla de valores aproximada y la representación gráfica.

x	···	0,98	0,99	1,01	1,02	1,03	···
$f(x)$	···						···
$(x, f(x))$							

2 Cociente incremental

2. Un cuerpo se mueve según la ecuación $y = 17t^2$, si la distancia se mide en metros, **determina** la velocidad media considerando los 3 primeros segundos de caída.

3. Una partícula cae según la ecuación $y = 28t^2 + 3$, si la distancia se mide en metros. **Halla** la velocidad media considerando los dos primeros segundos de movimiento.

4. Considera la gráfica de la función f.

- **Halla** los siguientes límites:
  - a. $\lim_{x \to -\infty} f(x)$
  - b. $\lim_{x \to +\infty} f(x)$
  - c. $\lim_{x \to -4^-} f(x)$
  - d. $\lim_{x \to -4^+} f(x)$
  - e. $\lim_{x \to -4} f(x)$
  - f. $\lim_{x \to -2^-} f(x)$
  - g. $\lim_{x \to -2^+} f(x)$
  - h. $\lim_{x \to -2} f(x)$
  - i. $\lim_{x \to 3^-} f(x)$
  - j. $\lim_{x \to 3^+} f(x)$
  - k. $\lim_{x \to 3} f(x)$
  - l. $\lim_{x \to 0} f(x)$
- **Indica** en qué puntos f no es continua.

3 Derivadas (límites)

5. **Determina** la derivada de las funciones utilizando la definición por límites.
   - a. $f: x \mapsto f(x) = -5x + 2$
   - b. $f: x \mapsto f(x) = 2x^2 + x$
   - c. $f: x \mapsto f(x) = 10x^3$
   - d. $f: x \mapsto f(x) = x^3 - x + 2$
   - e. $f: x \mapsto f(x) = x^3 - 4 + x^2$
   - f. $f: x \mapsto f(x) = \dfrac{x}{x+2}$
   - g. $f: x \mapsto f(x) = x^2 - 2x$

6. **Calcula**, a partir de la definición, la derivada de la función constante y **comprueba** que es la función cero.

7. **Calcula**, a partir de la definición, la derivada de la función $f: x \mapsto f(x) = x^n$ para $n = 1, 2$ y 3, y **comprueba** que se verifica $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

117

Solucionario

1. Como podemos observar, en el gráfico en el punto (1,1) existe una discontinuidad.

$$\lim_{x \to 1} -3x^2 + 4 = 1$$

3. Velocidad media = 84 m/s

5. a. -5; b. $4x + 1$; c. $30\,x^2$

d. $3\,x^2 - 1$; e. $3x^2 + 2x$

f. $\dfrac{-x^2 - x + 2}{(x+2)^2}$; g. $2x - 2$

Solucionario

a. $f'(x) = 12x^3 + 18x - 4$

b. $f'(x) = -30x^2 - 4$

c. $f'(x) = -30x^2 - 4$

d. $f'(x) = -30x^2 - 4$

e. $\frac{1}{2}x^{-1/2} + x^{-1/2} - \frac{1}{3}x^{-2/3}$

11.

a. $f'(x) = 12x^3 - 15x^2 - 24x$

b. $f'(x) = \frac{4}{x} - 1$

c. $f'(x) = -4 \text{ sen } x - \ln x - 1$

d. $f'(x) = 8x + 12$

e. $f'(x) = -\text{sen } x \, e^{\cos x}$

f. $f'(x) = \frac{2}{x}$

15.

a. $f'(x) = 8x + 12$

b. $g'(x) = 5 \cos 5x$

c. $h'(x) = -e^{\cos x} sen\, x$

d. $i'(x) = \frac{2x}{\text{sen}x^2} \cos x^2$

e. $j'(x) = -6x^2 \cos x^3 \, sen\, x^3$

f. $k'(x) = \frac{1}{2} \cos x \, (sen\, x)^{-1/2}$

Página 118

8. **Calcula** la derivada de las siguientes funciones:
   a. $f: x \mapsto f(x) = 8x^9$
   b. $f: x \mapsto f(x) = \sqrt[5]{x^4}$
   c. $f: x \mapsto f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{x^5}}$
   d. $f: x \mapsto f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 7x + 10$
   e. $f: x \mapsto f(x) = \cos x \cdot e^x$
   f. $f: x \mapsto f(x) = 4x^3 \cdot \ln x$
   g. $f: x \mapsto f(x) = (5x^6 - 3x^2) \cdot (7x^4 - 3x^2)$
   h. $f: x \mapsto f(x) = \frac{2x^3 + 7x^2 - 8x + 9}{\cos x}$
   i. $f: x \mapsto f(x) = \frac{4x \cdot \text{sen } x}{3 - 4e^x}$

4 Derivadas (reglas)

9. **Deriva** las funciones utilizando las reglas de derivación.
   a. $f: x \mapsto f(x) = 3x^4 - 4x + 9x^2$
   b. $f: x \mapsto f(x) = 3 - 10x^3 - 4x$
   c. $f: x \mapsto f(x) = 3 - 10x^3 - 4x$
   d. $f: x \mapsto f(x) = 3 - 10x^3 - 4x$
   e. $f: x \mapsto f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4x} - \sqrt[3]{x} + 15$

10. **Aplica** la regla de la cadena para derivar las siguientes funciones:
   a. $f: x \mapsto f(x) = (2x^4 - 3x^2 - 7x + 3)^3$
   b. $f: x \mapsto f(x) = \text{sen } (x^2 + 5)$
   c. $f: x \mapsto f(x) = \ln (\text{sen } x)$
   d. $f: x \mapsto f(x) = \cos^2 (x^3 + 2x^2)$

11. **Calcula** la derivada de las funciones siguientes e **indica** en qué casos has aplicado la regla de la cadena:
   a. $f: x \mapsto f(x) = 3x^4 - 5x^3 - 12x^2$
   b. $f: x \mapsto f(x) = 4\text{In } x - x$
   c. $f: x \mapsto f(x) = 4\cos (x) - x \cdot \ln x$
   d. $f: x \mapsto f(x) = (2x + 3)^2$
   e. $f: x \mapsto f(x) = e^{\cos (x)}$
   f. $f: x \mapsto f(x) = \ln 3x^2$

12. **Averigua** si es cierta la afirmación siguiente:

$$f(x) = \frac{k}{g(x)} \Rightarrow f'(x) \; \frac{k \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

13. **Demuestra** que la derivada de $f(x) = \text{tg } (x)$ es:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 (x)}$$

14. **Calcula** la derivada de las funciones siguientes:
   a. $f: x \mapsto f(x) = 3x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 3x + 4$
   b. $f: x \mapsto f(x) = 4 \ln x - x$
   c. $f: x \mapsto f(x) = e^x \cdot \text{sen } (x)$
   d. $f: x \mapsto f(x) = 4 \cos (x) - x \cdot \ln x$
   e. $f: x \mapsto f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$

15. **Aplica** la regla de la cadena para calcular la derivada de las siguientes funciones:
   a. $f: x \mapsto f(x) = (2x + 3)^2$
   b. $g: x \mapsto g(x) = \text{sen } (5x)$
   c. $h: x \mapsto h(x) = e^{\cos (x)}$
   d. $i: x \mapsto i(x) = \ln (\text{sen } (x)^2)$
   e. $j: x \mapsto j(x) = \cos^2 (x^3)$
   f. $k: x \mapsto k(x) = \sqrt{\text{sen } (x)}$

Página 119

16. **Calcula** la función derivada de cada una de las funciones siguientes:
   a. $f: x \mapsto f(x) = \text{tg}\,(3x)$
   b. $f: x \mapsto f(x) = e^{x^2} \cdot \text{sen}\,(3x)$

17. Dada la función $f(x) = x^2 - 7x + 1$, **averigua** el valor de la derivada en los puntos de abscisa $x = -2$, $x = 2$ y $x = 10$.

5 Derivadas sucesivas

18. **Determina** $f'(x), f''(x), f'''(x)$ en las siguientes funciones.
   a. $f: x \mapsto f(x) = -5x^3 - 4x^2 + 2$
   b. $f: x \mapsto f(x) = -\frac{2}{3}x^6 - \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}$
   c. $f: x \mapsto f(x) = \sqrt{4x} - \sqrt{27}x + \sqrt{x} + 15$
   d. $f: x \mapsto f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$

6 Rectas tangentes y normales

19. Considerando la ecuación $f(x) = -3x^3 + 4$ en el punto $(-1,7)$, **determina**:
   a. La ecuación que permita encontrar la pendiente de la recta tangente.
   b. La pendiente de la recta tangente en el punto dado.
   c. La pendiente de la recta normal en el punto dado.
   d. La ecuación de la recta tangente
   e. La ecuación de la recta normal
   f. La representación gráfica de la función y las rectas tangente y perpendicular al punto dado.

20. Considerando la ecuación $f: x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$ en el punto $(4, 2)$, **determina**.
   a. La ecuación que permita encontrar la pendiente de la recta tangente
   b. La pendiente de la recta tangente en el punto dado
   c. La pendiente de la recta normal en el punto dado
   d. La ecuación de la recta tangente
   e. La ecuación de la recta normal
   f. La representación gráfica de la función y las rectas tangente y perpendicular al punto dado

21. Dada la función $f: x \mapsto f(x) = \text{sen}(x) \cdot \cos(x)$, **comprueba** que la función derivada se anula en el punto de abscisa:

$$x = \frac{\pi}{4}$$

- ¿Cómo será la tangente en dicho punto con respecto al eje de abscisas?

22. **Averigua** la ecuación de la recta tangente a la curva de la función $f: x \mapsto f(x) = x \cdot \ln x$ en el punto de abscisa $x = 1$.

23. **Calcula** la ecuación de la recta tangente a la gráfica de cada una de las siguientes funciones en los puntos indicados.
   a. $f: x \mapsto f(x) = x^3 + 2x + 10$, en el punto de abscisa $x = -2$.
   b. $f: x \mapsto f(x) = e^x$, en el punto de abscisa $x = 0$.
   c. $f: x \mapsto f(x) = \ln x$, en el punto en que la gráfica corta al eje de abscisas.

24. **Calcula** la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f: x \mapsto f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ en el punto de abscisa $x = 1$.

–¿En qué punto la tangente es paralela al eje de abscisas?

Solucionario

17. -11 ; - 3 ; 13

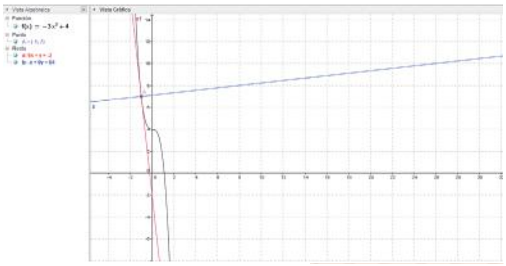
19. a. $f'(x) = -9x^2$

b. - 9

c. $\frac{1}{9}$

d. $9x + y + 2 = 0$

e. $-x + 9y - 64 = 0$



21. $f'(x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

23. a. $14x - y + 28 = 0$

b. $x - y = 0$

c. $x = y$

Solucionario

25. Al final

27. m = -3; n = 1; p = 2

29. V = 19,6 m/s; a = 9,8 m/ s^2

31.

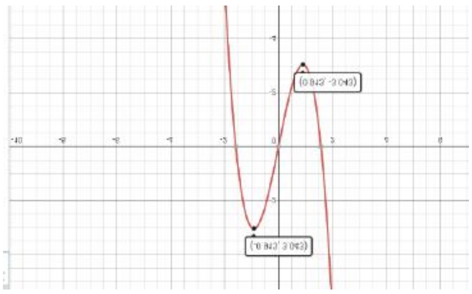
a. $f'(x) = 6x^2 - 5$

b. $x = \pm 0{,}91$

c. $y = \pm 3{,}04$

d. Máximo (-0,91; 3,04)

Mínimo(0,91; -3,04)



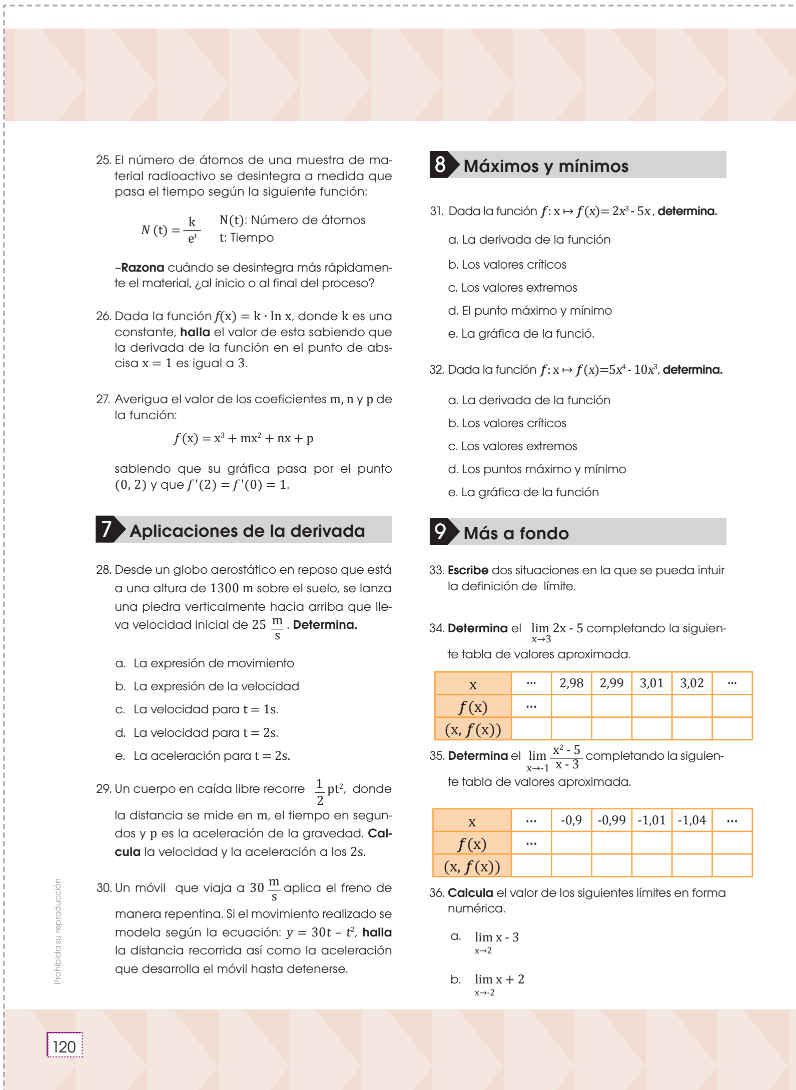
e)

35.

Límite = 1

x	...	-0,9	-0,99	-1,01	-1,04	...
f(x)	...	1,0744	1,0075	0,9925	0,9699	...

Página 120



25. El número de átomos de una muestra de material radioactivo se desintegra a medida que pasa el tiempo según la siguiente función:

$$N(t) = \frac{k}{e^t}$$ N(t): Número de átomos
t: Tiempo

–**Razona** cuándo se desintegra más rápidamente el material, ¿al inicio o al final del proceso?

26. Dada la función $f(x) = k \cdot \ln x$, donde k es una constante, **halla** el valor de esta sabiendo que la derivada de la función en el punto de abscisa $x = 1$ es igual a 3.

27. Averigua el valor de los coeficientes m, n y p de la función:

$$f(x) = x^3 + mx^2 + nx + p$$

sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(0, 2)$ y que $f'(2) = f'(0) = 1$.

7 Aplicaciones de la derivada

28. Desde un globo aerostático en reposo que está a una altura de 1300 m sobre el suelo, se lanza una piedra verticalmente hacia arriba que lleva velocidad inicial de 25 $\frac{m}{s}$. **Determina.**

a. La expresión de movimiento
b. La expresión de la velocidad
c. La velocidad para t = 1s.
d. La velocidad para t = 2s.
e. La aceleración para t = 2s.

29. Un cuerpo en caída libre recorre $\frac{1}{2}pt^2$, donde la distancia se mide en m, el tiempo en segundos y p es la aceleración de la gravedad. **Calcula** la velocidad y la aceleración a los 2s.

30. Un móvil que viaja a 30 $\frac{m}{s}$ aplica el freno de manera repentina. Si el movimiento realizado se modela según la ecuación: $y = 30t - t^2$, **halla** la distancia recorrida así como la aceleración que desarrolla el móvil hasta detenerse.

8 Máximos y mínimos

31. Dada la función $f: x \mapsto f(x) = 2x^3 - 5x$, **determina.**

a. La derivada de la función
b. Los valores críticos
c. Los valores extremos
d. El punto máximo y mínimo
e. La gráfica de la funció.

32. Dada la función $f: x \mapsto f(x) = 5x^4 - 10x^3$, **determina.**

a. La derivada de la función
b. Los valores críticos
c. Los valores extremos
d. Los puntos máximo y mínimo
e. La gráfica de la función

9 Más a fondo

33. **Escribe** dos situaciones en la que se pueda intuir la definición de límite.

34. **Determina** el $\lim_{x \to 3} 2x - 5$ completando la siguiente tabla de valores aproximada.

x	...	2,98	2,99	3,01	3,02	...
$f(x)$	...					
$(x, f(x))$						

35. **Determina** el $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 5}{x - 3}$ completando la siguiente tabla de valores aproximada.

x	...	-0,9	-0,99	-1,01	-1,04	...
$f(x)$	...					
$(x, f(x))$						

36. **Calcula** el valor de los siguientes límites en forma numérica.

a. $\lim_{x \to 2} x - 3$

b. $\lim_{x \to -2} x + 2$

Página 119

c. $\lim_{x \to -\frac{2}{3}} x + \frac{2}{3}$

d. $\lim_{x\to 2} -3$

e. $\lim_{x\to -5} (m^2 - 10)$

f. $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x+3}$

g. $\lim_{x\to 5} 2r^2$

h. $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-3}{x+2}$

37. **Escribe** V si es verdadero o F si es falso, según corresponda

a. La expresión de la derivada por límites es ( )
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

b. La derivada de la función $f(x)= 2x^n$ es $f'(x)= n2x^n$ ( )

c. La notación de Euler para la derivada es $\frac{dy}{dx}$ ( )

d. Si $f'(x)> 0$ entonces la función es creciente. ( )

e. Si $f'(x)= 0$ entonces la función es decreciente. ( )

f. La primera derivada en la función de desplazamiento representa físicamente la velocidad media. ( )

g. Al calcular la segunda derivada en la función de desplazamiento determinamos la aceleración instantánea. ( )

h. Los valores de la variable independiente que satisfacen la ecuación $f'(x)= 0$ se denominan valores críticos. ( )

i. Para determinar los extremos relativos reemplazamos los valores críticos en $f'(x)$. ( )

j. Al calcular la derivada de la función $f(x)= 2x^4 + 12$ resulta $8x^4$. ( )

38. Cuando se deriva $f(x)=x^2 - 5$ utilizando la expresión de límites, resolviendo el producto notable y reduciendo términos semejantes, resulta la expresión:

a. $\lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh - h^2 - 5}{h}$

b. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 2xh - h^2}{h}$

c. $\lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh - h^2}{h}$

d. $\lim_{x\to 0} \frac{2xh - h^2}{h}$

39. Cuando se deriva $f(x)= 2x^3$ utilizando la expresión de límites, resolviendo el producto notable y reduciendo términos semejantes, resulta la expresión:

a. $\lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3xh - h^3 - 5}{h}$

b. $\lim_{x\to 0} \frac{6x^2h + 6xh^2 + 2h^3}{h}$

c. $\lim_{h\to 0} \frac{2x^2h + 2xh^2 - 2h^3}{h}$

d. $\lim_{x\to 0} \frac{2 + 6x^2 + 3xh - h^2}{h}$

40. Al derivar $f(x)= \sqrt{x}$, resulta:

a. $f: x \mapsto f(x)= \frac{\sqrt{x}}{x}$

b. $f: x \mapsto f(x)= \frac{1}{2\sqrt{x}}$

c. $f: x \mapsto f(x)= \frac{1}{\sqrt{x}}$

d. $f: x \mapsto f(x)= 2\sqrt{x}$

Solucionario

37.

a. V ; b. F ; c. F ; d. V ; e. F

f. F ; g. V ; h. V ; i. F ; j. F

39. b

Solucionario

1. c
2. b
3.

a. f´(x) = 16x-1

b. f´(x)= $16x(16x^2)^{-1/2} + 50x^3(25x^4)^{-1/2}$

c. f´(x)= $\frac{12}{5}x^{-3/5}$

d. f´(x) =$-\frac{1}{(x+2)^2}$

e. f´(x) = $\frac{1}{3x^{3/2}}$

4. a. F

b. V

c. V

d. V

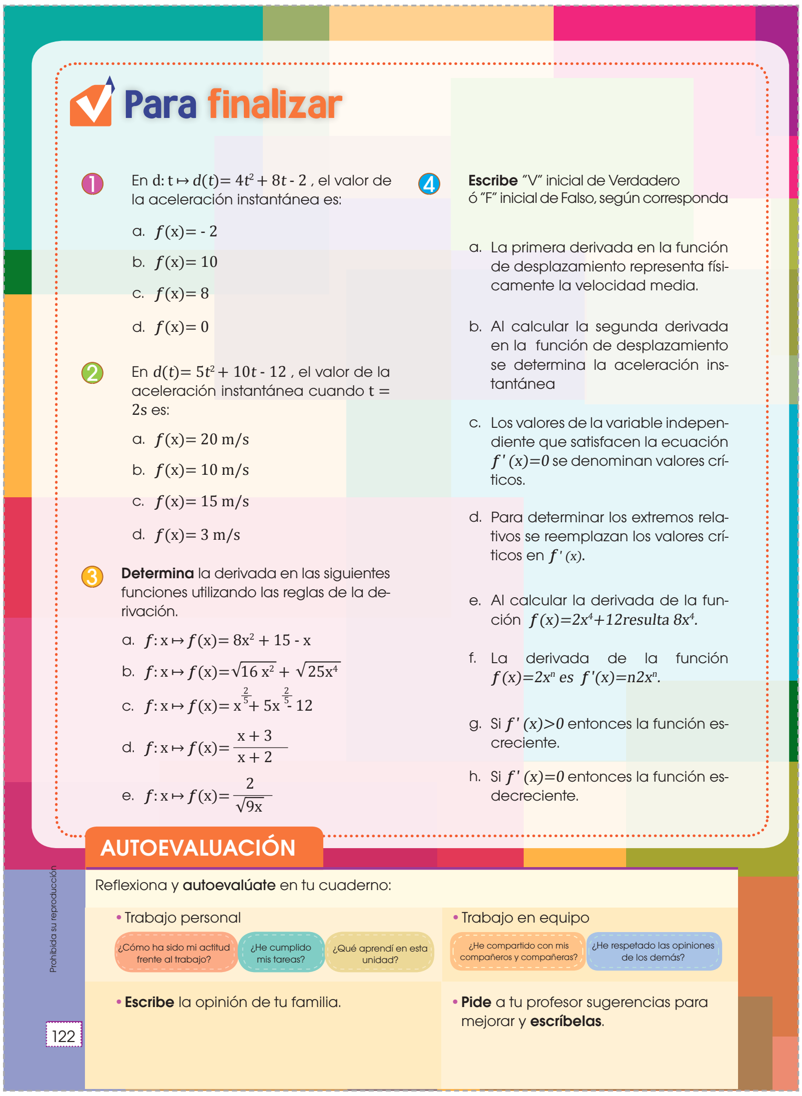
e. F

f. F

g. V

h. F

Página 122



Para finalizar

1. En $d: t \mapsto d(t) = 4t^2 + 8t - 2$, el valor de la aceleración instantánea es:
   a. $f(x) = -2$
   b. $f(x) = 10$
   c. $f(x) = 8$
   d. $f(x) = 0$

2. En $d(t) = 5t^2 + 10t - 12$, el valor de la aceleración instantánea cuando t = 2s es:
   a. $f(x) = 20\ m/s$
   b. $f(x) = 10\ m/s$
   c. $f(x) = 15\ m/s$
   d. $f(x) = 3\ m/s$

3. **Determina** la derivada en las siguientes funciones utilizando las reglas de la derivación.
   a. $f: x \mapsto f(x) = 8x^2 + 15 - x$
   b. $f: x \mapsto f(x) = \sqrt{16x^2} + \sqrt{25x^4}$
   c. $f: x \mapsto f(x) = x^{\frac{2}{5}} + 5x^{\frac{2}{5}} - 12$
   d. $f: x \mapsto f(x) = \frac{x+3}{x+2}$
   e. $f: x \mapsto f(x) = \frac{2}{\sqrt{9x}}$

4. **Escribe** "V" inicial de Verdadero ó "F" inicial de Falso, según corresponda
   a. La primera derivada en la función de desplazamiento representa físicamente la velocidad media.
   b. Al calcular la segunda derivada en la función de desplazamiento se determina la aceleración instantánea
   c. Los valores de la variable independiente que satisfacen la ecuación $f'(x)=0$ se denominan valores críticos.
   d. Para determinar los extremos relativos se reemplazan los valores críticos en $f'(x)$.
   e. Al calcular la derivada de la función $f(x)=2x^4+12$ resulta $8x^4$.
   f. La derivada de la función $f(x)=2x^n$ es $f'(x)=n2x^n$.
   g. Si $f'(x)>0$ entonces la función es creciente.
   h. Si $f'(x)=0$ entonces la función es decreciente.

AUTOEVALUACIÓN

Reflexiona y **autoevalúate** en tu cuaderno:

- Trabajo personal
  ¿Cómo ha sido mi actitud frente al trabajo? ¿He cumplido mis tareas? ¿Qué aprendí en esta unidad?
- Trabajo en equipo
  ¿He compartido con mis compañeros y compañeras? ¿He respetado las opiniones de los demás?
- **Escribe** la opinión de tu familia.
- **Pide** a tu profesor sugerencias para mejorar y **escríbelas**.

Solucionario

1. **Responde verdadero** (V) **o falso** (F).

a. El $\lim_{x \to 2} x^2 - 6x$ es - 8 ( )

b. Un cuerpo cae libremente según la ecuación $y = 4t^2 - 3$, si la distancia se mueve en metros. La velocidad media considerando los cinco primeros minutos es 24. ( )

c.El valor de la derivada de $f(x) = 6x^3 - 3x^2 + 8x - 1$ es $f'(x) = 6x^2 - 6x + 8$ ( )

d. La derivada de $f(x) = \frac{5}{x^2}$ es $-\frac{10}{x^3}$ ( )

e. Si $f'(x) > 0$ entonces la función es decreciente. ( )

f. La expresión de la derivada por límites $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ( )

2. Escoja la respuesta correcta

A) La derivada de $f(x) = (5x - 2)^2$ es:

a. 5

b. 5x - 2

c. 0

d. 50x - 20

B) El valor de la derivada de g(x) = Sen 4x es:

a. 4 Cos 4 x

b. 4 Cos x

c. Cos 4x

d.4 Sen x

C) El valor de la derivada de $y = \ln x^2$ es :

a. ln x

b. $\ln x^2$

c. $\frac{2}{x}$

D) El punto crítico de la función $f(x) = x^3 - 9x$

a. $x = \pm 6$

b. $x = \pm 3$

c. $x = \pm 27$

d. $x = \pm\sqrt{3}$

3. **Resuelve** ejercicios de aprendizaje práctico.

a. **Encuentre** el límite de $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-25}{x-5}$.

b. Aplicando la definición de límite **encuentra** la derivada de $f(x) = 2x^3$.

c. **Encuentra** la derivada de $f(x) = \frac{x^2-4}{x+3}$

d. **Encuentra** el límite de $\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x+3}$

e. Considerando la ecuación $f(x) = -2x^3 + 7$ en el punto $(-1, 5)$. **Determina**

A) La ecuación que permita encontrar la pendiente de la recta tangente.

B) La pendiente de la recta tangente en el punto dado.

C) La pendiente de la recta normal en el punto dado.

D) La ecuación de la recta tangente

E) La ecuación de la recta normal.

Solucionario

1.

a. V

b. V

c. F

d. F

e. F f. V

2.

A) d

B) a

C) c

D) d

3.

a. 7

b. $6\,x^2$

c. $f'(x) = \frac{x^2 + 6\,x + 4}{(x + 3\,)^2}$

d. 0

e.

A) $f'(x) = -6\,x^2$

B) $m = 6$

C) $m = -\frac{1}{6}$

D) $-6x + y - 11 = 0$

E) $x + 6y - 29 = 0$

Solucionario

Evaluación con adaptaciones

1. Responde verdadero (V) o falso (F).

a. El $\lim_{x \to 1} x^2 - 6x$ es - 8 ( )

b. El valor de la derivada de f(x) = 5 x^3 – x^2 es

f´(x) = $15x^2 - 2x$ ( )

c. La derivada de $f(x) = \frac{5}{x^2}$ es $-\frac{10}{x^3}$ ( )

d. Si f´(x) < 0 entonces la función es decreciente. ( )

e. La expresión de la derivada por límites $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ( )

2. **Escoge** la respuesta correcta.

A) La derivada de f(x) = 5 x – 2 es:

a. 5

b. 5x - 2

c. 0

d. 50x - 20

B) El valor de la derivada de g(x) = Sen x es:

a. 4 Cos 4 x

b. 4 Cos x

c. Cos x

d. 4 Sen x

C) El valor de la derivada de y = ln x es :

a. ln x

b. ln x^2

c. $\frac{1}{x}$

d. x

Solucionario

d) El punto crítico de la función $f(x) = x^3 - 9x$.

a. $x = \pm 6$

b. $x = \pm 3$

c. $x = \pm 27$

d. $x = \pm\sqrt{3}$

3. **Resuelve** ejercicios de aprendizaje práctico.

a. **Encuentra** el límite de $\lim_{x \to 2} \frac{x-6}{x-5}$.

b. Aplicando la definición de límite o método directo encuentra la derivada de $f(x) = 2x^3$.

c. **Encuentra** la derivada de $f(x) = (x-4)(x+3)$.

d. Considerando la ecuación $f(x) = 2x^3 + 7$ en el punto (1, 5) . **Determina**

A) La ecuación que permita encontrar la pendiente de la recta tangente.

B) La pendiente de la recta tangente en el punto dado.

C) La pendiente de la recta normal en el punto dado.

D) La ecuación de la recta tangente.

E) La ecuación de la recta normal.

Solucionario

Solucionario de la evaluación con adaptaciones

1.

a. V

b. V

c. F

d. V

e. V

2.

A) a

B) c

C) c

D) d

3.

a. $\frac{4}{3}$

b. $6x^2$

c. $x^2 + 4x - 4$

d.

A) $6x^2$

B) $m = 6$

C) $m = -\frac{1}{6}$

D) $-6x + y + 1 = 0$

E) $x + 6y - 31 = 0$

CICLO DEL APRENDIZAJE

¿Cómo dinamizo el aula?

Experiencia

Aplicar el principio de incrementos, como introducción al tema de derivada de una función.

Debatir en clase los fenómenos de velocidad y aceleración, estudiados en física, para poner en contexto el tema de derivadas de una función.

Analizar una imagen de la noción geométrica de secante y tangente a una curva, evidenciando las características principales de estos conceptos.

Conceptualización

Diferenciar los conceptos entre incrementos grandes e infinitecimales en una función, por medio del concepto de límite de una función, numéricamente.

Comparar las relaciones entre derivada de una función.

Interpretar el significado de cociente incremental.

Reflexión

Reflexionar acerca de la importancia de estos modelos matemáticos en ciencias como física, química, economía, etc.

Identificar los métodos básicos de derivación de funciones elementales.

Aplicación

Atravez de un gráfico evidenciar con un ejemplos la utilidad de los temas tratados en esta unidad, en problemas físicos, químicos, etc.

Reconocer los elementos (variables) involucradas en los gráfico y sus respectivas ecuaciones.

Producir predicciones usando los modelos matemáticos estudiados.

Resumen

Funciones

Límites:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \mid 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Límites finitos y operaciones

— El límite, si existe, es único.

– Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2$:

- $\lim_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = L_1 \pm L_2$
- $\lim_{x\to x_0} [k \cdot f(x)] = k \cdot L_1$
- $\lim_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L_1 \cdot L_2$
- $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \Leftrightarrow L_2 \neq 0$
- $\lim_{x\to x_0} [f(x)^{g(x)}] = (L_1)^{L_2}$, si $L_1 > 0$
- $\lim_{x\to x_0} [g(f(x))] = g \lim_{x\to x_0} (f(x))$, si g es continua

Límites infinitos y operaciones

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$	$(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty$	$\frac{k}{0} = \pm\infty$
$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$	$(\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty$	$\frac{k}{\infty} = 0$
$(\pm\infty) \pm k = \pm\infty$	$\infty \cdot k = \pm\infty \ (k \neq 0)$	$\frac{\infty}{k} = \pm\infty$

Indeterminaciones

$$\frac{\infty}{\infty} \ ; \ \infty - \infty \ ; \ 0 \cdot \infty \ ; \ \frac{0}{0} \ ; \ 1^{\infty} \ ; \ 0^0 \ ; \ \infty^0$$

Asíntotas:

$x = x_0$ es una asíntota vertical de f $\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$

$y = L$ es una asíntota horizontal de f $\Leftrightarrow \lim_{x\to \pm\infty} f(x) = L$

$y = ax + b$, $a \neq 0$ es una asíntota oblicua de f $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ y } \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = b$$

Continuidad:

Una función **f** es **continua en** un punto $\mathbf{x_0}$ si se verifica simultáneamente que existe $f(x_0)$, que existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$ y es finito y que $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Tipos de discontinuidad

Evitable: $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = L$, pero $\nexists\ f(x_0)$ o bien $L \neq f(x_0)$

Dentro de las no evitables:

— De salto finito: existen límites laterales pero son diferentes.

— De salto infinito: existen límites laterales pero al menos uno de ellos es infinito.

— Esencial: alguno de los límites laterales no existe.

Las funciones potenciales, polinómicas, racionales, irracionales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas son continuas en todo su dominio de definición.

Derivadas

La **derivada, $f'(a)$,** de la función f en $x = a$ es el límite, si existe:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ecuación de la **recta tangente** a la gráfica de f en $(a, f(a))$:

$$y - f(a) = f'(a)\,(x - a)$$

Función derivada y operaciones

- $(f + g)' = f' + g'$
- $(k \cdot f)' = k \cdot f'$
- $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'\,'$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g}{g^2}$
- $(g \circ f)' = g'(f) \cdot f'$ (regla de la cadena)

Regla de L'Hôpital

Sean f y g dos funciones con $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ *y* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$

si $\exists \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, $\exists \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ y además: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Esta regla también se aplica a indeterminaciones del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Estudio de funciones

Crecimiento y concavidad:

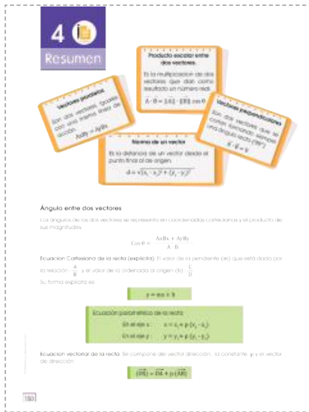
- Si $f'(a) > 0 \Rightarrow$ f es estrictamente creciente en $x = a$.
  Si $f'(a) < 0 \Rightarrow$ f es estrictamente decreciente en $x = a$.
- Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0 \Rightarrow$ f tiene un máximo relativo en $x = a$.
  Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0 \Rightarrow$ f tiene un mínimo relativo en $x = a$.
- Si $f''(a) > 0 \Rightarrow$ f es convexa en $x = a$.
  Si $f''(a) < 0 \Rightarrow$ f es cóncava en $x = a$.
- Si $f''(a) = 0$ y $f'''(a) \neq 0 \Rightarrow$ f tiene un punto de inflexión en $x = a$.

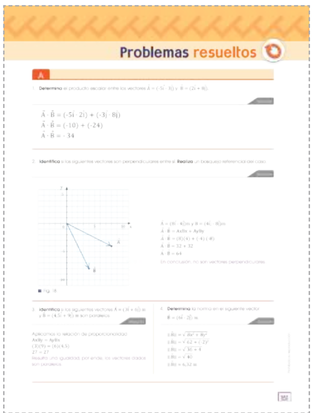
En general:

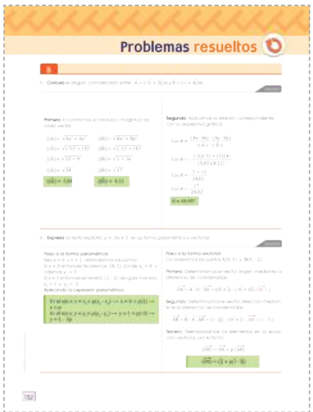
Si $f^{(n)}(a) \neq 0$ y todas las derivadas anteriores son cero.	n impar	$f^{(n)}(a) > 0$	Crece
		$f^{(n)}(a) < 0$	Decrece
	n par	$f^{(n)}(a) > 0$	Máximo
		$f^{(n)}(a) < 0$	Mínimo
Si $f^{(n)}(a) \neq 0$ y, $\forall\, k > 1$ y $k < n$, $f^{(k)}(a) = 0$	n par	$f^{(n)}(a) > 0$	Cóncava
		$f^{(n)}(a) < 0$	Convexa
	n impar	$f^{(n)}(a) \neq 0$	Punto de inflexión

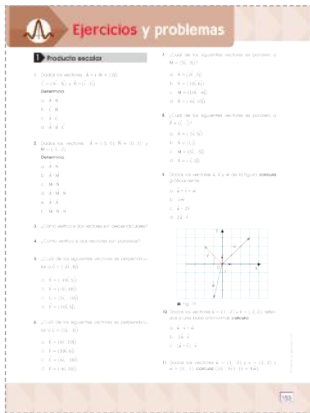
Derivadas

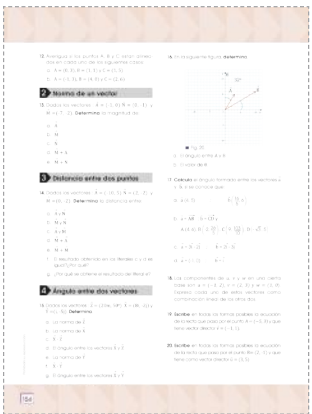

EN CONTEXTO


4
Resumen


Problemas resueltos


Problemas resueltos


Ejercicios y problemas




Para finalizar
AUTOEVALUACIÓN


ZONA

UNIDAD 4

Ejes temáticos	Contenidos
Derivadas	• Vector en R2........página 130 • Producto escalar de un vector por si mismo........página 131 • Propiedades del producto escalar........página 131 • Vectores Perpendiculares........página 132 • Vectores Paralelos........página 133 • El uso de las TIC y los vectores........páginas 134-135 • Norma de un vector........página 136 • Distancia entre dos puntos........página 137 • Ángulo entre dos vectores........páginas 138-139
	• Ecuación cartesiana de la recta (Forma explícita) ....página 140 • Ecuación de la recta en la forma paramétrica........página 141 • Ecuación de la recta en la forma vectorial........página 142 • Transformación de la forma explícita a las formas paramétrica y vectorial........página 143 • Transformación de la forma paramétrica a la forma explícita........páginas 144-146 • Ecuación de una recta paralela a una recta conocida........página 147 • Ecuación de una recta perpendicular a una recta conocida........página 148 • Ecuación de una recta perpendicular a una recta conocida con vectores........página 149 • Calculo de la distancia entre dos puntos con vectores........página 149 • Resumen........página 150 • Problemas resueltos........páginas 151-152 • Ejercicios y problemas........páginas 153-156 • Para finalizar........páginas 157-158 • Zona WIFI........página 159

<table>
<tr><td>LOGO INSTITUCIONAL</td><td colspan="3">NOMBRE DE LA INSTITUCIÓN</td><td colspan="3">AÑO LECTIVO</td></tr>
<tr><td colspan="7">Plan de unidad temática</td></tr>
<tr><td colspan="7">1. Datos informativos:</td></tr>
<tr><td>Docente:</td><td>Nombre del docente que ingresa la información</td><td>Área/asignatura:</td><td>Matemática Grado/Curso:</td><td>2° Bachillerato</td><td>Paralelo:</td><td></td></tr>
<tr><td>N.º de unidad de planificación:</td><td>4</td><td>Título de unidad de planificación:</td><td colspan="2">FUNCIONES
Objetivos específicos de la unidad de planificación:</td><td colspan="2">Producir, comunicar y generalizar información de manera escrita, verbal, simbólica, gráfica y/o tecnológica mediante la aplicación de conocimientos matemáticos y el manejo organizado, responsable y honesto de las fuentes de datos para comprender otras disciplinas, entender las necesidades y potencialidades de nuestro país y tomar decisiones con responsabilidad social.

Desarrollar la curiosidad y la creatividad en el uso de herramientas matemáticas al momento de enfrentar y solucionar problemas de la realidad nacional demostrando actitudes de orden, perseverancia y capacidades de investigación.</td></tr>
<tr><td>PERÍODOS</td><td colspan="2">24</td><td></td><td>SEMANA DE INICIO:</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="7">2. Planificación</td></tr>
<tr><td colspan="5">Destrezas con criterios de desempeño a ser desarrolladas:</td><td colspan="2">Criterios de evaluación</td></tr>
<tr><td colspan="5">• Graficar y analizar el dominio, el recorrido, la monotonía, ceros, extremos y paridad de las diferentes funciones reales (función afín a trozos, función potencia entera negativa con n= -1, -2, función raíz cuadrada, función valor absoluto de la función afín) utilizando TIC.
• Realizar la composición de funciones reales analizando las características de la función resultante (dominio, recorrido, monotonía, máximos, mínimos, paridad).
• Resolver (con o sin el uso de la tecnología) problemas o situaciones reales o hipotéticas con el empleo de la modelización con funciones reales (función afín a trozos, función potencia entera negativa con n= -1, -2, función raíz cuadrada, función valor absoluto de la función afín), identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas; juzgar la pertinencia y validez de los resultados obtenidos.
• Reconocer funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas para calcular la función inversa (de funciones biyectivas) comprobando con la composición de funciones.
• Resolver y plantear aplicaciones de la composición de funciones reales en problemas reales o hipotéticos.
• Realizar las operaciones de adición y producto entre funciones reales, y el producto de números reales por funciones reales aplicando propiedades de los números reales.
• Resolver ecuaciones que se pueden reducir a ecuaciones de segundo grado con una incógnita.
• Resolver (con o sin el uso de la tecnología) problemas o situaciones reales o hipotéticas que pueden ser modelizados con funciones cuadráticas identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas; juzgar la pertinencia y validez de los resultados obtenidos.
• Identificar sucesiones numéricas reales, sucesiones monótonas y sucesiones definidas por recurrencia a partir de las fórmulas que las definen.
• Reconocer y calcular uno o varios parámetros de una progresión (aritmética o geométrica) conocidos otros parámetros.</td><td colspan="2">CE.M.5.3. Opera y emplea funciones reales, lineales, cuadráticas, polinomiales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas para plantear situaciones hipotéticas y cotidianas que puedan resolverse mediante modelos matemáticos; comenta la validez y limitaciones de los procedimientos empleados y verifica sus resultados mediante el uso de las TIC.</td></tr>
</table>

• Aplicar los conocimientos sobre progresiones aritméticas, progresiones geométricas y sumas parciales finitas de sucesiones numéricas para resolver aplicaciones en general y de manera especial en el ámbito financiero de las sucesiones numéricas reales. • Resolver ejercicios numéricos y problemas con la aplicación de las progresiones aritméticas, geométricas y sumas parciales finitas de sucesiones numéricas. • Reconocer las aplicaciones de las sucesiones numéricas reales en el ámbito financiero y resolver problemas, juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema. • Emplear progresiones aritméticas, geométricas y sumas parciales fintas de sucesiones numéricas en el planteamiento y resolución de problemas de diferentes ámbitos. • Realizar las operaciones de suma y multiplicación entre sucesiones numéricas reales y la multiplicación de escalares por sucesiones numéricas reales aplicando las propiedades de los números reales. • Identificar sucesiones convergentes y calcular el límite de la sucesión.	CE.M.5.6. Emplea vectores geométricos en el plano y operaciones en R, con aplicaciones en física y en la ecuación de la rmétodos gráficos, analíticos y tecnológicos.

Actividades de aprendizaje	Indicadores de logro	Técnicas e instrumentos de evaluación
Debatir la necesidad que tienen los seres humanos en ubicarse en una ciudad usando mapas que tienen cuadrículas de referencia. También usamos para orientarnos dispositivos con sistemas de GPS (sistema de posicionamiento global), este sistema funciona triangulando posiciones entre satélites. Diferenciar los conceptos de magnitud escalar y magnitud vectorial. Comparar las operaciones en el espacio bidimensional como el producto escalar. Usar un sistema de referencia bidimensional para ubicar una partícula en el plano. Describir trayectorias rectilíneas, usando ecuaciones lineales paramétricas. Reflexionar acerca de la importancia de estos conocimientos en las apps actuales como TIC que usan para su funcionamiento el sistema GPS Usar el producto escalar y las diferentes formas de expresar las ecuaciones lineales en la resolución de problemas físicos, como los planteados en el texto	I.M.5.6.1. Grafica vectores en el plano; halla su módulo y realiza opersuma, resta y producto por un escalar; resuelve problemas aplicados a la Geometría y a la Física. (I.2.) I.M.5.6.2. Realiza operaciones en el espacio vectorial R; calcula la distre dos puntos, el módulo y la dirección de un vector; reconoce cuando dos vtores son ortogonales; y aplica este conocimiento en problemas físicen las TIC. (I.3.) I.M.5.6.3. Determina la ecuación de la recta de forma vectorial y paridentifica su pendiente, la distancia a un punto y la posición relarectas, la ecuación de una recta bisectriz, sus aplicaciones reales, la vsus resultados y el aporte de las TIC. (I.3.)	Comprobar el desarrollo de las destrezas necesarias para el manejo de vectores en el plano y sus características, graficación, norma, Operaciones con vectores algebraicas, en forma gráfica y en Forma analítica, así como para la resolución de problemas de aplicación. El estudiante debe ser capaz de calcular el producto de un número por un vector, el producto Escalar entre vectores, la ortogonalidad, la distancia entre dos puntos, el ángulo entre dos vectores; determinar la posición relativa de dos rectas; describir la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola (tanto en su forma cartesiana como en su forma paramétrica), y, en general, resolver aplicaciones geométricas de vectores en R.

Elementos del perfil de salida
I.2. Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para Resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos e información posibles. I.3. Sabemos comunicarnos de manera clara en nuestra lengua y en otras, utilizamos varios lenguajes como el numérico, el digital, el artístico y el corporal; asumimos con Responsabilidad nuestros discursos.

Elaborado	Revisado	Aprobado
Docente:	Director del área :	Vicerrector:
Firma:	Firma:	Firma:
Fecha:	Fecha:	Fecha:

Criterio de evaluación

- Opera y emplea funciones reales, lineales, cuadráticas, polinomiales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas para plantear situaciones hipotéticas y cotidianas que puedan resolverse mediante modelos matemáticos; comenta la validez y limitaciones de los procedimientos empleados y verifica sus resultados mediante el uso de las TIC.
- Reconoce patrones presentes en sucesiones numéricas reales, monótonas y definidas por recurrencia; identifica las progresiones aritméticas y geométricas; y, mediante sus propiedades y fórmulas, resuelve problemas reales de matemática financiera e hipotética.

Indicadores para la evaluación del criterio

- Grafica funciones reales y analiza su dominio, recorrido, monotonía, ceros, extremos, paridad; identifica las funciones afines, potencia, raíz cuadrada, valor absoluto; reconoce si una función es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva; realiza operaciones con funciones aplicando las propiedades de los números reales en problemas reales e hipotéticos.

  Identifica las sucesiones según sus características y halla los parámetros desconocidos; aplica progresiones en aplicaciones cotidianas y analiza el sistema financiero local, apreciando la importancia de estos conocimientos para la toma de decisiones asertivas.

Objetivos del área por subnivel

- O.M.5.4. Valorar el empleo de las TIC para realizar cálculos y resolver, de manera razonada y crítica, problemas de la realidad nacional, argumentando la pertinencia de los métodos utilizados y juzgando la validez de los resultados.

Elementos del perfil de salida a los que se contribuye

- Procedemos con respeto y responsabilidad con nosotros y con las demás personas, con la naturaleza y con el mundo de las ideas. Cumplimos nuestras obligaciones y exigimos la observación de nuestros derechos.

  Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos e información posibles.

Básicos imprescindibles	Básicos deseables

Eje temático	Destrezas con criterio de desempeño
Álgebra	Identificar la intersección gráfica de dos rectas como solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
	Resolver analíticamente sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas utilizando diferentes métodos (igualación, sustitución, eliminación).
	Graficar y analizar el dominio, el recorrido, la monotonía, ceros, extremos y paridad de las diferentes funciones reales (función afín a trozos, función potencia entera negativa con $n = -1, -2$, función raíz cuadrada, función valor absoluto de la función afín) utilizando TIC.
	Reconocer funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas para calcular la función inversa (de funciones biyectivas) comprobando con la composición de funciones.
	Realizar las operaciones de adición y producto entre funciones reales, y el producto de números reales por funciones reales, aplicando propiedades de los números reales.
	Identificar sucesiones numéricas reales, sucesiones monótonas y sucesiones definidas por recurrencia a partir de las fórmulas que las definen.
	Reconocer y calcular uno o varios parámetros de una progresión (aritmética o geométrica) conocidos otros parámetros
	Aplicar los conocimientos sobre progresiones aritméticas, progresiones geométricas y sumas parciales finitas de sucesiones numéricas para resolver aplicaciones, en general y de manera especial en el ámbito financiero, de las sucesiones numéricas reales
	Resolver ejercicios numéricos y problemas con la aplicación de las progresiones aritméticas, geométricas y sumas parciales finitas de sucesiones numéricas
	Emplear progresiones aritméticas, geométricas y sumas parciales finitas de sucesiones numéricas en el planteamiento y resolución de problemas de diferentes ámbitos.
	Realizar la composición de funciones reales analizando las características de la función resultante (dominio, recorrido, monotonía, máximos, mínimos, paridad)
	Resolver y plantear aplicaciones de la composición de funciones reales en problemas reales o hipotéticos.
	Reconocer las aplicaciones de las sucesiones numéricas reales en el ámbito financiero y resolver problemas, juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.
	Realizar las operaciones de suma y multiplicación entre sucesiones numéricas reales y la multiplicación de escalares por sucesiones numéricas reales aplicando las propiedades de los números reales.
	Identificar sucesiones convergentes y calcular el límite de la sucesión.

Solucionario

Página 130 del texto del estudiante

2.- a) 29 b) -21 c) 13 d) 82 e) 13

f) 10 g) 20 h) 8

Página 131 del texto del estudiante

1.- a) 7.07 b) 7.07 c) 15,81

d) (2i+j).(3i+j+i+2j)=(2i+j).(3i+j)+(2i+j).(i+2j)

(2i+j).(4i+3j)=6+1+2+2

8+3=11

11=11

Página 132 del texto del estudiante

2.- a

3.- b

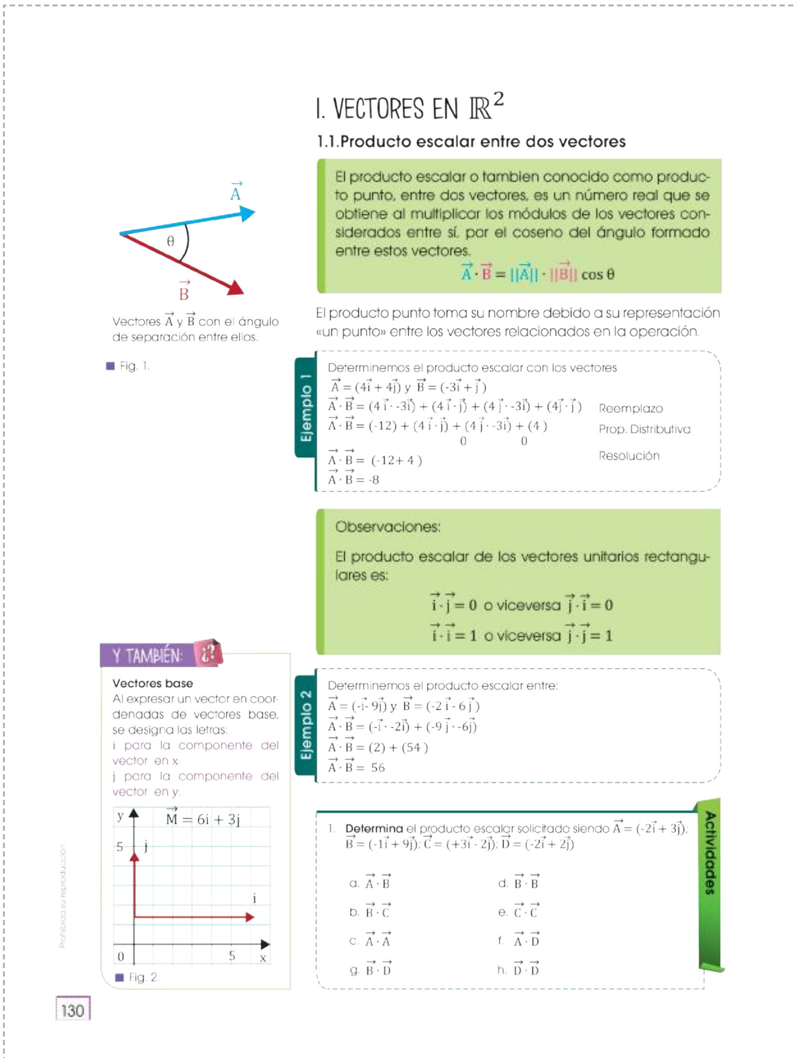
Página 133 del texto del estudiante

4.- c

5.- (10m; 240º)

6.- (-4i+2,5j)

Página 130


I. VECTORES EN $\mathbb{R}^2$

1.1. Producto escalar entre dos vectores

El producto escalar o tambien conocido como producto punto, entre dos vectores, es un número real que se obtiene al multiplicar los módulos de los vectores considerados entre sí, por el coseno del ángulo formado entre estos vectores.

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = ||\vec{A}||\cdot||\vec{B}||\cos\theta$$

Vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ con el ángulo de separación entre ellos.

Fig. 1.

El producto punto toma su nombre debido a su representación «un punto» entre los vectores relacionados en la operación.

Ejemplo 1

Determinemos el producto escalar con los vectores

$\vec{A} = (4\vec{i} + 4\vec{j})$ y $\vec{B} = (-3\vec{i} + \vec{j})$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = (4\vec{i}\cdot -3\vec{i}) + (4\vec{i}\cdot\vec{j}) + (4\vec{j}\cdot -3\vec{i}) + (4\vec{j}\cdot\vec{j})$ Reemplazo

$\vec{A}\cdot\vec{B} = (-12) + \underbrace{(4\vec{i}\cdot\vec{j})}_{0} + \underbrace{(4\vec{j}\cdot -3\vec{i})}_{0} + (4)$ Prop. Distributiva

$\vec{A}\cdot\vec{B} = (-12+4)$ Resolución

$\vec{A}\cdot\vec{B} = -8$

Observaciones:

El producto escalar de los vectores unitarios rectangulares es:

$\vec{i}\cdot\vec{j} = 0$ o viceversa $\vec{j}\cdot\vec{i} = 0$

$\vec{i}\cdot\vec{i} = 1$ o viceversa $\vec{j}\cdot\vec{j} = 1$

Y TAMBIÉN: ¿?

Vectores base

Al expresar un vector en coordenadas de vectores base, se designa las letras:

i para la componente del vector en x.

j para la componente del vector en y.

Fig. 2

Ejemplo 2

Determinemos el producto escalar entre:

$\vec{A} = (-\vec{i} - 9\vec{j})$ y $\vec{B} = (-2\vec{i} - 6\vec{j})$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = (-\vec{i}\cdot -2\vec{i}) + (-9\vec{j}\cdot -6\vec{j})$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = (2) + (54)$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = 56$

Actividades

1. **Determina** el producto escalar solicitado siendo $\vec{A} = (-2\vec{i} + 3\vec{j})$; $\vec{B} = (-1\vec{i} + 9\vec{j})$; $\vec{C} = (+3\vec{i} - 2\vec{j})$; $\vec{D} = (-2\vec{i} + 2\vec{j})$

a. $\vec{A}\cdot\vec{B}$ d. $\vec{B}\cdot\vec{B}$

b. $\vec{B}\cdot\vec{C}$ e. $\vec{C}\cdot\vec{C}$

c. $\vec{A}\cdot\vec{A}$ f. $\vec{A}\cdot\vec{D}$

g. $\vec{B}\cdot\vec{D}$ h. $\vec{D}\cdot\vec{D}$

130

Página 136

1.7. Norma de un vector

La norma de un vector se puede identificar como la distancia del punto final al origen; se encuentra calculando la raíz cuadrada de las variaciones de cada componente al cuadrado. Por consiguiente, la relación de la norma de un vector en $\mathbb{R}^2$ (dos dimensiones) será:

Sean los vectores $\vec{v} = (vx, vy)$; $\vec{u} = (ux, uy)$ $\Rightarrow$ $d(\vec{v} - \vec{u}) = \sqrt{(vx - ux)^2 + (vy - uy)^2}$

Considerando que el origen es el punto $\vec{0}$ $(0,0)$, la relación quedaría expresada por:

$$d(\vec{v} - \vec{u}) = d(\vec{v} - \vec{0}) = \sqrt{(vx - 0)^2 + (vy - 0)^2}$$

La Norma o magnitud de un vector se representa por «|| ||»

Ejemplo 6

Identifiquemos la norma o magnitud de los siguientes vectores:
$\vec{A} = (6m; 35°)$; $\vec{B} = (3\vec{i} - 4\vec{j})$ m; $\vec{C} = (7\vec{i} + 2\vec{j})$; cuando su punto de origen es $\vec{D}$ $(3; -4)$
En el vector $\vec{A} = (6m; 35°)$ norma del vector es 6m, debido a que se expresa en coordenadas polares.

En el vector $\vec{B}$:

$\vec{B} = (3\vec{i} - 4\vec{j})$ m
$||\vec{B}|| = \sqrt{Bx^2 + By^2}$
$||\vec{B}|| = \sqrt{3^2 + (-4)^2}$
$||\vec{B}|| = \sqrt{9+16}$
$||\vec{B}|| = \sqrt{25}$
$||\vec{B}|| = 5m$

En el vector $\vec{C}$:
$\vec{C} = (7\vec{i} + 2\vec{j})$; cuando su punto de origen es $\vec{D}(3; -4)$
Realizamos el cálculo punto final menos punto inicial.

$d(\vec{C} - \vec{D}) = \sqrt{(Cx\text{-}Dx)^2 + (Cy\text{-}Dy)^2}$
$d(\vec{C} - \vec{D}) = \sqrt{(7 - 3)^2 + (2\text{-}(-4)^2)}$
$d(\vec{C} - \vec{D}) = \sqrt{(4)^2 + (6)^2)}$
$d(\vec{C} - \vec{D}) = \sqrt{16 + 36}$
$d(\vec{C} - \vec{D}) = \sqrt{52}$

Actividades

8. **Encuentra** la norma de los siguientes vectores:
   a. $\vec{u} = (1, \sqrt{2})$, $\vec{v} = (-4, 3)$ y $\vec{w} = (8, -8)$
   b. De $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$, siendo $A(6, 0)$, $B(3,5)$, $C(-1, -1)$.
9. Las componentes de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en una base ortonormal son $\vec{u} = (2, -5, 4)$ y $\vec{v} = (-1, -3, 6)$. **Calcula**:
   a. $\vec{u} \cdot \vec{v}$ b. $|\vec{u}|$ c. $|\vec{v}|$ d. $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$
10. **Halla** el valor de k para que $\vec{u} = (1, k, 2k)$ tenga módulo 9.
11. Las componentes de en una base ortonormal son $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (-2, 7, -1)$. **Calcula**:
    a. $|\vec{u} + \vec{v}|$ b. $|\vec{u} - \vec{v}|$ c. $|3\vec{u} - 2\vec{v}|$
12. **Determina** un vector unitario que sea paralelo a $\vec{v} = (2, 6, -3)$ y un vector unitario que sea perpendicular a $\vec{u} = (3, 2, -1)$.
13. Las componentes de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ en una base ortonormal son $\vec{u} = (1, -1, 7)$, $\vec{v} = (-2, 0, 5)$ y $\vec{w}$ $(3, -3, 2)$. **Halla.**
    a. $2\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$ c. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{w})$
    b. $\vec{u} \cdot (\vec{w} - \vec{u})$ d. $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$

136

Solucionario

Página 136 del texto del estudiante

1.- a) I u I = 1.73
I v I = 5
I w I = 11.31
b) I AB I= 5,83
I AC I= 7,07

3.- a) 106
b) -31
c) 64
d) 22

Página 137 del texto del estudiante

3.- Distancia del pinto B a la recta determinada por A y C= 1.41

Perímetro del triángulo= 9.98

Área del triángulo= 3,2

Página 139 del texto del estudiante

7.- Ángulo entre A y B= 51.53º

Ángulo entre C y D= 62.67º

Ángulo entre E y F= 44.08º

Solucionario

9.- a)

p	x=p+8	y=2p-11	(x,y)
-3	5	-17	(5,-17)
-2	6	-15	(6,-15)
-1	7	-13	(7,-13)
0	8	-11	(8,-11)
1	9	-9	(9,-9)
2	10	-7	(10,-7)
3	11	-5	(11,-5)

b) y=2x-27

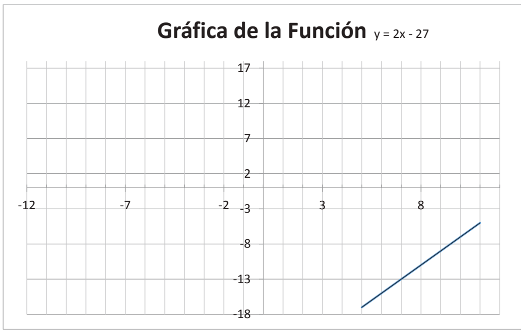
c)

9.- a)

p	x=p+8	y=2p-11	(x,y)
-3	5	-17	(5,-17)
-2	6	-15	(6,-15)
-1	7	-13	(7,-13)
0	8	-11	(8,-11)
1	9	-9	(9,-9)
2	10	-7	(10,-7)
3	11	-5	(11,-5)

b) y=2x-27

c)



11.-

Forma explícita y= -2,5x + 3,5

Forma paramétrica x = 3 - 2p ; y = -4 + 5p

Página 142

2.3. Ecuación de la recta en la forma vectorial

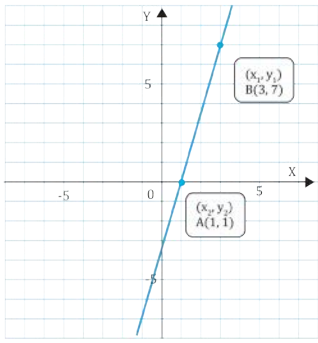


Fig. 14.

La ecuación vectorial, expresa a una recta en vectores base, es decir, en sus componentes incluye los vectores directores (i, j). Describe la recta según los elementos.

- Vector origen: Comprendido entre el origen de coordenadas y el punto A (0A).
- Parámetro: Se refiere a un valor numérico constante (|p|).
- Vector de dirección: Se constituye por la variación entre el punto final menos el punto inicial ($\overrightarrow{AB}$).

La ecuación vectorial de la recta, conocidos dos de sus puntos, es :

$$(\overrightarrow{0X}) = \overrightarrow{0A} + p\,(\overrightarrow{AB})$$

Ejemplo 12

Sean los puntos A (1, 1) y B (3, 7). Determinemos le ecuación de la recta en forma vectorial.

Primero: Determinamos el vector origen, mediante la diferencia de coordenadas:

$$\overrightarrow{0A} = \vec{A} - \vec{0}\,;\ \overrightarrow{0A} = (\vec{i} + \vec{j}) - (0\vec{i} + 0\vec{j})\ ;\ \overrightarrow{0A} = (\vec{i} + \vec{j})$$

Segundo: Determinamos el vector dirección mediante te la diferencia de coordenadas:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}\,;\ \overrightarrow{AB} = (3\vec{i} + 7\vec{j}) - (\vec{i} + \vec{j})\ ;\ \overrightarrow{AB} = (2\vec{i} + 6\vec{j})$$

Tercero: Reemplazamos los elementos en la ecuación vectorial, por lo tanto.

$$\left.\begin{array}{l} (\overrightarrow{0X}) = \overrightarrow{0A} + p\,(\overrightarrow{AB}) \\ (\overrightarrow{0X}) = (\vec{i} + \vec{j}) + p\,(2\vec{i} + 6\vec{j}) \end{array}\right\}$$

Actividades

17. Dados los puntos A(3, 2) y B(-1, -3), **determina** la ecuación de la recta en forma explícita.
18. Dada la ecuación que se expresa mediante :

    x = p + 8 ; y = 2p – 11, donde p es un número real, **determina**:

    a. Los puntos determinados por : .... - 3,-2,-1,0,1, 2 y 3.

    b. La relación algebraica entre x e y.

    c. La gráfica de la función.

Página 148

2.6. Ecuación de una recta perpendicular a una recta conocida

Dos rectas perpendiculares forman, en su punto de intersección, un ángulo recto; las pendientes presentan la relación $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Ejemplo 18

Determinemos la ecuación de la recta perpendicular a la recta $y = 2x + 1$, que pase por el punto $(1,3)$

Análisis:

Los datos según el ejercicio son: $m_1 = 2$, $b = 1$ y el punto $(1, 3)$, donde $x_1 = 1$ y $y_1 = 3$.

Además, al ser rectas perpendiculares, la pendiente de la segunda recta debe cambiar el signo e invertir los elementos de la pendiente.

Así entonces, si $m_1 = \frac{2}{1}$ entonces $m_2 = -\frac{1}{2}$

Solución:

En la expresión: $y - y_1 = m\,(x - x_1)$, reemplazamos los datos y resolvemos:

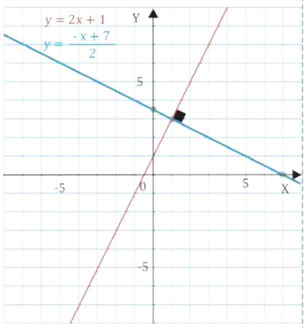


Fig. 16.

$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 1)$	Reemplazamos
$2y - 6 = -x + 1$	Multiplicamos por 2
$y = \frac{-x + 7}{2}$	Ecuación en la forma explícita

Actividades

22. **Determina** la ecuación de la recta paralela a la recta $y = -2x + 5$, que pase por el punto $(1, 2)$ en la forma explícita y vectorial. **Dibuja** la gráfica con las dos rectas.

23. **Determina** la ecuación de la recta paralela a la recta $y = 4x - 2$, que pase por el punto $(2, 3)$ en la forma explícita y vectorial. **Dibuja** la gráfica con las dos rectas.

24. **Determina** la ecuación de la recta que pase por el punto $(1,3)$ y que sea perpendicular a la recta $y = -3x - 1$. **Dibuja** la gráfica con las dos rectas.

25. **Determina** la ecuación de la recta que pase por el punto $(-2,0)$ y que sea perpendicular a la recta $y = -5x + 3$. **Dibuja** la gráfica con las dos rectas.

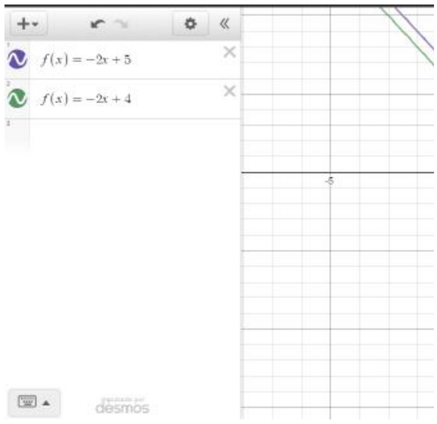
148

Solucionario

13.-

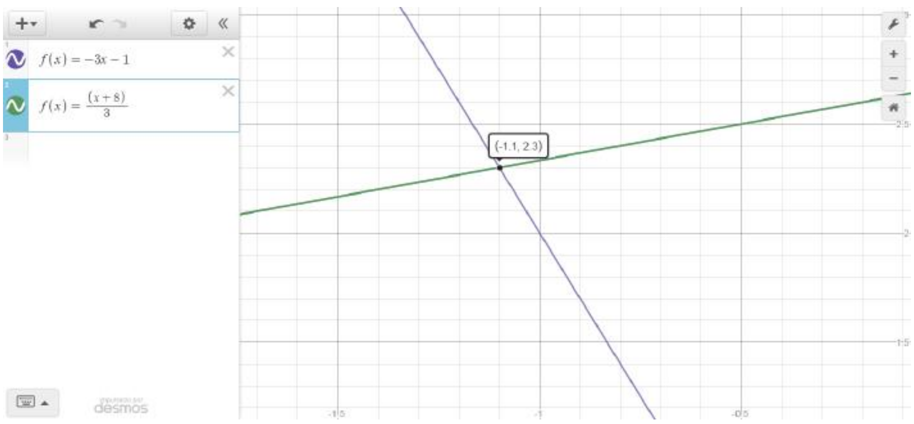
Forma explícita y = -2x + 4

Forma vectorial → 4j + p(i - 2j)



15.-

$Y = \frac{x}{3} + \frac{8}{3}$



Página 149

Solucionario

Página 149 del texto del estudiante

3.- Distancia del pinto B a la recta determinada por A y C= 1.41

Perímetro del triángulo= 9.98

Área del triángulo= 3,2

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 153 del texto del estudiante

1.- a) -32

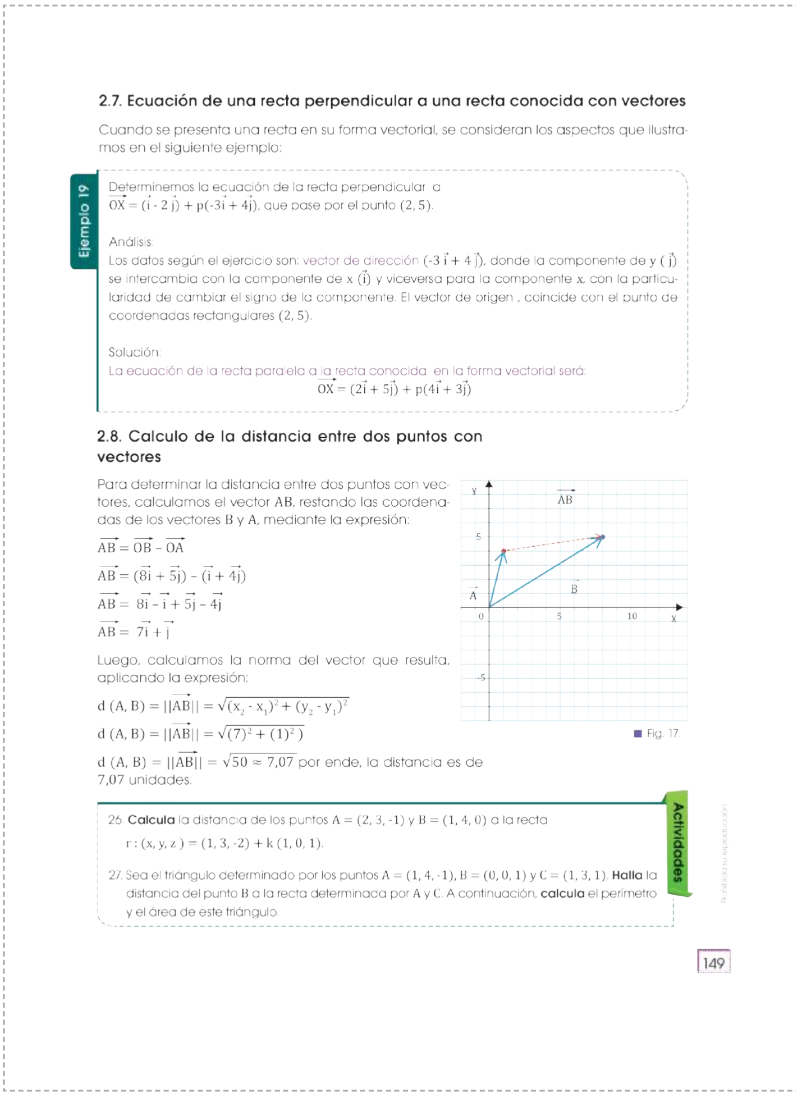
b) 10

c) -68

d) -128i + 96j

3.- El ángulo formado por los dos vectores debe ser 90º

5.- El vector 10i, 5j es perpendicular al vector -2i, 4j



2.7. Ecuación de una recta perpendicular a una recta conocida con vectores

Cuando se presenta una recta en su forma vectorial, se consideran los aspectos que ilustramos en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 19

Determinemos la ecuación de la recta perpendicular a $\overrightarrow{OX} = (\vec{i} - 2\vec{j}) + p(-3\vec{i} + 4\vec{j})$, que pase por el punto $(2, 5)$.

Análisis:

Los datos según el ejercicio son: vector de dirección $(-3\vec{i} + 4\vec{j})$, donde la componente de y $(\vec{j})$ se intercambia con la componente de x $(\vec{i})$ y viceversa para la componente x, con la particularidad de cambiar el signo de la componente. El vector de origen , coincide con el punto de coordenadas rectangulares $(2, 5)$.

Solución:

La ecuación de la recta paralela a la recta conocida en la forma vectorial será:

$$\overrightarrow{OX} = (2\vec{i} + 5\vec{j}) + p(4\vec{i} + 3\vec{j})$$

2.8. Calculo de la distancia entre dos puntos con vectores

Para determinar la distancia entre dos puntos con vectores, calculamos el vector AB, restando las coordenadas de los vectores B y A, mediante la expresión:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{AB} = (\vec{8i} + \vec{5j}) - (\vec{i} + \vec{4j})$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{8i} - \vec{i} + \vec{5j} - \vec{4j}$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{7i} + \vec{j}$$

Luego, calculamos la norma del vector que resulta, aplicando la expresión:

$$d(A, B) = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d(A, B) = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(7)^2 + (1)^2}$$

$d(A, B) = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{50} \approx 7,07$ por ende, la distancia es de 7,07 unidades.

Fig. 17.

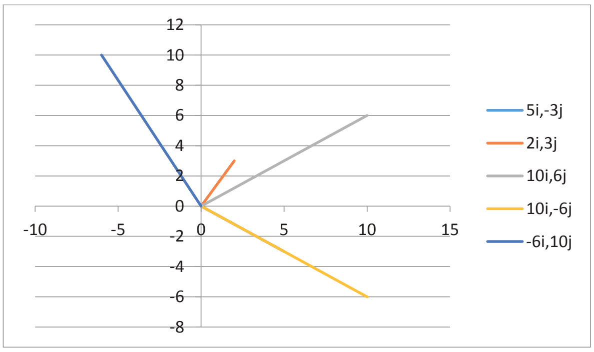
Actividades

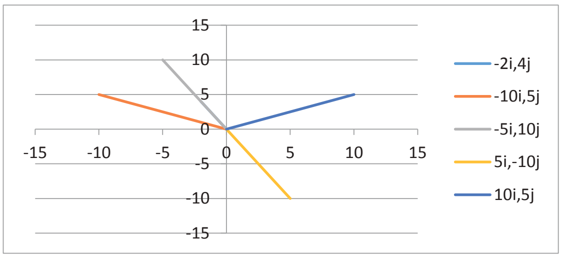
26. **Calcula** la distancia de los puntos $A = (2, 3, -1)$ y $B = (1, 4, 0)$ a la recta $r : (x, y, z) = (1, 3, -2) + k(1, 0, 1)$.

27. Sea el triángulo determinado por los puntos $A = (1, 4, -1)$, $B = (0, 0, 1)$ y $C = (1, 3, 1)$. **Halla** la distancia del punto B a la recta determinada por A y C. A continuación, **calcula** el perímetro y el área de este triángulo.

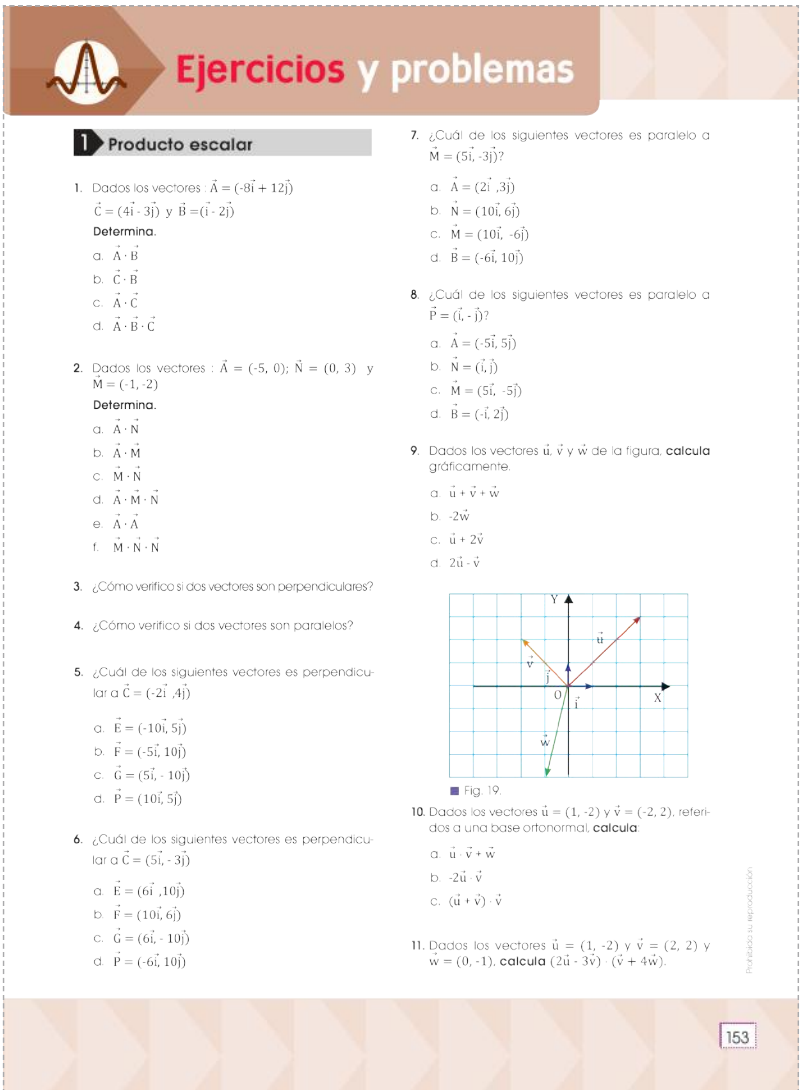
149

7.- El vector 5i, -3j es perpendicular al vector 10i, -6j





Página 153



Ejercicios y problemas

1 Producto escalar

1. Dados los vectores : $\vec{A} = (-8\vec{i} + 12\vec{j})$
$\vec{C} = (4\vec{i} - 3\vec{j})$ y $\vec{B} = (\vec{i} - 2\vec{j})$
Determina.
   a. $\vec{A} \cdot \vec{B}$
   b. $\vec{C} \cdot \vec{B}$
   c. $\vec{A} \cdot \vec{C}$
   d. $\vec{A} \cdot \vec{B} \cdot \vec{C}$

2. Dados los vectores : $\vec{A} = (-5, 0)$; $\vec{N} = (0, 3)$ y $\vec{M} = (-1, -2)$
Determina.
   a. $\vec{A} \cdot \vec{N}$
   b. $\vec{A} \cdot \vec{M}$
   c. $\vec{M} \cdot \vec{N}$
   d. $\vec{A} \cdot \vec{M} \cdot \vec{N}$
   e. $\vec{A} \cdot \vec{A}$
   f. $\vec{M} \cdot \vec{N} \cdot \vec{N}$

3. ¿Cómo verifico si dos vectores son perpendiculares?

4. ¿Cómo verifico si dos vectores son paralelos?

5. ¿Cuál de los siguientes vectores es perpendicular a $\vec{C} = (-2\vec{i}, 4\vec{j})$
   a. $\vec{E} = (-10\vec{i}, 5\vec{j})$
   b. $\vec{F} = (-5\vec{i}, 10\vec{j})$
   c. $\vec{G} = (5\vec{i}, -10\vec{j})$
   d. $\vec{P} = (10\vec{i}, 5\vec{j})$

6. ¿Cuál de los siguientes vectores es perpendicular a $\vec{C} = (5\vec{i}, -3\vec{j})$
   a. $\vec{E} = (6\vec{i}, 10\vec{j})$
   b. $\vec{F} = (10\vec{i}, 6\vec{j})$
   c. $\vec{G} = (6\vec{i}, -10\vec{j})$
   d. $\vec{P} = (-6\vec{i}, 10\vec{j})$

7. ¿Cuál de los siguientes vectores es paralelo a $\vec{M} = (5\vec{i}, -3\vec{j})$?
   a. $\vec{A} = (2\vec{i}, 3\vec{j})$
   b. $\vec{N} = (10\vec{i}, 6\vec{j})$
   c. $\vec{M} = (10\vec{i}, -6\vec{j})$
   d. $\vec{B} = (-6\vec{i}, 10\vec{j})$

8. ¿Cuál de los siguientes vectores es paralelo a $\vec{P} = (\vec{i}, -\vec{j})$?
   a. $\vec{A} = (-5\vec{i}, 5\vec{j})$
   b. $\vec{N} = (\vec{i}, \vec{j})$
   c. $\vec{M} = (5\vec{i}, -5\vec{j})$
   d. $\vec{B} = (-\vec{i}, 2\vec{j})$

9. Dados los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ de la figura, **calcula** gráficamente.
   a. $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
   b. $-2\vec{w}$
   c. $\vec{u} + 2\vec{v}$
   d. $2\vec{u} - \vec{v}$

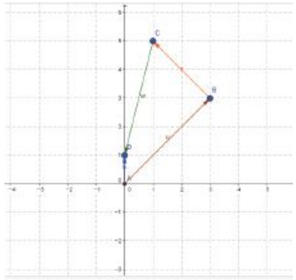
Fig. 19.

10. Dados los vectores $\vec{u} = (1, -2)$ y $\vec{v} = (-2, 2)$, referidos a una base ortonormal, **calcula**:
   a. $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{w}$
   b. $-2\vec{u} \cdot \vec{v}$
   c. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{v}$

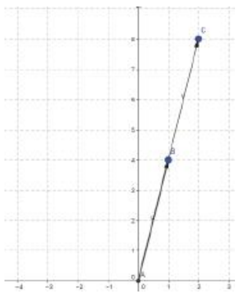
11. Dados los vectores $\vec{u} = (1, -2)$ y $\vec{v} = (2, 2)$ y $\vec{w} = (0, -1)$, **calcula** $(2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (\vec{v} + 4\vec{w})$.

Solucionario

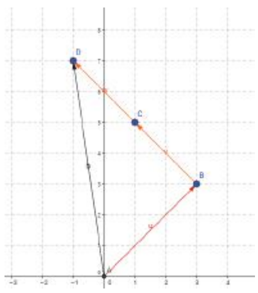
9.- a)



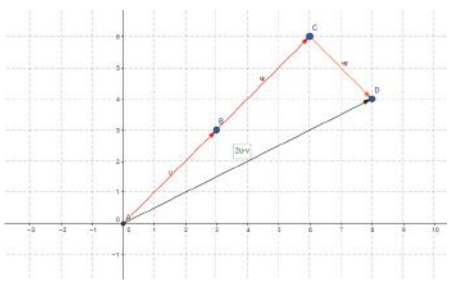
b)



c)



d)



11.- 12

Solucionario

13.-

a) 1

b) 7.28

c) 1

d) 8.28

e) 8.28

15.-

a) 20m

b) 8.25

c) 72.24

d) 64.03º

e) 5.1

f) 18

g) 64.67º

17.-

a) 10.44º

b) 76.74º

c) 22.62º

d) 180º

19.-

Y= -x-2

Página 154

12. Averigua si los puntos A, B y C estan alineados en cada uno de los siguientes casos:

 a. $A = (0, 3), B = (1, 1)$ y $C = (1, 5)$

 b. $A = (-1, 3), B = (4, 0)$ y $C = (2, 6)$

2 Norma de un vector

13. Dados los vectores : $\vec{A} = (-1, 0)$ $\vec{N} = (0, -1)$ y $\vec{M} = (-7, -2)$. **Determina** la magnitud de:

 a. $\vec{A}$

 b. $\vec{M}$

 c. $\vec{N}$

 d. $\vec{M} + A$

 e. $\vec{M} + N$

3 Distancia entre dos puntos

14. Dados los vectores : $\vec{A} = (-10, 5)$ $\vec{N} = (2, -2)$ y $\vec{M} = (0, -2)$. **Determina** la distancia entre:

 a. $\vec{A}$ y $\vec{N}$

 b. $\vec{M}$ y $\vec{N}$

 c. $\vec{A}$ y $\vec{M}$

 d. $\vec{M} + \vec{A}$

 e. $\vec{M} + \vec{M}$

 f. El resultado obtenido en los literales c y d es igual?¿Por qué?

 g. ¿Por qué se obtiene el resultado del literal e?

4 Ángulo entre dos vectores

15. Dados los vectores : $\vec{Z} = (20m, 50^\circ)$ $\vec{X} = (8i, -2j)$ y $\vec{Y} = (i, -5j)$. **Determina**.

 a. La norma de $\vec{Z}$

 b. La norma de $\vec{X}$

 c. $\vec{X} \cdot \vec{Z}$

 d. El ángulo entre los vectores $\vec{X}$ y $\vec{Z}$

 e. La norma de $\vec{Y}$

 f. $\vec{X} \cdot \vec{Y}$

 g. El ángulo entre los vectores $\vec{X}$ y $\vec{Y}$

16. En la siguiente figura, **determina**.

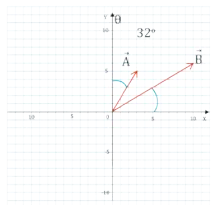


Fig. 20.

 a. El ángulo entre A y B

 b. El valor de θ.

17. **Calcula** el ángulo formado entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, si se conoce que:

 a. $\vec{a}\,(4, 5)$; $\vec{b}\left(\frac{16}{5}, 6\right)$

 b. $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$ y

 $A\,(4, 6)$, $B\left(-2, \frac{26}{5}\right)$, $C\left(9, \frac{103}{10}\right)$, $D\left(-\sqrt{3}, 5\right)$

 c. $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$; $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$

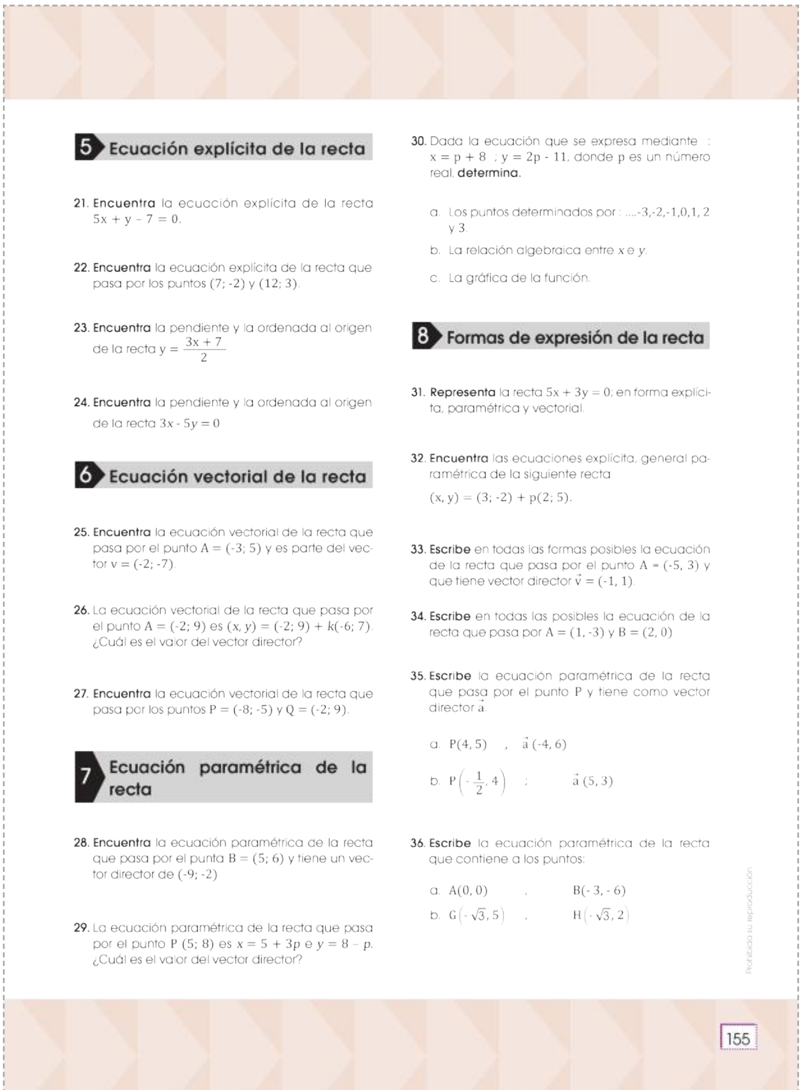
 d. $\vec{a} = (-1, 0)$; $\vec{b} = \vec{i}$

18. Las componentes de u, v y w en una cierta base son $u = (-1, 2)$, $v = (2, 3)$ y $w = (1, 0)$. Expresa cada uno de estos vectores como combinación lineal de los otros dos.

19. **Escribe** en todas las formas posibles la ecuación de la recta que pasa por el punto $A = (-5, 3)$ y que tiene vector director $\vec{v} = (-1, 1)$.

20. **Escribe** en todas las formas posibles la ecuación de la recta que pasa por el punto $B = (2, -1)$ y que tiene como vector director $\vec{u} = (3, 5)$

Página 155



5 Ecuación explícita de la recta

21. **Encuentra** la ecuación explícita de la recta $5x + y - 7 = 0$.

22. **Encuentra** la ecuación explícita de la recta que pasa por los puntos $(7; -2)$ y $(12; 3)$.

23. **Encuentra** la pendiente y la ordenada al origen de la recta $y = \frac{3x+7}{2}$

24. **Encuentra** la pendiente y la ordenada al origen de la recta $3x - 5y = 0$

6 Ecuación vectorial de la recta

25. **Encuentra** la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $A = (-3; 5)$ y es parte del vector $v = (-2; -7)$.

26. La ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $A = (-2; 9)$ es $(x, y) = (-2; 9) + k(-6; 7)$. ¿Cuál es el valor del vector director?

27. **Encuentra** la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos $P = (-8; -5)$ y $Q = (-2; 9)$.

7 Ecuación paramétrica de la recta

28. **Encuentra** la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punta $B = (5; 6)$ y tiene un vector director de $(-9; -2)$

29. La ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto $P\ (5; 8)$ es $x = 5 + 3p$ e $y = 8 - p$. ¿Cuál es el valor del vector director?

30. Dada la ecuación que se expresa mediante : $x = p + 8\ ;\ y = 2p - 11$, donde p es un número real, **determina.**

   a. Los puntos determinados por : ....-3,-2,-1,0,1, 2 y 3.
   b. La relación algebraica entre x e y.
   c. La gráfica de la función.

8 Formas de expresión de la recta

31. **Representa** la recta $5x + 3y = 0$; en forma explícita, paramétrica y vectorial.

32. **Encuentra** las ecuaciones explícita, general paramétrica de la siguiente recta $(x, y) = (3; -2) + p(2; 5)$.

33. **Escribe** en todas las formas posibles la ecuación de la recta que pasa por el punto $A = (-5, 3)$ y que tiene vector director $\vec{v} = (-1, 1)$.

34. **Escribe** en todas las posibles la ecuación de la recta que pasa por $A = (1, -3)$ y $B = (2, 0)$

35. **Escribe** la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto P y tiene como vector director $\vec{a}$.

   a. $P(4, 5)$, $\vec{a}\ (-4, 6)$
   b. $P\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$; $\vec{a}\ (5, 3)$

36. **Escribe** la ecuación paramétrica de la recta que contiene a los puntos:

   a. $A(0, 0)$, $B(-3, -6)$
   b. $G\left(-\sqrt{3}, 5\right)$, $H\left(-\sqrt{3}, 2\right)$

Solucionario

21.-

Y = -5x + 7

23.- m=1.5 b=3.5

27.- OX= (-8i - 5j) + p(6i + 14j)

29.- 3i – j

31.- Forma explícita $y = \frac{-5x}{3}$

Forma paramétrica $x = p\ ;\ y = \frac{-5p}{3}$

Forma vectorial OX= p($i - \frac{5}{3}j$)

33.- $y = -x - 2$

35.- a) $x = 4 - 4p\ ;\ y = 5 - 6p$

b) $x = -0{,}5 + 4p\ ;\ y = 4 = 3p$

Solucionario

37.- $x = p \ ; \ y = -4 + 2p$

39.- $x = p \ ; \ y = -2 + 3p$

41.- a) $x_{1=} \ 4 \quad y_{1=} \ 1$

b) $m = -\frac{1}{3}$

c) b= $\frac{7}{3}$

d) y= $-\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

43.- a) $x_{1=} \ 5 \quad y_{1=} - 2$

b) $m = 4$

c) b= -22

d) y= $4x - 22$

45.- $y_{=} - x - 1$

Página 156

9 Conversion explícita – paramétrica

37. **Expresa** $y = 2x - 4$ en su forma paramétrica.

38. Sean los puntos $(4, 3)$ y $(2, 2)$. **Determina** la forma paramétrica de la recta descrita.

39. Una recta se describe mediante los elementos $m = 3$ y $b = -2$. **Determina** la forma paramétrica de la misma.

40. Sea la gráfica, además de los puntos $(0,-2)$ y $(0.4, 0)$. **Halla** la forma paramétrica de la recta descrita.

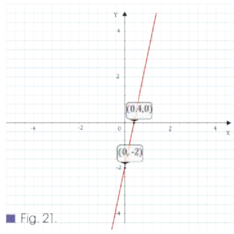


Fig. 21.

10 Conversion paramétrica explícita

41. Sea la ecuación $\begin{cases} x = 4 + 3p \\ y = 1 - p \end{cases}$.

Determina.

a. Los valores de x_1, y_1, a y b.

b. El valor de la pendiente

c. El valor de la intersección

d. La ecuación explícita

42. Sea la ecuación $\begin{cases} x = 3p \\ y = 5 + 2p \end{cases}$.

Determina.

a. Los valores de x_1, y_1, a y b.

b. El valor de la pendiente

c. El valor de la intersección

d. La ecuación explícita

11 Conversion vectorial – explícita

43. Sea la recta $\overrightarrow{OX} = (5i - 2j) + p(i + 4j)$, **determina** la forma explícita.

a. Los valores de x_1, y_1, a y b.

b. El valor de la pendiente

c. El valor de la intersección

d. La ecuación explícita

12 Recta paralela a una recta dada.

44. **Determina** la ecuación de la recta paralela a la recta $y = 5x + 4$, que pase por el punto $(2, 3)$.

45. **Halla** la ecuación de la recta paralela a la recta $y = -x + 4$, que pase por el punto $(-1, 0)$.

46. Dado el triángulo de vértices los puntos $A = (1, 1)$, $B = (-3, 5)$ y $C = (-1, -2)$, calcula la ecuación de:

a. La recta que pasa por A y es paralela al lado BC.

b. La mediana que parte de B.

c. La altura que parte de C.

Página 157

Para finalizar

1. Sean los vectores $\vec{A}(5,8)$ y $\vec{B}(3,2)$. Al realizar el producto punto, resulta.

   a. 46 c. 13
   b. 31 d. 18

2. La magnitud del vector $\vec{M} = 5\vec{i} - 8\vec{j}$ es:

   a. $\sqrt{39}$ c. 3
   b. $\sqrt{-39}$ d. $\sqrt{89}$

3. El producto escalar entre dos vectores. Perpendiculares es:

   a. 0 c. 1
   b. 90 d. -1

4. El vector perpendicular a $\vec{B} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ es:

   a. $-7\vec{i} + 3\vec{j}$ c. $-9\vec{i} + 12\vec{j}$
   b. $12\vec{i} + 9\vec{j}$ d. $3\vec{i} + 4\vec{j}$

5. Sean los vectores $\vec{A} = (3, -4)$ y $\vec{B} = (-2, 3)$

   El módulo de los vectores respectivamente es:

   a. $14, \sqrt{12}$ c. $5, \sqrt{13}$
   b. $12, \sqrt{15}$ d. $\sqrt{5}, 13$

6. Sean los vectores $\vec{A} = (-5i, -j)$ y $\vec{B} = (-2i, 3j)$

   El producto punto entre A y B es:

   a. 7 c. 9
   b. 12 d. -12

7. El ángulo formado por los vectores del ejercicio anterior es:

   a. 12,68° c. 67,59°
   b. 0,38° d. 22,41°

8. Responde verdadero (V) o falso (F).

   a. El producto $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$.

   b. Para verificar que dos vectores son paralelos utilizamos la ecuación: $AxBy = AyBx$.

   c. El producto escalar entre dos vectores que son perpendiculares es igual a uno.

   d. Los vectores que son iguales forman 180°.

   e. El producto escalar de dos vectores perpendiculares es igual al producto de sus módulos.

   f. El producto escalar es conmutativo.

   g. El producto $\vec{i} \cdot \vec{i} = 0$.

9. **Determina** la ecuación de la recta paralela a la recta $y = -2x + 3$, que pase por el punto $(2, 3)$.

10. **Halla** la ecuación de la recta perpendicular a la recta $y = -5x + 1$, que pase por el punto $(-1, -2)$.

11. Considerando la siguiente gráfica, **determina** la ecuación de la recta paralela a la recta L, que pase por el punto $(0, 4)$; y además, la ecuación de la recta perpendicular a la recta L, que pase por $(0, 1)$.

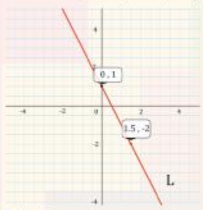


Fig. 22.

157

Solucionario

1.- b

3.- a

5.- ninguna respuesta

7.- c

9.- $y = -2x + 7$

11.- recta paralela $y = -\frac{1}{2}x + 4$;

recta perpendicular $y = 2x + 1$

13.- d

15.- perpendiculares

17.- $y = \frac{x-31}{7}$

19.- a) $x_1 = 6$ $y_1 = 5$ $a = 5$ $b = 7$

b) $m = -2$

c) b= 17

d) y= $-2x + 17$

21.- $x = 5 - 5p$; $y = -3 + 5p$

1.- Contestar con verdadero y falso

a) Dos vectores son paralelos cuando forman un ángulo de 90° ( )

b) La ecuación de la recta expresada en forma explícita es y=mx+b ( )

c) Dos vectores son perpendiculares cuando forman un ánulo de 90° ( )

d) El producto punto entre dos vectores nos da como resultado otro vector ( )

Seleccionar la respuesta correcta

2.- La pendiente de la recta se obtiene mediante la ecuación siguiente:

a) $y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ b) $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ c) $y = \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1}$

3.- Al punto de corte entre la recta y el eje de las ordenadas (eje y); se representa por la letra:

a) m b) x_1 c) b

4.- El producto escalar de un vector por sí mismo es:

a) B b) B^2 c) I B I

Resolver los siguientes ejercicios

5.- Calcular en producto escalar de los siguientes vectores:

a) $\vec{u} = (3, 0)$ $\vec{v} = (5, 5)$

b) $\vec{u} = (2, 1)$ $\vec{v} = (-3, 4)$.

6.- Graficar los siguientes vectores:

a) $\vec{A} = 3i + 4j$ b) $\vec{B} = i - 2j$

7.- Calcular la norma de los siguientes vectores

a) $\vec{A} = -6i + 4j$ b) $\vec{B} = 2i - j$

8.- Determinar la distancia entre los puntos

a) (3 , 5) y (1 , 4) b) (1 , 8) y (5 , 1)

9.- Calcular en ángulo entre los vectores:

a) $\vec{A} = 2i + 5j$ $\vec{B} = -1i + 4j$ b) $\vec{C} = 2i - 3j$ $\vec{D} = -6i + j$

10.- Expresar la ecuación en forma paramétrica

a) $y = -3x + 4$ b) $y = 2x - 1$

11.- Sean los puntos A (1, 2) y B (3,-4). Determinemos le ecuación de la recta en forma vectorial.

12.- Determinar la ecuación de la recta paralela a la recta y = -2 x – 2 que pase por el punto (1,3)

13.- Determinar la ecuación de la recta perpendicular a la recta y = -2x + 1, que pase por el punto (1,-3)

1.-

a) (F)   b) (V)   c) (V)   d) (F)

2.- b
3.- c

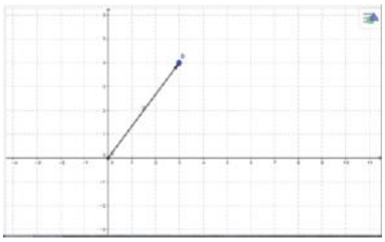
4.- b

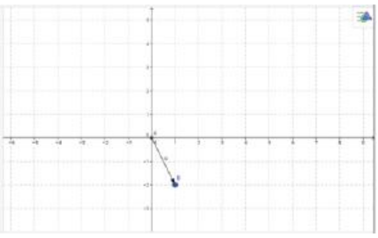
Resolver los siguientes ejercicios

5.- Calcular en producto escalar de los siguientes vectores:

a) 15   b) -2

6.- Graficar los siguientes vectores:

a) 

b) 

7.- Calcular la norma de los siguientes vectores

a) 7.21   b) 2.24

8.- Determinar la distancia entre los puntos

a) 2.24   b) 8.06

9.- Calcular en ángulo entre los vectores:

a) 35.84°   b) 119.55°

10.- Expresar la ecuación en forma paramétrica

a) x = p ; y=4 – 3p   b) x = p ; y=-1 + 2p

1.- Contestar con verdadero y falso

a) Dos vectores son paralelos cuando forman un ángulo de 180° ( )

b) La ecuación de la recta expresada en forma explícita es y=mx+b ( )

c) Dos vectores son perpendiculares cuando forman un ánulo de 90° ( )

d) El producto punto entre dos vectores nos da como resultado otro vector ( )

Seleccionar la respuesta correcta

2.- La pendiente de la recta se obtiene mediante la ecuación siguiente:

a) $y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ b) $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ c) $y = \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1}$

3.- Al punto de corte entre la recta y el eje de las ordenadas (eje y); se representa por la letra:

a) m b) x_1 c) b

4.- El producto escalar de un vector por sí mismo es:

a) B b) B^2 c) I B I

Resolver los siguientes ejercicios

4.- Calcular en producto escalar de los siguientes vectores:

a) $\vec{u} = (3, 0)$ $\vec{v} = (5, 5)$

5.- Graficar los siguientes vectores:

a) $\vec{A} = 3i + 4j$

6.- Calcular la norma de los siguientes vectores

a) $\vec{A} = 6i + 4j$

b) $\vec{B} = 2i + j$

7.- Determinar la distancia entre los puntos

a) (3 , 5) y (1 , 4)

8.- Calcular en ángulo entre los vectores:

a) $\vec{A} = 2i + 5j$ $\vec{B} = 1i + 4j$

9.- Expresar la ecuación en forma paramétrica

a) $y = 3x + 4$

10.- Sean los puntos A (1, 1) y B (3,-2). Determinemos le ecuación de la recta en forma vectorial.

1.- Contestar con verdadero y falso

a) (V)

b) (V)

c) (V)

d)(F)

Seleccionar la respuesta correcta

2.- b
3.- c

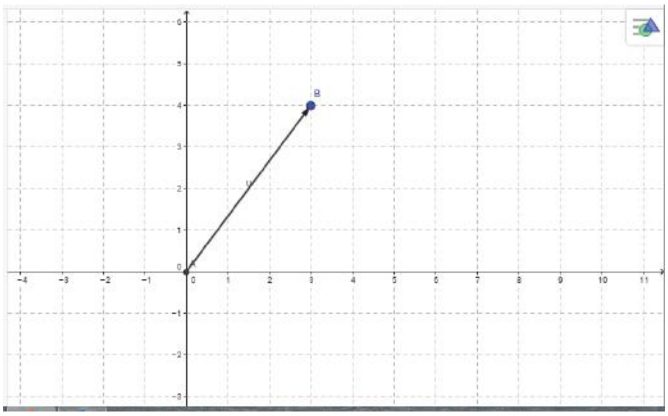
4.- b

Resolver los siguientes ejercicios

4.- Calcular en producto escalar de los siguientes vectores:

a) 15

5.-

a) 

6.-

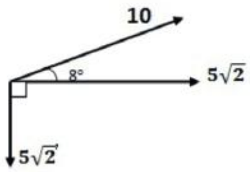
a) 7.21

b) 2.24

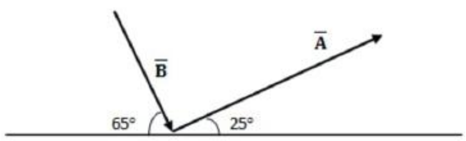
7.-

a) 2.24

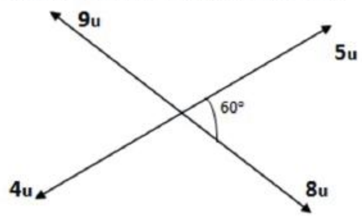
1. Calcule el modulo de la resultante (en N) de dos fuerza de 4N y 8N respectivamente y que forma un ángulo de 60°.
2. Determine el coseno del ángulo que forman dos vectores de igual magnitud, si su resultante vale la mitad de ellos.
3. Dos fuerzas de igual modulo y que forman un ángulo de 60° entre si, tiene una resultante de $40\sqrt{3}$N. calcule el modulo de dichas fuerzas.
4. Calcule el modulo del vector resultante.



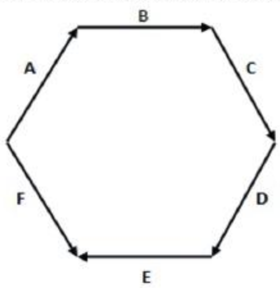
5. Los módulos de los vectores y son 4u y 3u respectivamente. Calcule el máximo valor de la operación $|2\overline{A} + 3\overline{B}|$.
6. Según la figura, halle $|\overline{A} - \overline{B}|$, si A=8 y B=6.



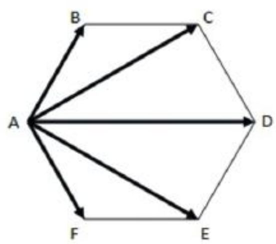
7. La resultante de los 4 vectores mostrados tiene un modulo de:



8. El vector suma de los vectores colocado en el hexágono regular es:



9. Se muestra un rectángulo ABCD, el modulo de la resultante de sumar los vectores $\overline{AD} + \overline{AB} + \overline{CB} + \overline{CD}$ es: (en cm)
10. Hallar el valor de la resultante de los vectores mostrados en la figura (en cm.) hexágono regular de radio de 20 cm.



CICLO DEL APRENDIZAJE

¿Cómo dinamizo el aula?

Experiencia

- Debatir la necesidad que tienen los seres humanos en ubicarse en una ciudad usando mapas que tienen cuadrículas de referencia.

  También usamos para orientarnos dispositivos con sistemas de GPS (sistema de posicionamiento global), este sistema funciona triangulando posiciones entre satélites.

  De esta forma cuando usamos por ejemplo Google maps, estamos usando parte del compendio de esta unidad

Conceptualización

- Diferenciar los conceptos de magnitud escalar y magnitud vectorial.

  Comparar las operaciones en el espacio bidimensional como el producto escalar.

  Usar un sistema de referencia bidimensional para ubicar una partícula en el plano.

  Describir trayectorias rectilíneas, usando ecuaciones lineales paramétricas.

Reflexión

Reflexionar acerca de la importancia de estos conocimientos en las apps actuales como TIC que usan para su funcionamiento el sistema GPS

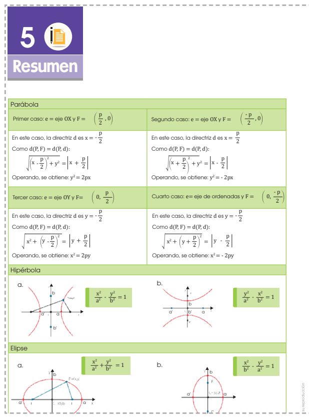
Aplicación

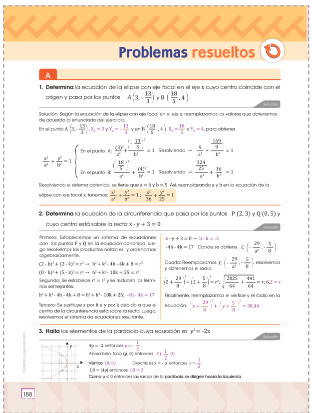
Usar el producto escalar y las diferentes formas de expresar las ecuaciones lineales en la resolución de problemas físicos, como los planteados en el texto

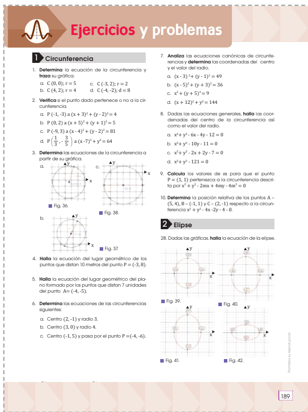
Reconocer los procesos en las operaciones con vectores bidimensionales.

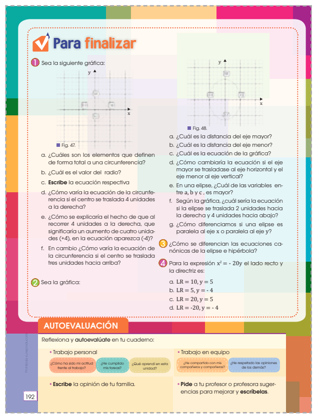
Producir predicciones usando los modelos matemáticos estudiados.

Cónicas

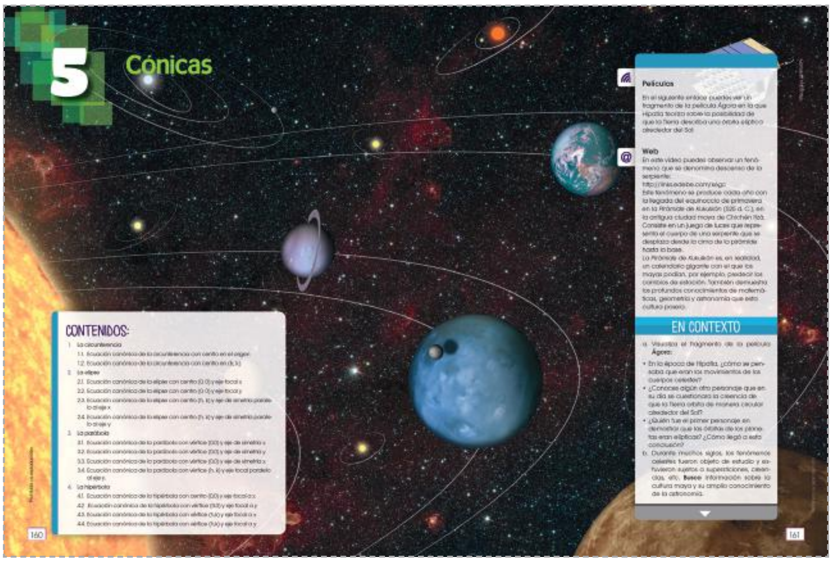

Resumen


Problemas resueltos


Ejercicios y problemas


Para finalizar


ZONA



Ejes temáticos	Contenidos
Geometría y Medida	Cónicas.....página 162
	La circunferencia .....página 162
	Ecuación canónica de la circunferencia con centro en el origen.....página 163
	Ecuación canónica de la circunferencia con centro en (h, k) .....página 165
	La elipse .....página 169
	Ecuación canónica de la elipse con centro (0, 0) y eje focal x .....página 169
	Ecuación canónica de la elipse con centro (0, 0) y eje focal y ..... página 172
	Ecuación canónica de la elipse con centro (h, k) y eje focal x .....página 174
	Ecuación canónica de la elipse con centro (h, k) y eje focal y .....página 174
	La parábola .....página 177
	Ecuación canónica de la parábola con vértice (0,0) y eje de simetría x.....página 177
	Ecuación canónica de la parábola con vértice (0,0) y eje de simetría y.....página 178
	Ecuación canónica de la parábola con vértice (0,0) y eje de simetría x.....página 179
	Ecuación canónica de la parábola con vértice (0,0) y eje de simetría y.....página 179
	La hipérbola .....página 182
	Ecuación canónica de la hipérbola con vértice (0,0) y eje focal a x.....página 182
	Ecuación canónica de la hipérbola con vértice (0,0) y eje focal a y.....página 183
	Ecuación canónica de la hipérbola con vértice (h,k) y eje focal a x.....página 185
	Ecuación canónica de la hipérbola con vértice (h,k) y eje focal a y.....página 185

LOGO INSTITUCIONAL	NOMBRE DE LA INSTITUCIÓN				AÑO LECTIVO		
PLAN DE UNIDAD TEMÁTICA							
1. DATOS INFORMATIVOS:							
Docente:	Nombre del docente que ingresa la información	Área/asignatura:	MATEMÁTICA	Grado/Curso:	2° BACHILLERATO	Paralelo:	
N.º de unidad de planificación:	5	Título de unidad de planificación:	CÓNICAS	Objetivos específicos de la unidad de planificación:		Producir, comunicar y generalizar informacióNde manera escrita, verbal, simbólica, gráfica y/otecnológica mediante la aplicación de conocimientosmatemáticos y el manejo organizado, responsable y honesto de las fuentes de datos para comprender otrasdisciplinas, entender las necesidades y potencialidades de nuestro país y tomar decisiones con responsabilidad social. Desarrollar la curiosidad y la creatividad en el uso de herramientas matemáticas al momento de enfrentar y solucionar problemas de la realidad nacional demostrando actitudes deorden, perseverancia y capacidades de investigación.	
PERÍODOS	24				SEMANA DE INICIO:		
2. PLANIFICACIÓN							
DESTREZAS CON CRITERIOS DE DESEMPEÑO A SER DESARROLLADAS:						CRITERIOS DE EVALUACIÓN	
• Describir la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola como lugares geométricos en el plano. • Escribir y reconocer las ecuaciones cartesianas de la circunferencia, de la parábola, la elipse y la hipérbola con centro en el origen y con centro fuera del origen para resolver y plantear problemas (por ejemplo en física: órbitas planetarias, tiro parabólico, etc.) identificando la validez y pertinencia de los resultados obtenidos.						CE.M.5.6. Emplea vectores geométricos en el plano y operaciones en R, con aplicaciones en física y en la ecuación de la recta; utiliza métodos gráficos, analíticos y tecnológicos.	

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	RECURSOS	INDICADORES DE LOGRO	TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN
Se presentan estudiosn estadísticso que sirvan como tema de partida sobre la importancia de la esadística Manipulación de material con fotos y representación de distintos tipos de análisis estadistcos. Resolución de problemas de aplicación de funciones en el ambito deportivo y social. Definición de variables estadísticas, medidas de dispersión, tablas de frecuencias, procedimientos, graficas y analisis de resultados. Uso de hojas de cálculo que facilitan la representación gráfica y posterior interpretación de información ¿Qué podemos decir sobre la estadística y su aporte en la economía? Identificación de medidas de tendencia central su aplicación en las finanzas y economía. Reflexión y análisis sobre dichas aplicaciones ¿Por qué es importante calcular, analizar e interpretar las medidas de tendencias central y de dispersión de una variable estadística? Planteamiento y resolución de problemas que apliquen medidas de dispersión y de tendencia central.	- Texto - Calculadora - Enlaces web - Pizarra	I.M.5.6.1. Grafica vectores en el plano; halla su módulo y realiza operaciones de suma, resta y producto por un escalar; resuelve problemas aplicados a la Geometría y a la Física. (I.2.) I.M.5.6.2. Realiza operaciones en el espacio vectorial R; calcula la distancia entre dos puntos, el módulo y la dirección de un vector; Reconoce cuando dos vectores son ortogonales; y aplica este conocimiento en problemas físicos, Apoyado en las TIC. (I.3.) I.M.5.6.3. Determina la ecuación de la recta de forma vectorial y paramétrica; identifica su pendiente, la distancia a un punto y la posición relativa entre dos rectas, la ecuación de una recta bisectriz, sus aplicaciones reales, la validez de sus resultados y el aporte de las TIC. (I.3.)	Comprobar el desarrollo de las destrezas necesarias para el manejo de vectores en el plano y sus características, graficación, norma, Operaciones con vectores algebraicas, en forma gráfica y en Forma analítica, así como para la resolución de problemas de aplicación. El estudiante debe ser capaz de calcular el producto de un número por un vector, el producto Escalar entre vectores, la ortogonalidad, la distancia entre dos puntos, el ángulo entre dos vectores; determinar la posición relativa de dos rectas; describir la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola (tanto en su forma cartesiana como en su forma paramétrica), y, en general, resolver aplicaciones geométricas de vectores en R
ELEMENTOS DEL PERFIL DE SALIDA			
I.2. Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para Resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos información posibles. I.3. Sabemos comunicarnos de manera clara en nuestra lengua y en otras, utilizamos varios lenguajes como el numérico, el digital, el artístico y el corporal; asumimos con Responsabilidad nuestros discursos.			

ELABORADO	REVISADO	APROBADO
Docente:	Director del área :	Vicerrector:
Firma:	Firma:	Firma:
Fecha:	Fecha:	Fecha:

Objetivos generales del área que se evalúan

- Describir la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola como lugares geométricos en el plano.
- Escribir y reconocer las ecuaciones cartesianas de la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola con centro en el origen y con centro fuera del origen para resolver y plantear problemas (por ejemplo, en física: órbitas planetarias, tiro parabólico, etc.), identificando la validez y pertinencia de los resultados obtenidos.

Objetivos del área por subnivel

- O.M.5.5. Valorar, sobre la base de un pensamiento crítico, creativo, reflexivo y lógico, la vinculación de los conocimientos matemáticos con los de otras disciplinas científicas y los saberes ancestrales, para así plantear soluciones a problemas de la realidad y contribuir al desarrollo del entorno social, natural y cultural.

Objetivo integrador del área por subnivel

- OI.5.5. Plantear actividades de emprendimiento en diversos ámbitos de su vida, evaluando los riesgos e impactos que comportan a través de la investigación, con el uso de las tecnologías y métodos científicos, planificando de forma adecuada sus proyectos.
- OI.2.8. Construir hábitos de organización en sus tareas y actividades cotidianas, proponiendo razonamientos lógicos y críticos.

Criterios de evaluación

- Opera y emplea funciones reales, lineales, cuadráticas, polinomiales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas para plantear situaciones hipotéticas y cotidianas que puedan resolverse mediante modelos matemáticos; comenta la validez y limitaciones de los procedimientos empleados y verifica sus resultados mediante el uso de las TIC.
- Reconoce patrones presentes en sucesiones numéricas reales, monótonas y definidas por recurrencia; identifica las progresiones aritméticas y geométricas; y, mediante sus propiedades y fórmulas, resuelve problemas reales de matemática financiera e hipotética.

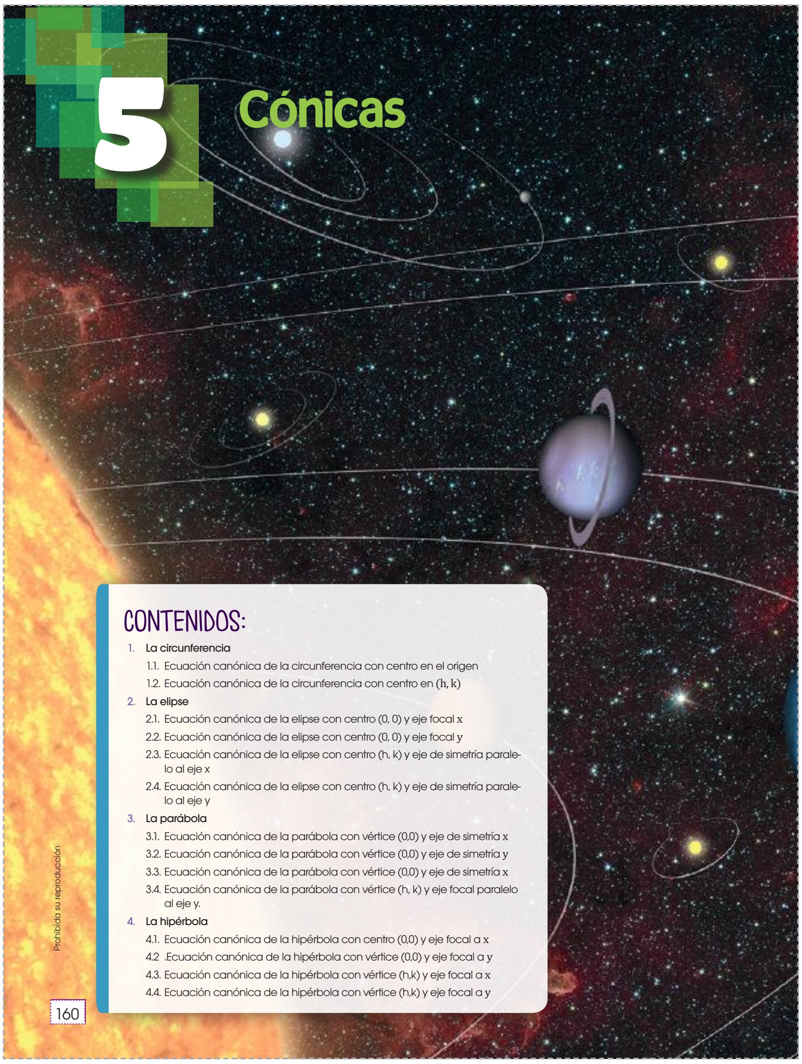
Elementos del perfil de salida a los que se contribuye

- Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos e información posibles.
- Sabemos comunicarnos de manera clara en el corporal; asumimos con responsabilidad nuestros discursos.
- Determina la ecuación de la recta de forma vectorial y paramétrica; identifica su pendiente, la distancia a un punto y la posición relativa entre dos rectas, la ecuación de una recta bisectriz, sus aplicaciones reales, la validez de sus resultados y el aporte de las TIC.

Orientación didáctica

- En esta unidad se estudia las cónicas, sus ecuaciones canónicas, gráficas y análisis. La portada de la unidad nos lleva al estudio de las órbitas descritas por los planetas, ya que la primera Ley de Kepler nos indica que "Los planetas se mueven alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas, y que el sol se encuentra en uno de sus Focos". En el desarrollo de la unidad el estudiante entenderá que la elipse es una cónica y que uno de sus elementos característicos son los focos. En importante que el estudiante reconozca las particularidades de cada cónica y sus diferencias para lograr la comprensión del resto de las cónicas tratadas en el texto. Como orientación metodológica el docente puede abordar la unidad con el apoyo de las TICs. Una herramienta que se sugiere es el manejo del software DESMOS y el GEOGEBRA, los cuales ayudarían a los estudiantes a comprender, interpretar y analizar con mayor profundidad el tema de las Cónicas. Forme grupos de trabajo que busquen y analicen objetos de su entorno y las relacionen con los distintos tipos de cónicas estudiados en la unidad. Puede presentar diferentes gráficas para que los alumnos reconozcan a qué tipo de cónica corresponde.

Página 160



5 Cónicas

CONTENIDOS:

1. La circunferencia
   1.1. Ecuación canónica de la circunferencia con centro en el origen
   1.2. Ecuación canónica de la circunferencia con centro en (h, k)
2. La elipse
   2.1. Ecuación canónica de la elipse con centro (0, 0) y eje focal x
   2.2. Ecuación canónica de la elipse con centro (0, 0) y eje focal y
   2.3. Ecuación canónica de la elipse con centro (h, k) y eje de simetría paralelo al eje x
   2.4. Ecuación canónica de la elipse con centro (h, k) y eje de simetría paralelo al eje y
3. La parábola
   3.1. Ecuación canónica de la parábola con vértice (0,0) y eje de simetría x
   3.2. Ecuación canónica de la parábola con vértice (0,0) y eje de simetría y
   3.3. Ecuación canónica de la parábola con vértice (0,0) y eje de simetría x
   3.4. Ecuación canónica de la parábola con vértice (h, k) y eje focal paralelo al eje y.
4. La hipérbola
   4.1. Ecuación canónica de la hipérbola con centro (0,0) y eje focal a x
   4.2 .Ecuación canónica de la hipérbola con vértice (0,0) y eje focal a y
   4.3. Ecuación canónica de la hipérbola con vértice (h,k) y eje focal a x
   4.4. Ecuación canónica de la hipérbola con vértice (h,k) y eje focal a y

Página 161


http://goo.gl/89oXPs

Películas

En el siguiente enlace puedes ver un fragmento de la película Ágora en la que Hipatia teoriza sobre la posibilidad de que la Tierra describa una órbita elíptica alrededor del Sol:

Web

En este vídeo puedes observar un fenómeno que se denomina descenso de la serpiente:
http://links.edebe.com/k6gc
Este fenómeno se produce cada año con la llegada del equinoccio de primavera en la *Pirámide de Kukulkán* (525 d. C.), en la antigua ciudad maya de Chichén Itzá. Consiste en un juego de luces que representa el cuerpo de una serpiente que se desplaza desde la cima de la pirámide hasta la base.
La *Pirámide de Kukulkán* es, en realidad, un calendario gigante con el que los mayas podían, por ejemplo, predecir los cambios de estación. También demuestra los profundos conocimientos de matemáticas, geometría y astronomía que esta cultura poseía.

EN CONTEXTO

a. Visualiza el fragmento de la película **Ágora:**

- En la época de Hipatia, ¿cómo se pensaba que eran los movimientos de los cuerpos celestes?
- ¿Conoces algún otro personaje que en su día se cuestionara la creencia de que la Tierra orbita de manera circular alrededor del Sol?
- ¿Quién fue el primer personaje en demostrar que las órbitas de los planetas eran elípticas? ¿Cómo llegó a esta conclusión?

b. Durante muchos siglos, los fenómenos celestes fueron objeto de estudio y estuvieron sujetos a supersticiones, creencias, etc. **Busca** información sobre la cultura maya y su amplio conocimiento de la astronomía.

161

Solucionario

- a. Respuesta sugerida:

  Se pensaba que la Tierra era el centro del Universo y que los astros, incluido el Sol, giraban alrededor de ella. Nicolás Copérnico.

Lo demostró Johanes Kepler.

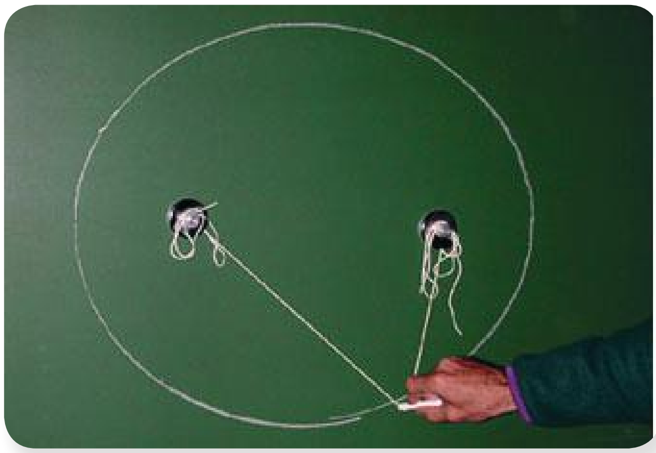
b. Respuesta sugerida:

Los conocimientos astronómicos mayas eran propios de la clase sacerdotal y el pueblo conducía su vida de acuerdo a sus predicciones. Se puede consultar más información en:

http://links.edebe.com/4sp

La Elipse en la Arquitectura

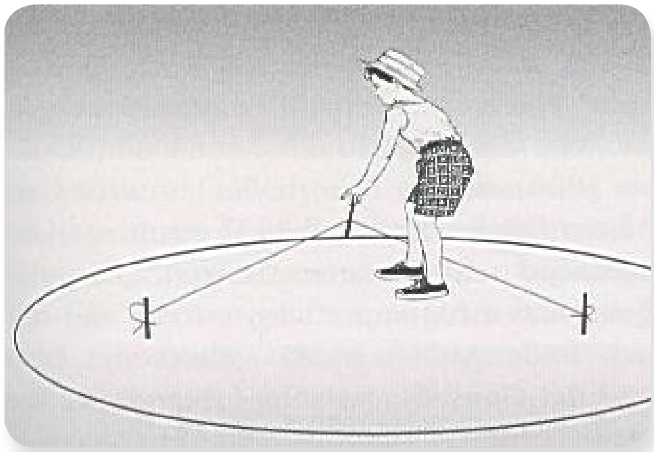
¿Cómo empezar? Por supuesto, con el definición de esta cifra geométrica: la elipse es una curva cerrada (locus de puntos) tal que la suma de las distancias de cada uno de sus puntos que los dos puntos internos fijos, llamados focos, es constante y es igual a la longitud del eje mayor.
Para ver este concepto puede ser útil para mostrar la llamada "La construcción del jardinero" hecho mediante la colocación de dos clavos en los incendios y la localización de la elipse con la ayuda de una cuerda.



http://goo.gl/mc7131

Para ver más intuitivamente el concepto de "Sección cónica" puede ser útil usar la haz de una linterna proyectada en la pared. De acuerdo a 'inclinación del eje de la viga se puede observar la forma cónica proyectado en la pared.

La de la siguiente figura, por ejemplo, es un 'hipérbole porque el eje del proyector es paralela a la pared.



http://goo.gl/mc7131

En la historia de la arquitectura la elipse se ha disparado en varias ocasiones como distribución del plan o como esquemática en alzado. En muchos casos no son elipses perfectas, sino que tiende a las formas ovaladas. Dada la similitud entre las dos figuras a tener en cuenta a la vez de todos modos.

La primera evidencia de la utilización de la máquina elíptica (u oval) Se remonta al Anfiteatro Romano. Esta forma podría ser el resultado de la combinación de dos teatros de medio punto.

http://goo.gl/mc7131

Página 164

Ejemplo 3

Considerando la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ determinemos la gráfica de la circunferencia correspondiente.

Datos: $x^2 + y^2 = 4$ Gráfica = ?

Al comparar la ecuación dada en los datos con la ecuación general, es posible establecer la igualdad: $r^2 = 4$; entonces $r = 2$.

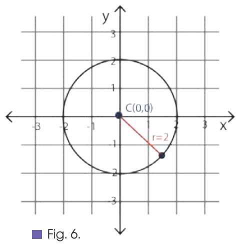


Fig. 6.

Actividades

1. **Representa** gráficamente las siguientes ecuaciones.
   a. $x^2 + y^2 = 6$
   b. $x^2 + y^2 = 2$
   c. $x^2 + y^2 = \frac{12}{25}$
   d. $x^2 + y^2 = (5)^2$
   e. $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$
2. **Relaciona** las ecuaciones con su respectiva gráfica

1.

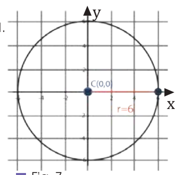


Fig. 7.

3.

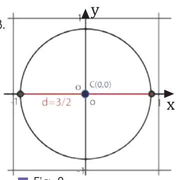


Fig. 8.

2.

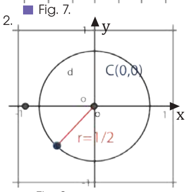


Fig. 9.

4.

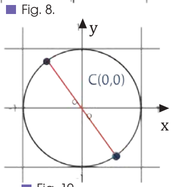


Fig. 10.

a. $x^2 + y^2 = \frac{9}{4}$

b. $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

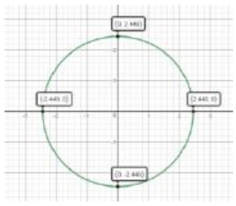
c. $x^2 + y^2 = 4$

d. $x^2 + y^2 = 36$

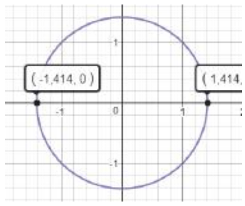
3. **Determina** las ecuaciones que cumplan con las condiciones dadas.
   a. $C\ (0, 0)$; $d = \frac{2}{3}$
   b. $C\ (0, 0)$; $r = 3$
   c. $C\ (0, 0)$; $r = \sqrt{6}$
   d. $C\ (0, 0)$; $r = 1\ \frac{2}{3}$

164

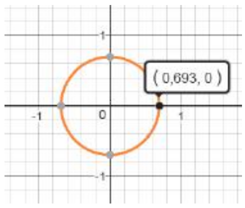
Solucionario



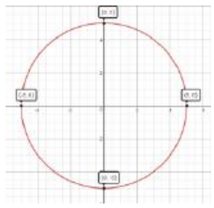
a)circunferencia con centro en el origen y $r = \sqrt{6} = 2.44$



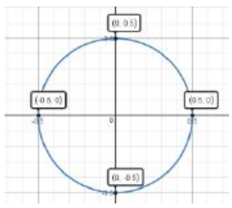
b)circunferencia con centro en el origen y $r = \sqrt{2} = 1{,}41$



c) circunferencia con centro en el origen y $r = \sqrt{\frac{2}{2}} = 0.693$



d) circunferencia con centro en el origen y r= 5



e) circunferencia con centro en el origen $r = \frac{2}{2}$

2. Observando los elementos representativos de radio y centro las ecuaciones con sus gráficas son:

1 – d, 2 – b, 3 – a, 4 – c.

3. Ecuación de la circunferencia con centro en el origen $x^2 + y^2 = r^2$

a) $r = \frac{d}{2} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{2} = \frac{1}{3}$
$x^2 + y^2 = \frac{1}{(3)^2}$
$x^2 + y^2 = \frac{1}{9}$

b) $x^2 + y^2 = 3^2$
$x^2 + y^2 = 9$

c) $x^2 + y^2 = (\sqrt{6})^2$
$x^2 + y^2 = 6$

d) $r = 1\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$
$x^2 + y^2 = (\frac{5}{3})^2$
$x^2 + y^2 = \frac{25}{9}$

Solucionario

Ecuación Canónica $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$

4. a) $[x-(-2)]^2+[y-3]^2 = 8^2$

$(x+2)^2+(y-3)^2 = 64$

Ecuación General

$(x+2)^2+(y-3)^2 = 64$ Desarrollando

$x^2+2x+4+y^2+6y+9=64$

$x^2+y^2+2x-6y+4+9-64=0$

$x^2+y^2+2x-6y-51=0$

b) Ecuación Canónica

$(x-5)^2+(y-2)^2=2^2$

$(x-5)^2+(y-2)^2=4$

Ecuación General

$(x-5)^2+(y-2)^2=4$

$x^2-10x+25+y^2-4y+4=4$

$x^2+y^2-10x-4y+25+4-4=0$

$x^2+y^2-10x-4y+25=0$

c) Ecuación Canónica

$[x-(-2)]^2+[y-(-1)]^2 = 4^2$

$(x+2)^2+(y+1)^2=16$

Ecuación General

$(x+2)^2+(y+1)^2=16$

$x^2+4x+4+y^2+2y+1=16$

$x^2+y^2+4x+2y+4+1-16=0$

$x^2+y^2+4x+2y-11=0$

d) Ecuación Canónica

$[x-(-5)]^2+(y-8)^2=7^2$

$(x+5)^2+(y-8)^2=49$

Ecuación General

$(x+5)^2+(y-8)^2=49$

$x^2+10x+25+y^2-16y+64=49$

$x^2+y^2+10x-16y+25+64-49=0$

$x^2+y^2+10x-16y+40=0$

e) Ecuación Canónica

$[x-(-1)]^2+(y-0)^2=12^2$

$(x+1)^2+y^2=144$

Ecuación General

$(x+1)^2+y^2=144$

$x^2+2x+1+y^2=144$

$x^2+y^2+2x+1-144=0$

$x^2+y^2+2x-143=0$

5. La ecuación de la circunferencia es $(x-h)^2+(y-k)^2 = r!$. Si su centro esta sobre las abscisas tendrá coordenadas $(h\,;0)$. Si es tangente a la recta $y=-x+3$. Su radio será perpendicular a la recta en el punto P $-1\,;4$.

Condición de perpendicularidad

$M1.M2=-1$ La pendiente de la recta $y=-x+3$ será:

$M1=-1$
$-1.M2=-1$
$M2=-1$

La ecuación del radio será: $y=x+b$; como pasa por el punto $(-1\,;4)$

$4=-1+b=5$

Ecuación del radio $y=x+5$ Para encontrar el centro sabemos que: $y=0$ $0=x+5$ $x=5$

Por lo tanto las coordenadas del centro son:

$C=(-5\,;0)$

Página 166

Ecuación general de la circunferencia

Si desarrollamos la ecuación canónica de la circunferencia, resolviendo el producto notable binomio al cuadrado (en los dos paréntesis), tenemos:

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	Ecuación canónica con centro C(h,k)
$x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + y^2 = r^2$	Resolviendo el binomio al cuadrado
$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + y^2 - r^2 = 0$	Ordenando los términos convenientemente
$A = -2h$, $B = -2k$ y $C = h^2 + y^2 - r^2$	Reemplazando las constantes A, B y C
$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$	Ecuación general de la circunferencia

Ejemplo 6

Determinemos las ecuaciones canónica y general de la circunferencia de radio 6, cuyas coordenadas del centro son (-3 ,2).

Datos: $r = 6$, $C = (-3, 2)$. a. Ecuación canónica = ? ; b. Ecuación general = ?

Según los datos, conocemos las coordenadas del centro y el valor del radio, así tenemos en la ecuación canónica.

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	Ecuación canónica con centro C (h, k)
$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 36$	Al reemplazar los valores de h y k cambian los signos.

Al desarrollar la ecuación canónica con centro h, k, resolvemos los productos notables, y las constantes. Al igualar a cero resulta:

$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 36$

$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 + 4 = 36$

$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 13 - 36 = 0$

$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 23 = 0$ Ecuación General de la circunferencia

Actividades

4. **Determina** las ecuaciones canónica y general para las circunferencias descritas:
   a. Radio 8, centro (-2, 3).
   b. Radio 2, centro (5, 2).
   c. Radio 4, centro (-2, -1).
   d. Radio 7, centro (-5, 8).
   e. Radio 12, centro (-1, 0).
5. **Halla** la ecuación de la circunferencia cuyo centro se halla sobre el eje de abscisas y es tangente a la recta r: y = -x + 3 en el punto P = (-1, 4).
6. **Halla** la ecuación general de una circunferencia de radio 2 que es concéntrica con la que tiene como extremos de un diámetro los puntos A = (0, 3) y B = (8, 3)
7. Considerando las siguientes ecuaciones de hipérbolas , determine las coordenadas del centro, vértices y focos así como la representación gráfica.
   a. $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-5)^2}{49} = 1$
   b. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{7} = 1$
   c. $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$

Solucionario

La longitud del radio lo determinamos como la distancia entre el punto P y el centro

$$r = \sqrt{(x1 - x2)^2 + (y1 - y2)^2}$$

$$r = \sqrt{(-1 + 5)^2 + (4 - 0)^2}$$

$$r = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

La ecuación de la circunferencia es:

$(x + 5)^2 + y^2 = 32$

6. Como las circunferencias son concéntricas su centro será el mismo. El centro será el punto medio entre los dos extremos del diámetro.

$$C = \left(\frac{0+8}{2}\right) ; \left(\frac{3+3}{2}\right)$$

$$C = (4 ; 2)$$

La ecuación de la circunferencia es:

$$(x - 4)^2 + (y - k)^2 = 2^2$$

$$(x - 4)^2 + (y - k)^2 = 4$$

Solucionario

Actividad 13

5. Para determinar las coordenadas del centro y el radio se debe escribir la ecuación de la circunferencia en forma canónica.

a) $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 3 = 0$

$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 + 4y + 4) = 3 + 9 + 4$ Completamos los T.C.P

$(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$ Comparamos con la ecuación $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

$r = \sqrt{1}6 = 4$

Centro: $(-3\ ;-2)$

b) $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$

$(x^2 + 4x + 4) + y^2 + 8y + 16 = 5 + 4 + 16$

$(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 25$

$r = 25 = 5$

Centro: $(2\ ;-4)$

c) $2x^2 + 2y^2 + 4x - 8y = 8$

$x! + y^2 + 2x - 4y = 4$ Dividimos para dos

$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = 4 + 1 + 4$

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$

Radio: $4 = 2$ Centro: $(1\ ;2)$

d) $5x! + 5y! - 10x - 20y + 5 = 0$

Dividimos para cinco

$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$

$x - 2x + 1 + (y^2 - 4y + 4) - 1 + 1 + 4$

$x - 1^2 + y - 2\ ^2 = 4$

Radio: $4 = 2$ Centro: $(1\ ;2)$

Página 167

Obtención del radio y las coordenadas del centro a partir de la ecuación general de la circunferencia

A partir de la fórmula general, obtendremos la ecuación canónica de la circunferencia utilizando el método de completación para trinomios cuadrados perfectos.

$x^2 + y^2 + Ax + By + C= 0$	Ecuación general de la circunferencia
$(x^2 + Ax) + (y^2 + By)= - C$	Agrupando los términos según x e y.
$\left(x^2 + Ax + \frac{A^2}{4}\right) + \; y^2 + By + \frac{B^2}{4} = - C + \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4}$	

Aumentamos el término ideal para completar el trinomio cuadrado perfecto, dividiendo para dos y elevando al cuadrado el segundo término.

$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4C}{4}$	Factorando los trinomios y resolviendo las fracciones.
$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	Comparamos con la ecuación canónica.

Por lo cual, se concluye que el radio es $r = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}}{2}$

Ejemplo 7

Determinar el valor del radio y las coordenadas del centro a partir de la ecuación general de la circunferencia descrita por: $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 31 = 0$

$x^2 + y^2 + 4x + 2y - 31 = 0$	Dato
$(x^2 + 4x) + (y^2 + 2y) = 31$	Agrupando los términos según x e y.
$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) = 31 + 4 + 1$	Completando el trinomio.
$(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 36$	Factorando los trinomios
$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	Comparamos con la ecuación canónica

Actividades

8. **Determina** el valor del radio y las coordenadas del centro a partir de las ecuaciones:

a. $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 3 = 0$

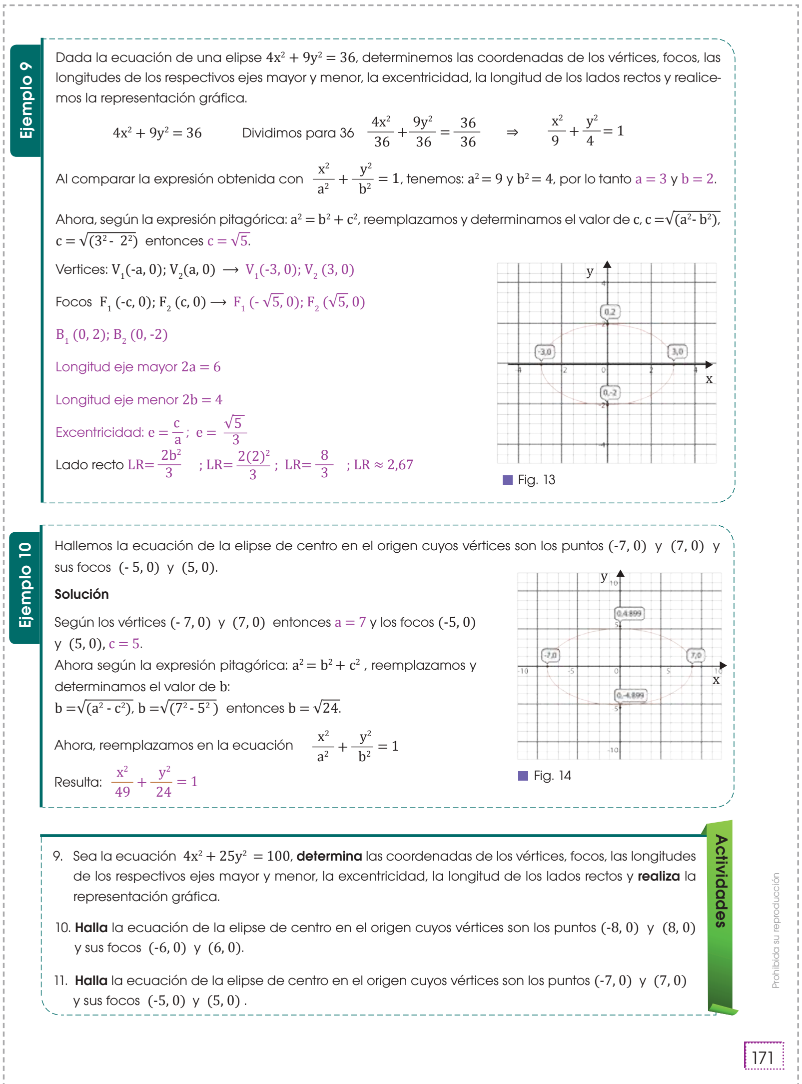
b. $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$

c. $2x^2 + 2y^2 + 4x - 8y = 8$

d. $5x^2 + 5y^2 - 10x - 20y + 5 = 0$

167

Página 171



Ejemplo 9

Dada la ecuación de una elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$, determinemos las coordenadas de los vértices, focos, las longitudes de los respectivos ejes mayor y menor, la excentricidad, la longitud de los lados rectos y realicemos la representación gráfica.

$4x^2 + 9y^2 = 36$ Dividimos para 36 $\frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = \frac{36}{36} \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

Al comparar la expresión obtenida con $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, tenemos: $a^2 = 9$ y $b^2 = 4$, por lo tanto $a = 3$ y $b = 2$.

Ahora, según la expresión pitagórica: $a^2 = b^2 + c^2$, reemplazamos y determinamos el valor de c, $c = \sqrt{(a^2 - b^2)}$, $c = \sqrt{(3^2 - 2^2)}$ entonces $c = \sqrt{5}$.

Vertices: $V_1(-a, 0)$; $V_2(a, 0) \longrightarrow V_1(-3, 0)$; $V_2(3, 0)$

Focos $F_1(-c, 0)$; $F_2(c, 0) \longrightarrow F_1(-\sqrt{5}, 0)$; $F_2(\sqrt{5}, 0)$

$B_1(0, 2)$; $B_2(0, -2)$

Longitud eje mayor $2a = 6$

Longitud eje menor $2b = 4$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$; $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Lado recto $LR = \frac{2b^2}{3}$; $LR = \frac{2(2)^2}{3}$; $LR = \frac{8}{3}$; $LR \approx 2,67$

Fig. 13

Ejemplo 10

Hallemos la ecuación de la elipse de centro en el origen cuyos vértices son los puntos $(-7, 0)$ y $(7, 0)$ y sus focos $(-5, 0)$ y $(5, 0)$.

Solución

Según los vértices $(-7, 0)$ y $(7, 0)$ entonces $a = 7$ y los focos $(-5, 0)$ y $(5, 0)$, $c = 5$.

Ahora según la expresión pitagórica: $a^2 = b^2 + c^2$, reemplazamos y determinamos el valor de b:

$b = \sqrt{(a^2 - c^2)}$, $b = \sqrt{(7^2 - 5^2)}$ entonces $b = \sqrt{24}$.

Ahora, reemplazamos en la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Resulta: $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$

Fig. 14

Actividades

9. Sea la ecuación $4x^2 + 25y^2 = 100$, **determina** las coordenadas de los vértices, focos, las longitudes de los respectivos ejes mayor y menor, la excentricidad, la longitud de los lados rectos y **realiza** la representación gráfica.
10. **Halla** la ecuación de la elipse de centro en el origen cuyos vértices son los puntos $(-8, 0)$ y $(8, 0)$ y sus focos $(-6, 0)$ y $(6, 0)$.
11. **Halla** la ecuación de la elipse de centro en el origen cuyos vértices son los puntos $(-7, 0)$ y $(7, 0)$ y sus focos $(-5, 0)$ y $(5, 0)$.

171

Solucionario

6. Para determinar los elementos de la elipse, se debe escribir la ecuación en su forma canónica.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$4x^2 + 25y^2 = 100$ Dividimos para 100

$\frac{4x^2}{100} + \frac{25y^2}{100} = \frac{100}{100}$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$

a=5 ; b=6 ; c=$\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$

Vértices

$V1(-a, 0)$; $V2(a, 0)$ $V1(-5,0)$; $V2(5,0)$

Focos

$F1(-c, 0)$; $F2(c, 0)$ $F1(-\sqrt{21}, 0)$; $F2(\sqrt{21}, 0)$

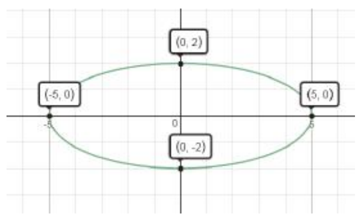
$B1(0, b)$; $B2(0, -b)$ $B1(0,2)$; $B2(0, -2)$

Longitud Eje mayor $2a = 10$

Longitud Eje menor $2b = 4$

Excentricidad $e = \frac{c}{a}$; $e = \frac{\sqrt{21}}{5}$

Lado recto $LR = \frac{2b^2}{a}$; $LR = \frac{2(2)^2}{5}$; $LR = \frac{8}{5}$; $LR = 1{,}6$



7. Si $V1(-8; 0)$; $V2(8; 0)$ Entonces $a = 8$
   Si $F1(-6; 0)$; $F2(6; 0)$ Entonces $c = 6$

   $b = \sqrt{a^2 - c^2}$; $b = \sqrt{8^2 - 6^2}$; $b = \sqrt{28}$

   Centro: $(0,0)$

La ecuación de la elipse: $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{28} = 1$

Solucionario

9. Para determinar los elementos de la elipse, la ecuación debe expresarse en forma canónica.

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

$$25x^2+4y^2=100$$

$$\frac{25x^2}{100}+\frac{4y^2}{100}=\frac{100}{100}$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$$

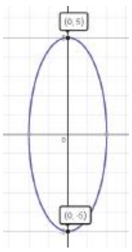
De donde $a = \sqrt{25} = 5$ Entonces los vértices serán: $V1\ 0{,}5$; $V2(0,-5)$

$b = \sqrt{4} = 2$ Entonces $B1(2{,}0)$; $B2(-2{,}0)$

$c = \sqrt{a^2-b^2}$; $c = \sqrt{25-4}$; $c = \sqrt{21}$

Entonces los focos serían:
$F1(0, \sqrt{21})$; $F2(0, -\sqrt{21})$

Longitud Eje mayor $2a = 10$
Longitud Eje menor $2b = 4$
Excentricidad $e = \frac{c}{a}$; $e = \sqrt{21}\frac{5}{5}$
Lado recto $LR = \frac{2b^2}{a}$; $LR = \frac{2(2)^2}{5}$; $LR = \frac{8}{5}$; $LR = 1{,}6$



10. Si $V1(0,4)$ y $V2(0,-4)$ Entonces

Si $F1(0,2)$ y $F2(0,-2)$ Entonces

Determinamos el valor de b

$b = \sqrt{a^2-c^2}$; $b = \sqrt{4^2-2^2}$; b :

Ahora reemplazamos en la ecuación

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

$$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1$$

Página 173

Tenemos que la distancia del punto B_1 $(0, b)$ a cada foco es a. Por lo tanto, seguimos esta ecuación pitagórica y despejamos b^2.

$a^2 = b^2 + c^2$; $b^2 = a^2 - c^2$;

Sustituimos todos los $(a^2 - c^2)$ que tengamos en la ecuación anterior por b^2

$a^2b^2 = a^2x^2 + b^2y^2$; $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$

Finalmente dividimos toda la ecuación para a^2b^2 y simplificamos.

$\frac{a^2x^2}{a^2b^2}+\frac{b^2y^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2}$; $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ ecuación de la elipse con eje focal y

Ejemplo 11

Hallemos los elementos de la elipse cuya ecuación es $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=1$

Primero: Encontramos a y b, luego sustituimos en las coordenadas de V y B.

$a^2 = 25$; $a = 5$ entonces los vértices serán $V_1(0, 5)$; $V_2(0, -5)$

$b^2 = 16$; $b = 4$ entonces $B_1(4{,}0)$; $B_2(-4, 0)$

Segundo: El valor de c lo conseguimos despejando de la ecuación $a^2 = b^2 + c^2$

$c=\sqrt{(a^2 - b^2)}$; $c=\sqrt{(25 - 16)}$; $c=\sqrt{9}$, $c = 3$ entonces los focos serán $F_1(0, 3)$; $F_2(0, -3)$

longitud eje mayor $= 2a$; longitud eje mayor $= 10$

longitud eje menor $= 2b$; longitud eje menor $= 8$

lado recto $LR = \frac{2b^2}{a}$; $LR = \frac{2(4)^2}{5}$; $LR = \frac{32}{5}$; $LR = 6{,}4$

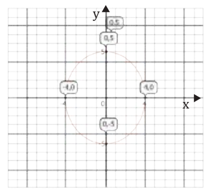


Fig. 16.

Ejemplo 12

Hallemos la ecuación de la elipse de centro en el origen cuyos vértices son los puntos $(0,3)$ y $(0,-3)$ y sus focos $(0, 2)$ y $(0, -2)$.

Según los vértices $(0, 3)$ y $(0, -3)$ entonces $a = 3$ y los focos $(0, 2)$ y $(0, -2)$, $c = 2$.

Ahora según la expresión pitagórica: $a^2 = b^2 + c^2$, reemplazamos y determinamos el valor de b.

$b =\sqrt{(a^2 - c^2)}$, $b =\sqrt{(3^2 - 2^2)}$ entonces $b = \sqrt{5}$.

Ahora, reemplazamos en la ecuación $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$,

Resulta: $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$,

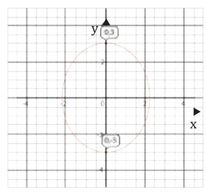


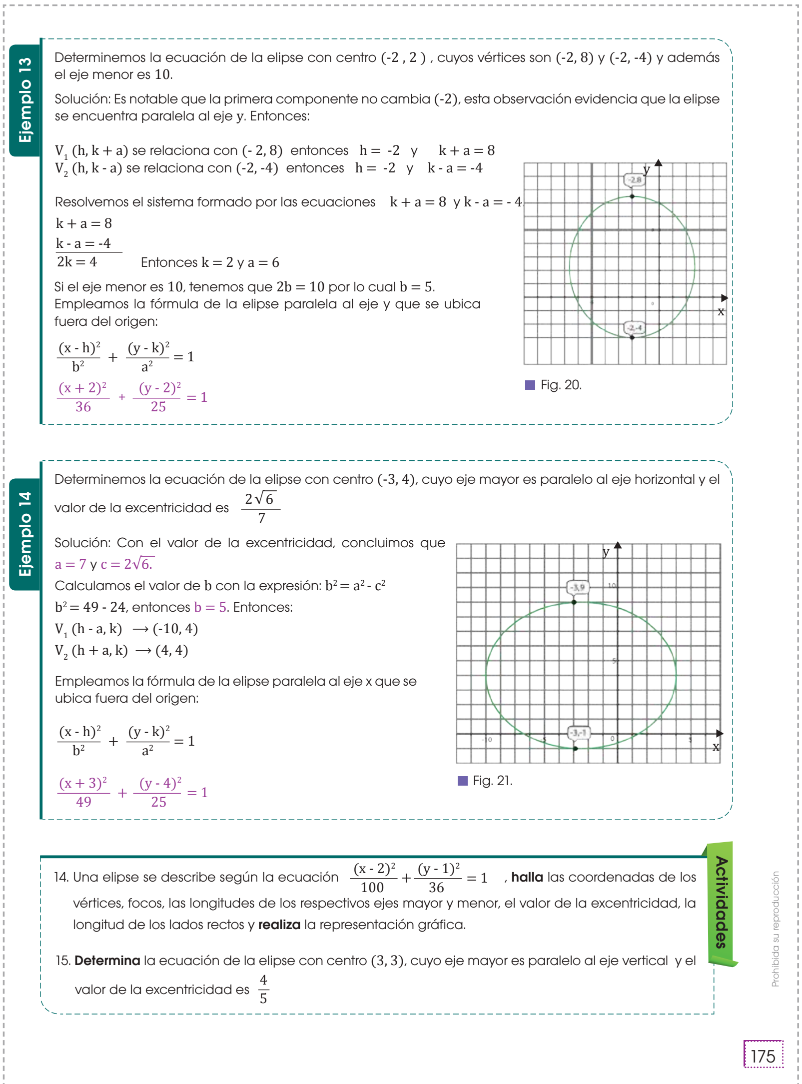
Fig. 17.

Actividades

12. Dada la ecuación $25x^2 + 4y^2 = 100$, **determina** las coordenadas de los vértices, focos, las longitudes de los respectivos ejes mayor y menor, la excentricidad, la longitud de los lados rectos y **realiza** la representación gráfica.

13. **Halla** la ecuación de la elipse de centro en el origen cuyos vértices son los puntos $(0, 4)$ y $(0, -4)$ y sus focos $(0, 2)$ y $(0, -2)$.

Página 175


Ejemplo 13

Determinemos la ecuación de la elipse con centro (-2 , 2) , cuyos vértices son (-2, 8) y (-2, -4) y además el eje menor es 10.

Solución: Es notable que la primera componente no cambia (-2), esta observación evidencia que la elipse se encuentra paralela al eje y. Entonces:

V_1 (h, k + a) se relaciona con (- 2, 8) entonces $h = -2$ y $k + a = 8$

V_2 (h, k - a) se relaciona con (-2, -4) entonces $h = -2$ y $k - a = -4$

Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones $k + a = 8$ y $k - a = -4$

$$\begin{array}{l} k + a = 8 \\ \underline{k - a = -4} \\ 2k = 4 \end{array}$$

Entonces $k = 2$ y $a = 6$

Si el eje menor es 10, tenemos que $2b = 10$ por lo cual $b = 5$.

Empleamos la fórmula de la elipse paralela al eje y que se ubica fuera del origen:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{(x+2)^2}{36} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$$

Fig. 20.

Ejemplo 14

Determinemos la ecuación de la elipse con centro (-3, 4), cuyo eje mayor es paralelo al eje horizontal y el valor de la excentricidad es $\frac{2\sqrt{6}}{7}$

Solución: Con el valor de la excentricidad, concluimos que $a = 7$ y $c = 2\sqrt{6}$.

Calculamos el valor de b con la expresión: $b^2 = a^2 - c^2$

$b^2 = 49 - 24$, entonces $b = 5$. Entonces:

V_1 (h - a, k) ⟶ (-10, 4)

V_2 (h + a, k) ⟶ (4, 4)

Empleamos la fórmula de la elipse paralela al eje x que se ubica fuera del origen:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{(x+3)^2}{49} + \frac{(y-4)^2}{25} = 1$$

Fig. 21.

Actividades

14. Una elipse se describe según la ecuación $\frac{(x-2)^2}{100} + \frac{(y-1)^2}{36} = 1$, **halla** las coordenadas de los vértices, focos, las longitudes de los respectivos ejes mayor y menor, el valor de la excentricidad, la longitud de los lados rectos y **realiza** la representación gráfica.

15. **Determina** la ecuación de la elipse con centro (3, 3), cuyo eje mayor es paralelo al eje vertical y el valor de la excentricidad es $\frac{4}{5}$

175

Solucionario

11. En la ecuación observamos que el semieje mayor esta en las x debido a que el denominador es

mayor para esa variable, por lo tanto la elipse es paralela al eje de las x y su ecuación es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Las coordenadas del centro son: (2,1)

$a = \sqrt{100} = 10$ Entonces $V1(h - a, k)$ y $V2(h + a, k)$;

$b = \sqrt{36} = 6$

$V1(2 - 10,1)$; $V1(-8,1)$

$V2(2 + 10,1)$; $V2(12,1)$

Los focos son:

$F1(h - c, k)$; $F1(2 - 8,1)$; $F1(-6,1)$

$F2(h + c, k)$; $F2(2 + 8,1)$; $F2(10,1)$

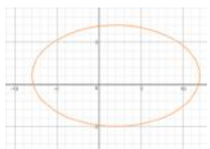
Longitud Eje mayor $2a = 20$

Longitud Eje menor $2b = 12$

Excentricidad $e = \frac{c}{a}$; $e = \frac{8}{10}$; $e = \frac{4}{5}$

Lado recto $LR = \frac{2b^2}{a}$;

$LR = \frac{2(6)^2}{10}$; $LR = \frac{72}{10}$; $LR = 0{,}72$



12. Si el eje mayor es paralelo al eje Y (vertical) su ecuación canónica es $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

Con el valor de la excentricidad concluimos que $c = 4$ y $a = 5$

Por lo tanto $b = \sqrt{a^2 - c^2}$; $b = \sqrt{5^2 - 4^2}$; $b = 3$

Ecuación de la elipse

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$$

Solucionario

13. a) $9x^2 + 4y^2 - 36x - 8y + 4 = 0$

$(9x^2 - 36) + (4y^2 - 8y) = -4$

$9(x^2 - 4x) + 4(y^2 - 2y) = -4$

$9(x^2 - 4x + 4) + 4(y^2 - 2y + 1) =$
$-4 + 36 + 4$

$9(x - 2)^2 + 4(y - 1)^2 = 36$

$\frac{9(x-2)^2}{36} + \frac{4(y-1)^2}{36} = \frac{36}{36}$

$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

Elipse de lado mayor paralelo al eje y

$a = 3$; $b = 2$;

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$; $c = \sqrt{3^2 - 2^2}$; $c = \sqrt{5}$

Centro: (h, k) ; $(3,1)$

Vértices: $(h, k + a)$; $(3,4)$

$(h, k - a)$; $(3,-2)$

Focos: $(h, k + c)$; $(3,2 + \sqrt{5})$

$(h, k - c)$; $(3,2 - \sqrt{5})$

Excentricidad $e = \frac{c}{a}$; $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Lado recto $LR = \frac{2b^2}{a}$;

$LR = \frac{2(2)^2}{3}$; $LR = \frac{8}{3}$

Página 176

Obtención de la ecuación canónica de la elipse a partir de la ecuación general

Sea la ecuación general de un lugar geométrico, $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$; si los coeficientes de A y B son del mismo signo, representa una elipse con eje paralelo al eje horizontal o vertical.

Ejemplo 15

Sea la ecuación $6x^2 + 9y^2 - 96x - 36y - 36 = 0$, hallemos la ecuación canónica de la elipse, determinemos las coordenadas del centro, vértices, focos, longitudes de los lados rectos, el valor de la excentricidad y la representación gráfica.

Solución:

$16x^2 + 9y^2 - 96x - 36y + 36 = 0$	Dato
$(16x^2 - 96x) + (9y^2 - 36y) = -36$	Agrupando los términos según x e y.
$16(x^2 - 6x) + 9(y^2 - 4y) = -36$	Factor común numérico
$16(x^2 - 6x + 9) + 9(y^2 - 4y + 4) = -36 + 144 + 36$	Completando los trinomios
$16(x - 3)^2 + 9(y^2 - 2)^2 = 144$	Factorando trinomios y realizando operaciones
$\frac{16(x-3)^2}{144} + \frac{9(y-2)^2}{144} = \frac{144}{144}$	Dividiendo cada término para 144
$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$	Simplificando las fracciones

- Elipse de eje mayor paralelo al eje y.
- Valores de a, b y c correspondientemente: 4, 3 y $\sqrt{7}$.
- **Centro** $(h, k) \longrightarrow$ Centro $(3, 2)$
- **Vértices**: $(h, k + a) \longrightarrow (3, 6)$
  $(h, k - a) \longrightarrow (3, -2)$
- **Focos**: $(h, k + c) \longrightarrow (3, 2 + \sqrt{7})$
  $(h, k - c) \longrightarrow (3, 2 - \sqrt{7})$
- Lado recto $LR = \frac{16(x-3)^2}{144}$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$; $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$

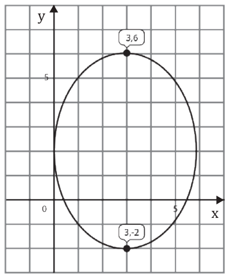


Fig. 22.

Actividades

16. Considerando las siguientes ecuaciones, **determina** la ecuación canónica de la elipse, estableciendo las coordenadas del centro, vértices, focos, longitudes de los lados rectos el valor de la excentricidad; así como la representación gráfica.

a. $9x^2 + 4y^2 - 36x - 8y + 4 = 0$

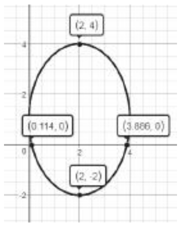
b. $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$

c. $16x^2 + 4y^2 + 32x + 16y - 32 = 0$

176

Lado recto $LR = \frac{2b^2}{a}$;

$LR = \frac{2(2)^2}{3}$; $LR = \frac{8}{3}$



b) $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$

$(x^2 - 6x) + (4y^2 + 16y) = -21$ Agrupando los términos según X o Y

$(x^2 - 6x) + 4(y^2 + 4y) = -21$ Factor comun numérico

$(x^2 - 6x + 9) + 4(y^2 + 4y + 4) = -21 + 9 + 16$ Completando los trinomios

$(x-3)^2 + 4(y+2)^2 = 4$

$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{4(y+2)^2}{4} = \frac{4}{4}$ Dividiendo para 4

$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{1} = 1$

Elipse de lado mayor paralelo al eje x

$a = 2$; $b = 1$; $c = \sqrt{a^2 - b^2}$; $c = \sqrt{2^2 - 1}$; $c = \sqrt{3}$

Centro: (h, k) ; $(3, -2)$

Vértices: $(h + a, k)$; $(5, -2)$

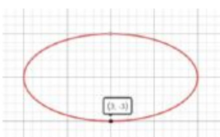
$(h - a, k)$; $(1, -2)$

Focos: $(h + c, k)$; $(5 + \sqrt{2}, -2)$

$(h - c, k)$; $(5 - \sqrt{2}, -2)$

Excentricidad $e = \frac{c}{a}$; $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Lado recto $LR = \frac{2b^2}{a}$; $LR = \frac{2(1)^2}{2}$; $LR = \frac{2}{2} = LR = 1$



Solucionario

c) $16x^2 + 4y^2 + 32x + 16y - 32 = 0$

$(16x^2 + 32x) + (4y^2 + 16y) = 32$

$16(x^2 + 2x) + 4(y^2 + 4y) = 32$

$16(x^2 + 2x + 1) + 4(y^2 + 4y + 4) = 32 + 16 + 16$

$16(x + 1)^2 + 4(y + 2)^2 = 64$

$\frac{16(x+1)^2}{64} + \frac{4(y+3)^2}{64} = \frac{64}{64}$

$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$

Elipse de lado mayor paralelo al eje y

$a = 4$; $b = 2$; $c = \sqrt{a^2 - b^2}$; $c = \sqrt{4^2 - 2^2}$; $c = \sqrt{12}$

Centro: (h, k) ; $(-1, -3)$

Vértices: $(h, k + a)$; $(-1, +1)$

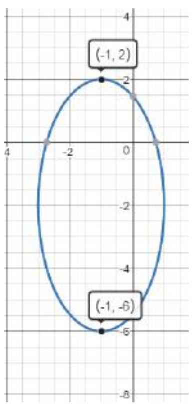
$(h, k - a)$; $(-1, -7)$

Focos: $(h, k + c)$; $(-1, -3 + \sqrt{12})$

$(h, k - c)$; $(-1, -3 - \sqrt{12})$

Excentricidad $e = \frac{c}{a}$; $e = \frac{\sqrt{12}}{4}$, $e = \frac{2\sqrt{3}}{4}$

Lado recto $LR = \frac{2b^2}{a}$; $LR = \frac{2(2)^2}{4}$; $LR = 2$



Página 180

Recordamos que, para obtener la ecuación canónica, hay que igualar las distancias que se obtienen desde un punto de la parábola $P(x, y)$ al foco $(h; k+p)$ y a la directriz $L(x; k-p)$. Así, tenemos que:

$d(P, L) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ $\quad$ $d(P, F) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$d(P, L) = \sqrt{(x - x)^2 + (k - p - y)^2}$ $\quad$ $d(P, F) = \sqrt{(h - x)^2 + (k + p + y)^2}$

$d(P, L) = k - p - y$

Igualamos distancias y resolvemos

$$(k - p - y)^2 = \left(\sqrt{(h - x)^2 + (k + p + y)^2}\right)^2$$

$$k^2 + p^2 + y^2 - 2kp - 2ky - 2py = h^2 - 2hx + x^2 + k^2 + p^2 + y^2 + 2kp - 2ky - 2py$$

$$x^2 - 2hx + h^2 = 4py - 4kp$$

$(x - h)^2 = 4p(y - k)$ ecuación canónica

Ejemplo 18

Determinemos la ecuación de la parábola que cumple con las condiciones dadas: vértice (-3,-2) y ecuación de la directriz es $y - 3 = 0$.

Solución: La ecuación de la directriz es $y = k - p$, y disponemos del dato $y - 3 = 0$, luego, se concluye que $3 = k - p$, pero, según el vértice $k = -2$ entonces despejamos p.
$3 = k - p$; $3 = -2 - p$ donde $-p = 5$ entonces $p = -5$
Así, con el valor de p y las coordenadas del vértice, reemplazamos en la ecuación:
$(x - h)^2 = 4p(y - k)$; $(x + 3)^2 = 4(-5)(y + 2)$; $(x + 3)^2 = -20(y + 2)$

Ejemplo 19

Hallemos los elementos de la parábola que corresponde a la siguiente ecuación $(y - 4)^2 = 8(x + 2)$, luego realicemos la representación gráfica.
Datos: $(y - 4)^2 = 8(x + 2)$ V= ? F= ? directriz = ? eje focal = ? LR = ?

Solución:
Comparamos con la ecuación general $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, por lo que:
$4p = 8 \rightarrow p = 2$
- Vértice $(-2, 4)$
- Coordenadas del foco $(0, 4)$
- Ecuación de la directriz $x = -4$
- Ecuación del eje focal $y = 4$
- Longitud del lado recto $LR = 8$
- Como $p > 0$, las ramas de la parábola abren hacia arriba.

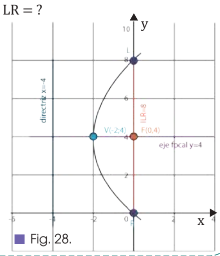


Fig. 28.

Actividades

17. **Representa** gráficamente las parábolas.
a. $(x - 3)^2 = -3(y + 4)$ $\quad$ b. $y^2 = -8(y + 3)$ $\quad$ c. $x^2 = -\frac{1}{2}(y - 1)$

18. **Determina** la ecuación de la parábola cuyo vértice y foco sean $V(3, 4)$; $F(3, 6)$

180

Solucionario

a) Para facilitar el grafico determinaremos sus elementos. Es una parábola con eje de simetría

paralelo al eje y.

$$\text{Vértice: } (3, -4)$$

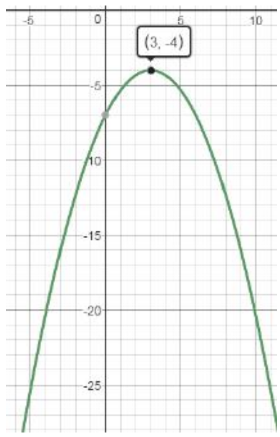
$$4p = -3$$

$$p = -\frac{3}{4}$$

Despejando P nos indica que se abre hacia abajo

$$\text{Foco:} \quad (h, k + p) \;\; ; \;\; (3, -\frac{19}{4})$$

$$\text{Directriz: } y = k - p \;\; ; \;\; y\frac{-13}{4}$$



b) $y^2 = -8(x + 3)$
Parábola con eje de simetría paralela al eje

$$\text{Vértice: } (-3,0)$$

$$4p = -8$$

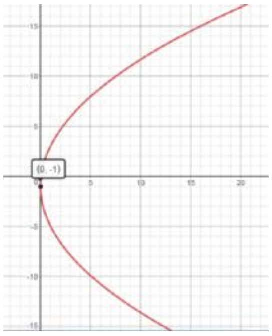
$$p = -2$$

Despejando P nos indica que se abre hacia

$$\text{Foco:} \quad (h + p, k) \;\; ; \;\; (-5,0)$$

Solucionario

Eje de simetría: $y = k$; $y = -1$



c) $x^2 + 4x + 20y - 96 = 0$

$x^2 + 4x = -20y + 96$

$x^2 + 4x + 4 = -20y + 96 + 4$

$(x + 2)^2 = -20(y + 5)$

$h: -2$; $k = -5$; $p = -5$

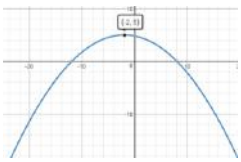
Vértice: (h, k) ; $(-2, -5)$

Foco: $(h, k + p)$; $(-2, -10)$

Directriz: $y = k - p$; $y = 0$

Longitud lado recto: $LR = 20$

Eje de simetría: $x = h$; $x = -2$



17. a) $(x - 3)^2 = 8(y - 2)$

$x^2 - 6x + 9 = 8y - 16$ Elevando el binomio al cuadrado

$x^2 - 6x - 8y + 9 + 16 = 0$ Ordenando según x

$x^2 - 6x - 8y + 25 = 0$

b) $(x + 4)^2 = -12y$

$x^2 + 8x + 16 = -12y$

$x^2 + 8x + 12y + 16 = 0$

c) $(y - 2)^2 = 24(x + 6)$

$y^2 - 4y + 4 = 24x + 144$

$y^2 - 4y - 24x + 4 - 144 = 0$

$y^2 - 4y - 24x - 140 = 0$

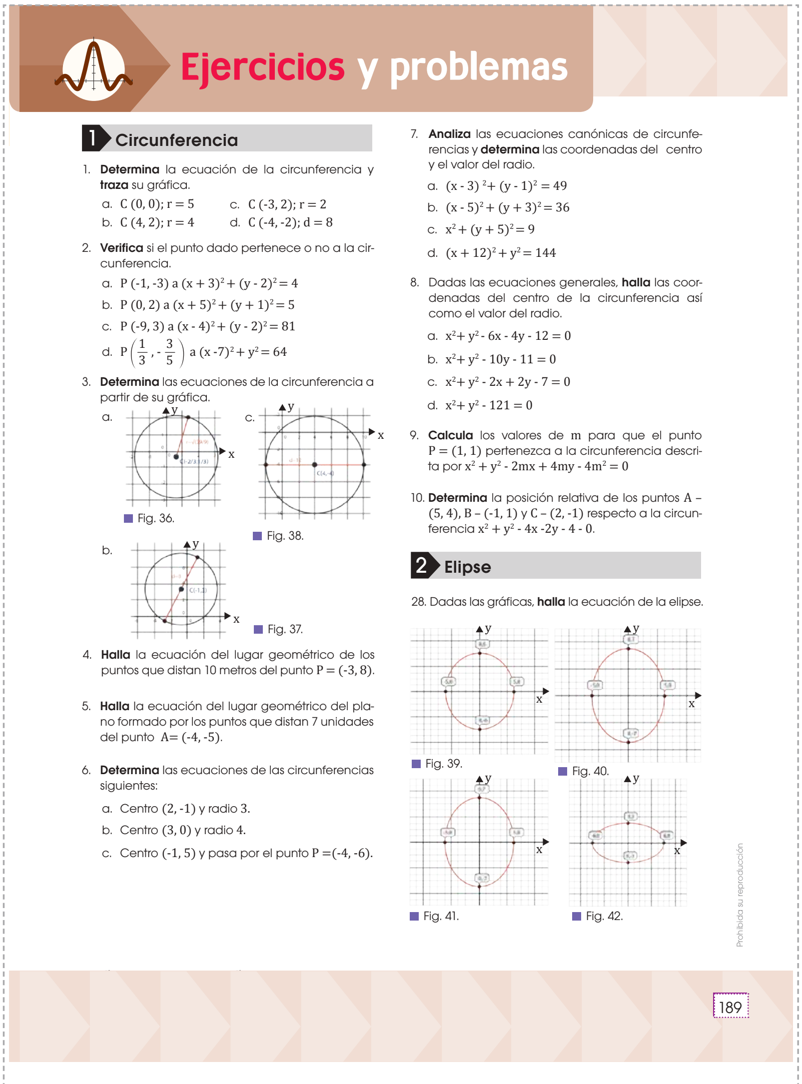
d) $(y + 5)^2 = 36(x - 1)$

$y^2 + 10y$+25=36x-36

$y^2 + 10y - 36x + 25 + 36 = 0$

$y^2 + 10y - 36x + 61 = 0$

Página 189



Ejercicios y problemas

1 Circunferencia

1. **Determina** la ecuación de la circunferencia y **traza** su gráfica.
   a. C (0, 0); r = 5
   b. C (4, 2); r = 4
   c. C (-3, 2); r = 2
   d. C (-4, -2); d = 8
2. **Verifica** si el punto dado pertenece o no a la circunferencia.
   a. P (-1, -3) a $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$
   b. P (0, 2) a $(x + 5)^2 + (y + 1)^2 = 5$
   c. P (-9, 3) a $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 81$
   d. P$\left(\frac{1}{3}, -\frac{3}{5}\right)$ a $(x - 7)^2 + y^2 = 64$
3. **Determina** las ecuaciones de la circunferencia a partir de su gráfica.
   a. Fig. 36.
   b. Fig. 37.
   c. Fig. 38.
4. **Halla** la ecuación del lugar geométrico de los puntos que distan 10 metros del punto P = (-3, 8).
5. **Halla** la ecuación del lugar geométrico del plano formado por los puntos que distan 7 unidades del punto A= (-4, -5).
6. **Determina** las ecuaciones de las circunferencias siguientes:
   a. Centro (2, -1) y radio 3.
   b. Centro (3, 0) y radio 4.
   c. Centro (-1, 5) y pasa por el punto P =(-4, -6).
7. **Analiza** las ecuaciones canónicas de circunferencias y **determina** las coordenadas del centro y el valor del radio.
   a. $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 49$
   b. $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 36$
   c. $x^2 + (y + 5)^2 = 9$
   d. $(x + 12)^2 + y^2 = 144$
8. Dadas las ecuaciones generales, **halla** las coordenadas del centro de la circunferencia así como el valor del radio.
   a. $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$
   b. $x^2 + y^2 - 10y - 11 = 0$
   c. $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$
   d. $x^2 + y^2 - 121 = 0$
9. **Calcula** los valores de m para que el punto P = (1, 1) pertenezca a la circunferencia descrita por $x^2 + y^2 - 2mx + 4my - 4m^2 = 0$
10. **Determina** la posición relativa de los puntos A – (5, 4), B – (-1, 1) y C – (2, -1) respecto a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 - 0$.

2 Elipse

28. Dadas las gráficas, **halla** la ecuación de la elipse.

Fig. 39. Fig. 40. Fig. 41. Fig. 42.

Solucionario

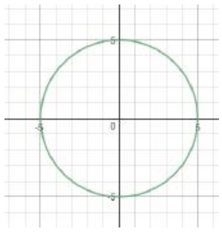
Circunferencia

18. Ecuación de la circunferencia

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

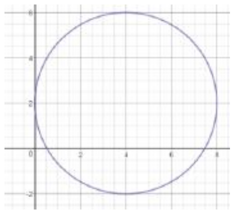
a) $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 5^2$

$x^2 + y^2 = 25$



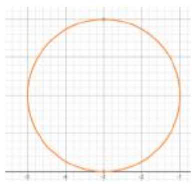
b) $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4^2$

$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 16$



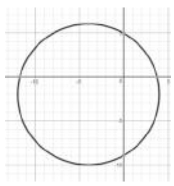
c) $(x-(-3))^2 + (y-2)^2 = 2^2$

$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 4$



d) $(x-(-4))^2 + (y-(-2))^2 = 8^2$

$(x+4)^2 + (y+2)^2 = 64$



Solucionario

19. Si el punto pertenece a la circunferencia debería verificar la ecuación

a) $((1-1)+3)^2+(-3-2)^2=4$

$2^2+(-5)^2=4$

$4+25=4$

$29\neq 4$ P no pertenece a la circunferencia

b) $(0+5)^2+(2+1)^2=5$

$25+9=5$

$34\neq 5$ P no pertenece a la circunferencia

c) $(-9-4)^2+(3-2)^2=81$

$169+1=81$

$170\neq 81$ P no pertenece a la circunferencia

d) $(\frac{1}{3}-7)^2+(-\frac{3}{5})^2=64$

$(-\frac{20}{2})^2+\frac{9}{25}=64$

$\frac{400}{9}+\frac{9}{25}=64$

$64\frac{181}{225}\neq 64$ P no pertenece a la circunferencia

20. Para determinar la ecuación se debe identificar el centro y el radio.

a) El centro tiene coordenadas $(-\frac{2}{3};\frac{1}{3})$ y el radio $r=\sqrt{\frac{59}{9}}$

Entonces la ecuación $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$$(x+\tfrac{2}{3})^2+\left(y-\tfrac{1}{3}\right)^2=\tfrac{59}{9}$$

b) $C=(-1{,}3)$

$d=8\quad y\quad r=\frac{d}{2}\quad ;\quad r=4$

La ecuación de la circunferencia es $(x+1)^2+(y-3)^2=16$

c) $C=(4,-4)$

$d=12\quad y\quad r=\frac{d}{2}\quad ;\quad r=6$

La ecuación de la circunferencia es $(x-4)^2+(y+4)^2=36$

Solucionario

El lugar geometrico de los puntos que distan 10 metros del punto P es la circunferencia de radio 10 y

centro P. Es decir,la circunferencia que tiene como ecuación: $(x + 3)^2 + (y - 8)^2 = 100$

El lugar geometrico del plano formado por los puntos que distan 7 unidades del punto A es la

circunferencia de radio 7 y centro A. Es decir, la circunferencia que tiene como ecuacion:

$(x + 4)^2 + (y + 5)^2 = 49$

Ecuación de la circunferencia: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r\ 2$.

a) (x - 2)2 + (y + 1)2 = 32 = 9

b) (x - 3)2 + y 2 = 42 = 16

c) (x + 1)2 + (y - 5)2 = 130, donde r es la distancia entre el

centro y P: r = d(C,P) = (−4 + 1)2 + (−6 − 5)2 = 130

24. Ecuación canónica de la circunferencia $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

a) $C = 3{,}1\ y\ r = 7$

b) $C = 5{,}-3\ y\ r = 6$

c) $C = 0{,}-5\ y\ r = 3$

d) $C = -12{,}0\ y\ r = 12$

25.

a) $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$

$(x^2 - 6x) + (y^2 - 4y) = 12$

$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) = 12 + 9 + 4$

$x - 3\ ^2 + y - 2\ ^2 = 25$

$C = 3{,}2\ ;\ r = 5$

b) $x^2 + y^2 - 10y - 11 = 0$

$x^2 + y^2 - 10y = 11$

$x^2 + (y^2 - 10y + 25) = 11 + 25$

$x^2 + y - 5\ ^2 = 36$

$C = 0{,}5\ ;\ r = 6$

c) $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$

$(x^2 - 2x) + (y^2 + 2y) = 7$

$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) = 7 + 1 + 1$

$x - 1^2 + y + 1^2 = 9$

$C = 1{,}-1\ ;\ r = 3$

d) $x^2 + y^2 - 121 = 0$

$x^2 + y^2 = 121$

$C = 0{,}0\ ;\ r = 11$

Sustituimos el punto P en la ecuación: 12 + 12 - 2m + 4m -

- 4m2 = 0 ⇒ m = 1, m = -1/2. Calculamos el centro y el radio

para estos dos valores:

m = 1 ⇒ x 2 + y 2 - 2x + 4y - 4 = 0

m = -2a ⇒ -2 = -2a ⇒ a = 1; n = -2b ⇒ 4 = -2b ⇒ b = -2 ⇒

⇒ C = (1, -2); p = a 2 + b 2 - r 2 ⇒ -4 = 12 + (-2)2 - r 2 ⇒ r = 3

m = -1/2 ⇒ x 2 + y 2 + x - 2y - 1 = 0

1 = -2a ⇒ a = -1/2; n = -2b ⇒ -2 = -2b ⇒ b = 1 ⇒

⇒ C = (-1/2, 1)

p = a 2 + b 2 - r 2 ⇒ -1 = (-1/2)2 + 12 - r 2 ⇒ r = 1,5

De las expresiones de m, n y p obtenemos:

-4 = -2a ⇒ a = 2; -2 = -2b ⇒ b = 1; -4 = 22 + 12 - r 2 ⇒ r = 3

Calculamos ahora las distancias entre los puntos A, B y C con el centro de la circunferencia P = (2, 1) y las comparamos con el radio r :

d(A,P) = (2 − 5)2 + (1 − 4)2 = 18 > 3 = r ⇒ El punto

A es exterior a la circunferencia.

d(B,P) = (2 + 1)2 + (1 − 1)2 = 3 = r ⇒ El punto B pertenece

a la circunferencia.

d(C,P) = (2 − 2)2 + (1 + 1)2 = 2 < 3 = r ⇒ El punto C es interior a la circunferencia.

Elipse

a) La elipse tiene su centro en el origen $a = 6\ y\ b = 5$ Su eje mayor es paralelo al eje y, por lo tanto la ecuación será:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1$$

b) La elipse tiene su centro en el origen $a = 7\ y\ b = 5$ Su eje mayor es paralelo al eje y, por lo tanto la ecuación será:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} = 1$$

c) La elipse tiene su centro en el origen $a = 6\ y\ b = 3$Su eje mayor es paralelo al eje x, por lo tanto la ecuación será:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Solucionario

31. De los focos concluimos que la elipse tiene su centro en el origen $c = 4$

Su eje mayor es paralelo al eje x

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad ; \quad a^2 = b^2 + 16$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Reemplazando a^2 en la ecuación

$$\frac{x^2}{b^{2-16}} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Reemplazamos el punto P en la ecuación

$$\frac{3^2}{b^{2+16}} + \frac{1^2}{b^2} = 1$$

Reemplazamos el punto P en la ecuación

Resolviendo la ecuación tenemos que:

$$b^2 = 8$$

Entonces $a^2 = 24$

La ecuación de la elipse será:

$$\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{8} = 1$$

a) Elipse con el eje mayor paralelo al eje x; comparamos con:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} 1$$

$a = 4 \quad ; \quad b = 3$

Centro: $(h, k) \;;\; (3, -2)$

Vértice: $(h - a, k) \;;\; (-1, -2)$

$(h + a, k) \;;\; (7, -2)$

Longitud Eje mayor $2a = 8$

Longitud Eje menor $2b = 9$

b) Elipse con el eje mayor paralelo al eje y; comparamos con:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} 1$$

$a = 10 \quad ; \quad b = 9$

Centro: $(h, k) \;;\; (-5, 3)$

Vértice: $(h, k - a) \;;\; (-5, -7)$

$(h, k + a) \;;\; (-5, 13)$

Longitud Eje mayor $2a = 20$

Longitud Eje menor $2b = 18$

Página 190

11. **Halla** los vértices, los focos y la excentricidad de siguientes elipses:

a. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ c. $5x^2 + 6y^2 = 30$

b. $9x^2 + 4y^2 = 36$ d. $x^2 = 4 - 2y^2$

12. **Halla** la ecuación de las elipses determinadas por las siguientes condiciones:

a. Focos $(\pm 4, 0)$. Vértices: $(0, \pm 5)$.

b. Longitud del eje mayor: 6. Longitud del eje menor: Focos en el eje X.

c. Focos: $(\pm 5, 0)$. Longitud del eje mayor: 12.

d. Extremos del eje menor: $(0, \pm 3)$. Distancia focal: 8.

e. Excentricidad: 0,8. Focos: $(\pm 1{,}5 , 0)$.

f. Corta el eje de ordenadas en los puntos $A = (0, 6)$; $A' = (0, -6)$ y la excentricidad es $e = \frac{1}{3}$

13. **Halla** la ecuación de la elipse que pasa por el punto $P = (3, 1)$ y tiene sus focos en $F = (4, 0)$ y $F' = (-4, 0)$

14. **Halla** la ecuación de las elipses que satisfacen las siguientes condiciones:

a. Foco $(7, 2)$. Vértice: $(9, 2)$. Centro: $(4, 2)$.

b. Centro: $(1, 4)$. Distancia focal: 16.

Eje mayor: Paralelo al eje OX y de longitud 20.

15. **Halla** el centro y los focos de las siguientes elipses de ecuación:

a. $\frac{(x - 3)^2}{64} + \frac{(y + 4)^2}{16} = 1$

b. $\frac{(x - 1)^2}{100} + \frac{(y + 4)^2}{36} = 1$

16. La Luna describe una órbita elíptica alrededor de la Tierra, que es uno de sus focos. Si la excentricidad de la órbita lunar es 0,84 y la distancia focal es de 369 200 km, **halla** la distancia máxima a la que se encuentra la Tierra de la Luna.

17. **Halla** las coordenadas del punto medio de la cuerda que determinan la recta $x + 2y - 1 = 0$ y la elipse $x^2 + 2y^2 = 3$.

18. **Analiza** las ecuaciones canónicas de elipses y determina las coordenadas del centro, vértice y las longitudes de los ejes mayor y menor.

a. $\frac{(x - 3)^2}{16} + \frac{(y + 2)^2}{9} = 1$

b. $\frac{(x + 5)^2}{81} + \frac{(y - 3)^2}{100} = 1$

19. Dadas las ecuaciones generales, **halla** la ecuación canónica y **determina** las coordenadas del centro de la elipse y los valores de a, b y c.

a. $9x^2 + 4y^2 - 36x - 8y + 4 = 0$

b. $9x^2 + 25y^2 - 18x + 100y = 116$

c. $100x^2 + 81y^2 - 486y - 7371 = 0$

3 Parábola

20. **Halla** el valor del parámetro p de la parábola $x^2 = -2py$ sabiendo que el punto $P = (-6, -1)$ está contenido en ella.

21. **Halla** el foco y la directriz de las siguientes parábolas:

a. $y^2 = -8x$ c. $y = 5x^2$

b. $x^2 = 12y$ d. $8x^2 + 12y = 0$

22. **Determina** en su forma reducida las ecuaciones de las siguientes parábolas:

a. $6y^2 - 12x = 0$ b. $15x^2 - = 42y$

A continuación, indica en cada caso el valor del parámetro p, las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz.

23. **Halla** la ecuación de las parábolas que satisfacen las siguientes condiciones:

a. Vértice: $(0, 0)$. Foco: $(-2, 0)$. Directriz: $x = 2$.

b. Vértice: $(0, 0)$. Directriz: $y = 6$.

c. Foco: $(0, -5)$. Directriz: $y = 5$.

d. Vértice: $(0, 0)$. Eje de simetría: eje 0Y. Pasa por el punto $P = (-3, 3)$.

37.

a) $9x^2 + 4y^2 - 36x - 8y + 4 = 0$

$(9x^2 - 36x) + (4y^2 - 8y) = -4$

$9(x^2 - 4x) + 4(y^2 - 2y) = -4$

$9(x^2 - 4x + 4) + 4(y^2 - 2y + 1) = -4 + 36 + 4$

$9(x-2)^2 + 4(y-1)^2 = 36$

$\frac{9(x-2)^2}{36} + \frac{4(y-1)^2}{36} = \frac{36}{36}$

$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

$C = (2,1)$

$a = 3$; $b = 2$; $c = \sqrt{3^2 - 2^2}$; $c = \sqrt{5}$

b) $9x^2 + 25y^2 - 18x + 100y = 116$

$(9x^2 + 18x) + (25y^2 + 100y) = 116$

$9(x^2 + 2x) + 25(y^2 + 4y) = 116$

$9(x^2 + 2x + 1) + 25(y^2 + 4y + 4) = 116 + 9 + 100$

$9(x+1)^2 + 25(y+2)^2 = 225$

$\frac{9(x+1)^2}{225} + \frac{25(y+2)^2}{225} = \frac{225}{225}$

$\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$

$C = (-1,-2)$

$a = 5$; $b = 3$; $c = \sqrt{5^2 - 3^2}$; $c = 4$

c) $100x^2 + 81y^2 - 486y - 7371 = 0$

$(100x^2) + (81y^2 - 486y) = 7371$

$100x^2 + 81(y^2 - 6y) = 7371$

$100x^2 + 81(y^2 - 6y + 9) = 7371 + 729$

$100x^2 + 81(y-3)^2 = 8100$

$\frac{100x^2}{8100} + \frac{81(y-3)^2}{8100} = \frac{8100}{8100}$

Hipérbolas

42.

a) Vértice: (h,k) ; $(4,2)$

Longitud lado recto:

$LR = |4p|$; $LR = 24$

b) Vértice: (h,k) ; $(-5,-3)$

Longitud lado recto:

$LR = |4p|$; $LR = 16$

c) Vértice: (h,k) ; $(3,0)$

Longitud lado recto:

$LR = |4p|$; $LR = 20$

d) Vértice: (h,k) ; $(0,-7)$

Longitud lado recto:

$LR = |4p|$; $LR = 36$

43. No hay ecuaciones

47. El grafico nos indica que es una elipse con centro en el origen y eje mayor paralelo al eje x. Su ecuación canónica es:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Como: $a=6$; $b=5$

Entonces la respuesta es $C = \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$

MÁS A FONDO

49. Para reconocer las ecuaciones de la cónicas deben están en forma canónica.

$$4x^2-60y^2+120y-45=0$$

$$4x^2-60(y^2-2y)=45$$

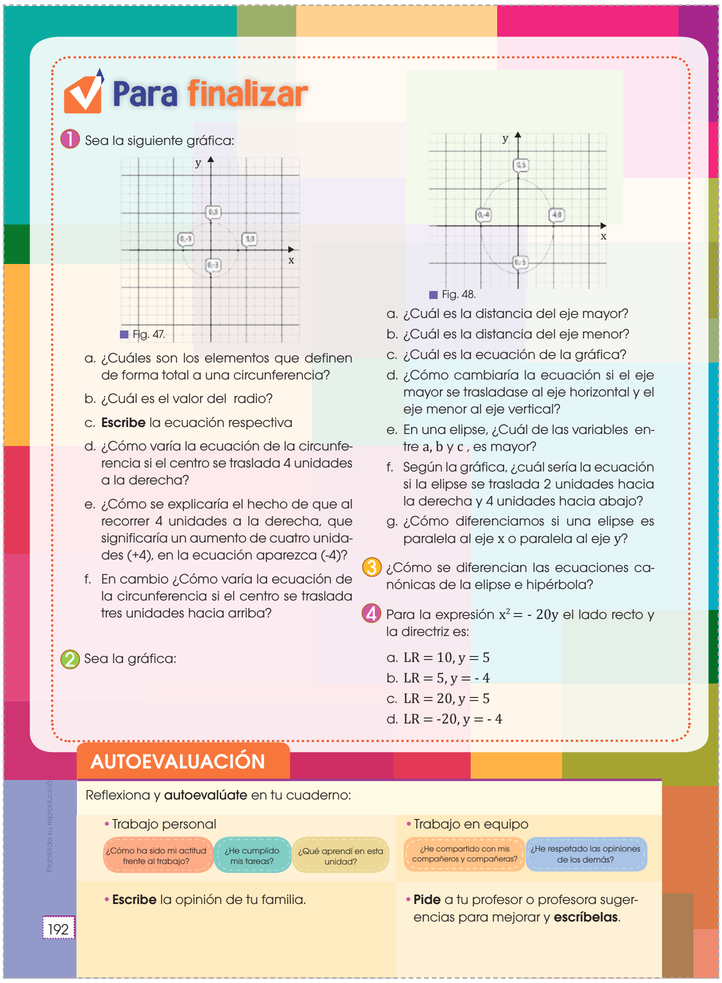
$$4x^2-60(y^2-2y+1)=45-60$$

$$4x^2-60(y-1)^2=-15$$

$$\frac{60\,(y-1)^2}{15}-\frac{4x^2}{15}=1$$

$$\frac{(y-1)^2}{\frac{1}{4}}-\frac{x^2}{\frac{15}{4}}=1$$ Hipérbola

Página 192



Para finalizar

1 Sea la siguiente gráfica:

Fig. 47.

a. ¿Cuáles son los elementos que definen de forma total a una circunferencia?

b. ¿Cuál es el valor del radio?

c. **Escribe** la ecuación respectiva

d. ¿Cómo varía la ecuación de la circunferencia si el centro se traslada 4 unidades a la derecha?

e. ¿Cómo se explicaría el hecho de que al recorrer 4 unidades a la derecha, que significaría un aumento de cuatro unidades (+4), en la ecuación aparezca (-4)?

f. En cambio ¿Cómo varía la ecuación de la circunferencia si el centro se traslada tres unidades hacia arriba?

2 Sea la gráfica:

Fig. 48.

a. ¿Cuál es la distancia del eje mayor?

b. ¿Cuál es la distancia del eje menor?

c. ¿Cuál es la ecuación de la gráfica?

d. ¿Cómo cambiaría la ecuación si el eje mayor se trasladase al eje horizontal y el eje menor al eje vertical?

e. En una elipse, ¿Cuál de las variables entre a, b y c , es mayor?

f. Según la gráfica, ¿cuál sería la ecuación si la elipse se traslada 2 unidades hacia la derecha y 4 unidades hacia abajo?

g. ¿Cómo diferenciamos si una elipse es paralela al eje x o paralela al eje y?

3 ¿Cómo se diferencian las ecuaciones canónicas de la elipse e hipérbola?

4 Para la expresión $x^2 = -20y$ el lado recto y la directriz es:

a. $LR = 10, y = 5$

b. $LR = 5, y = -4$

c. $LR = 20, y = 5$

d. $LR = -20, y = -4$

AUTOEVALUACIÓN

Reflexiona y **autoevalúate** en tu cuaderno:

- Trabajo personal
  - ¿Cómo ha sido mi actitud frente al trabajo?
  - ¿He cumplido mis tareas?
  - ¿Qué aprendí en esta unidad?
- Trabajo en equipo
  - ¿He compartido con mis compañeros y compañeras?
  - ¿He respetado las opiniones de los demás?
- **Escribe** la opinión de tu familia.
- **Pide** a tu profesor o profesora sugerencias para mejorar y **escríbelas**.

Solucionario

1. a) Su centro y el radio
   b) r=3
   c)$x^2 + y^2 = 9$
   d) Nuevo centro (4; 0) ; $(x-4)^2 + y^2 = 9$
   e) Ya que la ecuación de una circunferencia es $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$
   Si h=4 al reemplazar en la ecuación queda $(x-4)^2 + y^2 = 9$
   f) Nuevo centro (0; 3) ; $x^2 + (y-3)^2 = 9$

2. a) Longitud eje mayor =2a; Longitud eje mayor=10
   b) Longitud eje menor =2b; Longitud eje menor =8
   c) Elipse con eje mayor paralelo a Y y el centro en el origen $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$
   d) Seria una elipse con el eje mayor paralelo al eje x $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$
   e) a es el eje mayor, porque es la distancia del centro al vértice
   f) Nuevo centro (2;-4)
   $$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+4)^2}{25} = 1$$
   g) Cuando el valor más grande esta debajo de las x la elipse es paralela al eje contrario es paralela al eje de las Y

3. Se diferencian porque en la elipse términos se suman, mientras que e hipérbola los términos se restan

4. Lado recto =14pl, la ecuación can es $x^2 = 4px$, igual cuando
   4p=-20 ; p=-5

   Directriz y=-p ; y=-5

   $lr = |4p|$; Lr = 20
   Entonces la opción correcta es C

Solucionario

Zona Wifi

La papiroflexia y las cónicas

Respuesta sugerida:

Hipérbola:

http://links.edebe.com/u29nas

Elipse (método del jardinero):

— Mark Twain y el cometa Halley

Calculamos primero la semidistancia focal, c, a partir de la excentricidad, e, y el semieje mayor, a:

$e = c/a \Rightarrow c = e \cdot a = 0{,}967\ 990 \cdot 17{,}857\ 619 = 17{,}285\ 997 \mathrm{UA}$

Antenas parabólicas

Respuesta sugerida:

Los cables de los puentes colgantes tienen forma parabólica; la forma de los telescopios, detectores de radar y reflectores luminosos son parabólicos; algunos marcos fotográficos tienen forma elíptica.

Óvalos, ovoides y elipses

Respuesta sugerida:

Óvalo: Curva cerrada y plana formada por cuatro arcos de circunferencia tangentes entre sí e iguales dos a dos.

Ovoide: Curva cerrada y plana formada por cuatro arcos de circunferencia tangentes entre sí, dos iguales y dos desiguales.

Se pueden relacionar con una elipse.

Respuesta sugerida:

Coinciden en que son curvas cerradas y planas formadas por arcos de circunferencia tangentes entre sí. Se diferencian en que el óvalo está compuesto por un número par de arcos de circunferencia enlazados entre sí y simétricos respecto a sus ejes mayor y menor normales entre sí; y el ovoide está compuesto por dos arcos de igual radio, y otros dos de distinto radio y tiene un eje de simetría que contiene a los centros de los arcos desiguales

1 Halla la ecuación de la circunferencia:

a) Cuyo centro es $C = (2, -3)$ y pasa por el punto $P = (1, 4)$.

b) Que tiene por diámetro el segmento $\overline{MN}$ siendo $M = (-3, -3)$ y $N = (3, 3)$.

c) Que tiene por diámetro el segmento $\overline{PQ}$ siendo $P = (-6, 6)$ y $Q = (2, 0)$.

d) Que tiene su centro en el punto de intersección de las rectas $2x + 5y = 10$ y $x - 8y = 26$ y su radio es 2.

Sol.: a) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 50$;
b) $x^2 + y^2 = 18$;
c) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$;
d) $(x-10)^2 + (y+2)^2 = 4$

2 Halla la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en la recta $x + 2y = 0$ y pasa por los puntos $P = (4, 3)$ y $Q = (0, 1)$.

Sol.: a) $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 25$

3 Halla la ecuación de la circunferencia de radio 4 y concéntrica a la circunferencia:

$$x^2 + y^2 + 2x + 10y + 17 = 0$$

Sol.: $(x+1)^2 + (y+5)^2 = 16$

4 Halla las posiciones relativas de las circunferencias y rectas siguientes:

a) $C\colon x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ y $r\colon 2x - y - 4 = 0$.

b) $C\colon x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2 = 0$ y

$r\colon 2x + y - 3 = 0$.

5 Determina las coordenadas de los focos y de los vértices, así como la excentricidad de las siguientes elipses:

a) $\dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y-3)^2}{9} = 1$ b) $2x^2 + y^2 = 4$

Sol.: a) $F = (0, \pm\sqrt{5})$, $A = (0, \pm 3)$, $B = (\pm 2, 0)$, $e = \sqrt{5}/3$;
b) $F = (0, \pm\sqrt{2})$, $A(0, \pm 2)$, $B = (\pm\sqrt{2}, 0)$, $e = \sqrt{2}/2$

6 Escribe las ecuaciones de las hipérbolas que cumplen las siguientes características:

a) Centro: $C = (-3, 0)$. Foco: $F = (2, 0)$. $e = 5/4$.

b) Vértices: $A = (6, 2)$, $A' = (-2, 2)$. Distancia focal: 10.

Sol.: a) $\dfrac{(x+3)^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$;
b) $\dfrac{(x-2)^2}{16} - \dfrac{(y-2)^2}{9} = 1$

7 Determina las coordenadas del centro, de los focos, de los vértices y la excentricidad de la hipérbola que tiene por ecuación:

$$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1$$

Sol.: $C = (1, 3)$, $F = (1 \pm \sqrt{13}, 3)$ $A = (4, 3)$,
$A' = (-2, 3)$, $e = \sqrt{13}/3$

8 Escribe las ecuaciones que corresponden a las parábolas que cumplen las siguientes propiedades:

a) Vértice: $V = (2, -2)$. Directriz: $y = -5$.

b) Foco: $F = (6, 1)$. Vértice: $V = (2, 1)$.

Sol.: a) $(x-2)^2 = 12(y+2)$; b) $(y-1)^2 = 16(x-2)$

9 Halla la intersección, en caso de que exista, de la parábola que tiene por ecuación $y^2 = 9x$ con la hipérbola $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$.

Sol.: $A = (16{,}94, -12{,}35)$, $B = (16{,}94, 12{,}35)$

10 Clasifica las siguientes cónicas justificando en cada caso tu respuesta:

a) $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$

b) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$

c) $y = 3x^2$

A continuación, halla los elementos que definen a cada una de ellas.

11 Durante un partido de fútbol, un jugador chuta a portería para marcar un gol.

Observamos que la pelota sigue una trayectoria parabólica de ecuación:

$$(x-11)^2 = -24\left(y - \frac{121}{24}\right)$$

en la que x indica el desplazamiento horizontal e y el desplazamiento vertical. Ambas distancias están expresadas en metros.

a) ¿Qué altura máxima alcanzará la trayectoria de la pelota?

b) ¿A qué distancia del jugador volverá a tocar el suelo?

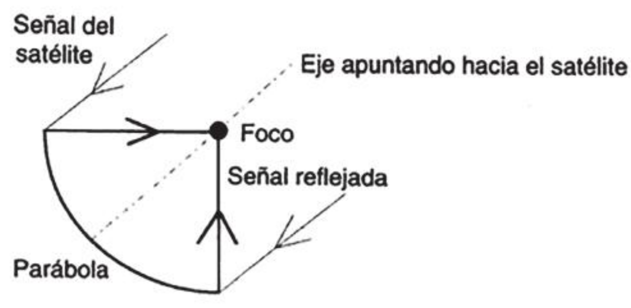
c) Si la pelota se dirige a la portería, que está situada a 20 metros del jugador, ¿entrará o pasará por encima del travesaño situado a una altura de 2,40 metros?

Sol.: a) 121/24 m; b) 22 m

Prohibida su reproducción

179

Una de las aplicaciones de las ecuaciones cónicas más usadas, es la de las antenas parabólicas, útiles en la Ingeniería de Telecomunicaciones, por medio ellas podemos enviar información a grandes distancia, triangulando satélites. Así captamos señales de televisión , radio y también señales del espacio, que los astrofísicos usan como recurso fundamental para la observación del universo.

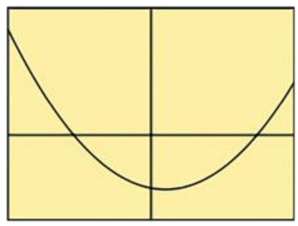


http://goo.gl/YSrG6l

La curva usada en esta imagen es la de una parábola, si la dibujas en un plano cartesiano, obtendrás una ecuación de segundo grado, de la forma:

Ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0$$



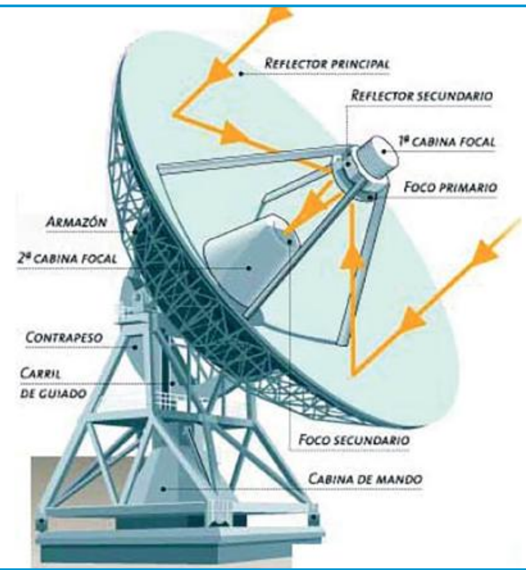
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

https://goo.gl/5DfIDy

Como puedes observar, la radiación electromagnética, rebota en el plato de la antena con forma parabólica y se concentra en el foco para mejorar la recepción de estas señales.

Actualmente el rediotelescopio más grande del mundo se terminó de construir en el 2016 en China

http://goo.gl/3ZXNPX



http://goo.gl/1G9lWz

180

Solucionario

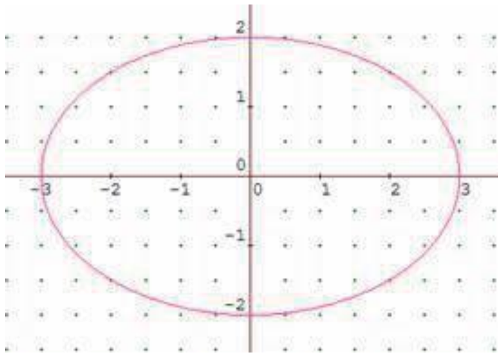
1. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene:

a) el centro en el punto (2, 5) y el radio es igual a 7.

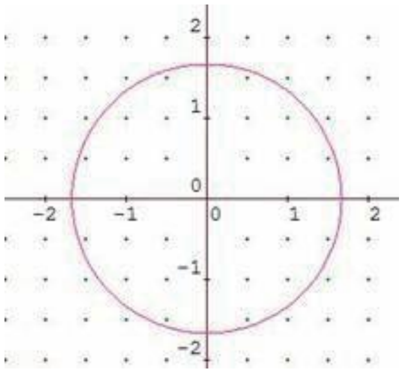
b) un diámetro con extremos los puntos (8, -2) y (2, 6).

2. Determina las ecuaciones que representa a las siguientes cónicas

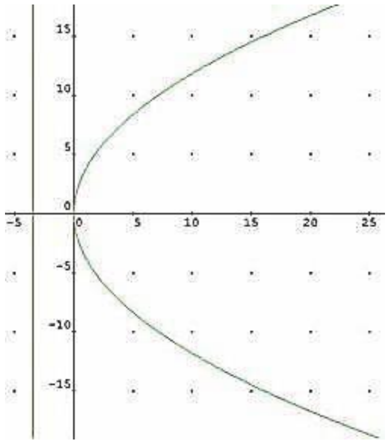
a.



b.



c.



Prohibida su reproducción

181

Solucionario

a) La ecuación de la circunferencia de centro (a, b) y radio r es $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r$.

Así, la ecuación de la circunferencia pedida es $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 49$.

Realizando operaciones queda $x^2 + y^2 - 4x - 10y - 20 = 0$.

b) El centro de la circunferencia es el punto medio del diámetro de extremos (8, -2) y (2, 6), es decir, $\left(\frac{8+2}{2}, \frac{-2+6}{2}\right) = (5, 2)$

El radio es la distancia del centro a un punto cualquiera de la circunferencia, por ejemplo al (8, -2), es decir, $r = d((8, -2), (5, 2)) = \sqrt{(8-5)^2+(-2-2)^2} = \sqrt{9+16} = 5$.

Por tanto, la ecuación de la circunferencia es $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 25$ y realizando operaciones

$$x^2 + y^2 - 10x - 4y + 4 = 0.$$

a. En la gráfica observamos una elipse con eje mayor paralelo al eje x, su semieje ma y su semieje menor es 2, por lo tanto la ecuación de la elipse será

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

b. En al gráfica se observa una circunferencia con centro en el origen y de radio $\frac{3}{2}$, po la ecuación de la circunferencia es:

$$x^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$

c. En la gráfica observamos una parábola con eje focal en el eje x y vértice en el orig valor de p es igual a 5, por lo que la ecuación de la parábola será:

$$y^2 = 20\,x$$

Prohibida su reproducción

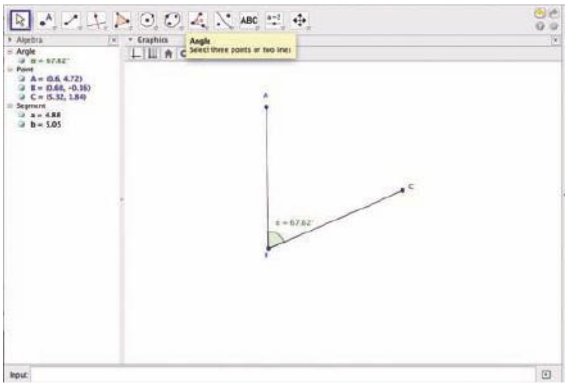
182

Solucionario

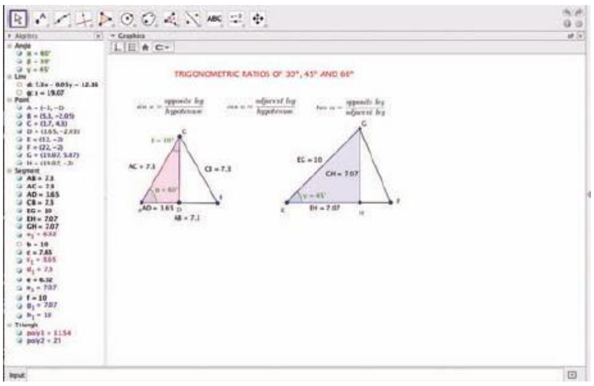
GeoGebra permite tratar la trigonometría de una forma dinámica. Podemos utilizar las pantallas de **Vista Algebraica *(Algebra)*** y **Vista Gráfica *(Graphics)*.** Además, con la opción **Deslizador *(Slider)*** es posible obtener distintos valores de un ángulo para determinar los valores de sus razones trigonométricas.

Trigonometría

La amplitud de un ángulo (en sentido antihorario; es decir, *C, B, A*) puede obtenerse a partir de tres puntos que determinan dos rectas en el plano. Podemos utilizar el icono para dibujar los puntos y para marcar los segmentos. Al mover los puntos con se observa que el valor del ángulo va variando según la nueva amplitud.



En esta imagen se muestran las razones trigonométricas de 30°, 45° y 60°. Al mover los puntos *A, B* y *D, G* de cada triángulo se puede observar que el valor de las razones trigonométricas no varía, aunque cambie el tamaño del triángulo.



Para determinar las razones trigonométricas, se sigue este proceso:

— Dibujar dos puntos, en este caso, *A, B* y *E, F*.

— Dibujar el tercer punto con la amplitud del ángulo que se desee.

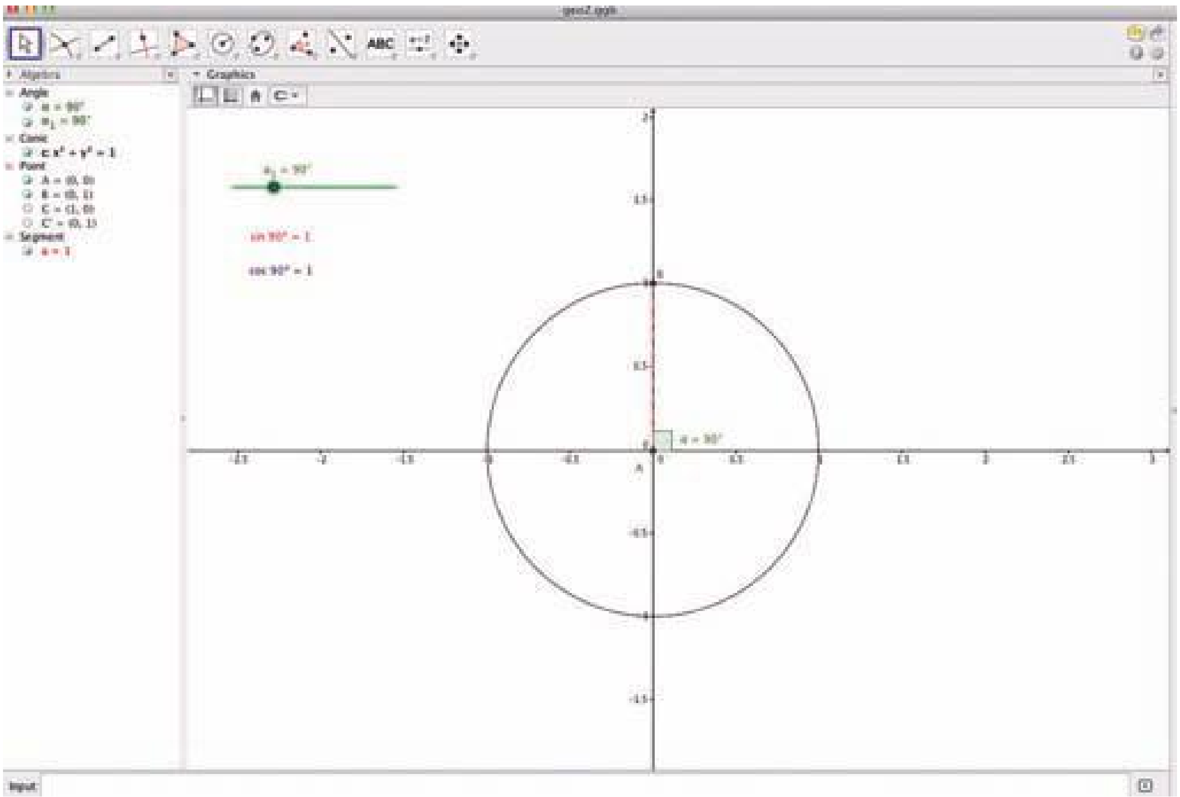
— Unir los tres puntos para obtener el triángulo deseado.

— Trazar la perpendicular desde el punto *C* o *G* al lado opuesto del triángulo para conseguir un triángulo rectángulo.

— Determinar el punto de intersección de dicha perpendicular con el lado del triángulo.

— Determinar el valor de la longitud de los lados.

Para estudiar las razones del ángulo de 90°, puede utilizarse la circunferencia goniométrica. Al mover el deslizador se obtienen las razones trigonométricas de los ángulos hasta 360°.



1. ¿Qué es una Cónica?

2. ¿Cuál es la ecuación general de las cónicas?

3. ¿Cuál es el lugar geométrico de todos los puntos que se encuentran a la misma distancia de una recta fija y un punto fijo llamado foco?

4. Ecuación cónica que se usa para modelar los platos de las antenas de tv

5. Ecuación cónica que incluye dos lugares geométricos llamados focos

6. Ecuación cuadrática de dos variables en la que ambos cuadrados tienen signo desigual

7. ¿Cómo identificas si una elipse tiene su eje mayor paralelo al eje x o paralelo al eje de las y?

8. ¿Existe diferencia entre las excentricidades de la elipse y de la hipérbola?

9. ¿Qué es el lado recto de una cónica?

10. ¿Qué representa la excentricidad?

1. Las cónicas son curvas planas obtenidas mediante la intersección de un cono con un plano.

2. La ecuación general de las cónicas es:
$\mathrm{Ax2} + \mathrm{Bxy} + \mathrm{Cy2} + \mathrm{Dx} + \mathrm{Ey} + \mathrm{F} = 0$

3. Los puntos situados a igual distancia de recta y foco forman una parábola.

4. Las llaman antenas parabólicas porque la cónica que forman es una parábolas.

5. Las figuras que se definen mediante dos focos son la elipse y la hipérbola. En el primer caso

es constante la suma de las distancias a los focos y en el segundo la diferencia.

6. La hipérbola es aquella que tiene variables al cuadrado de signo opuesto

7. Por el valor al cual se divide cada variable, si el mayor valor que divide está bajo la variable

X la elipse tiene su eje mayor paralelo al eje de las X, caso contrario será paralelo al eje de las Y.

8. La excentricidad de una elipse siempre es menor que 1, mientras que de la hipérbola siempre será mayor que 1

9. El lado recto es una cuerda que pasa por el foco y es perpendicular al eje focal de una cónica

10. La excentricidad ε, es un parámetro que determina el grado de desviación de una sección cónica con respecto a una circunferencia

CICLO DEL APRENDIZAJE

¿Cómo dinamizo el aula?

Experiencia

Activación de conocimientos previos a través de preguntas sobre círculo, circunferencia, óvalos y parábolas?

Identificar cónicas desde una sección giratoria y su intersección con una plano Escritura de la ecuación general de las cónicas. Uso de Tic´s para graficar cónicas. Comparación de ecuaciones canónicas de las diferentes cónicas.

Ejercicios de graficación de cónicas. Identificación de los elementos de las cónicas.

Conceptualización

Transformación de cónicas de su forma normal a su forma canónica.

Identificación de sus vértices, focos, directirzes, longitudes de lado recto.

Empleo de TIC´s para graficar cónicas y definir los elementos necesarios para su interpretación.

Aplicación

¿Planteamiento y resolución de problemas sobre cónicas

Reconocer cónicas a partir de su ecuación general. Transformación de

cónicas de su forma general a su forma canónica.

Graficar cónicas a partir de los elementos sin ayuda de graficadores ni tablas de datos.

Cálculo de longitudes de lado recto y excentricidad

Reflexión

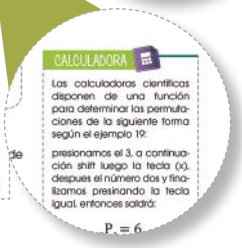
¿qué diferencia el conjunto de los números reales del resto de conjuntod estudiados?

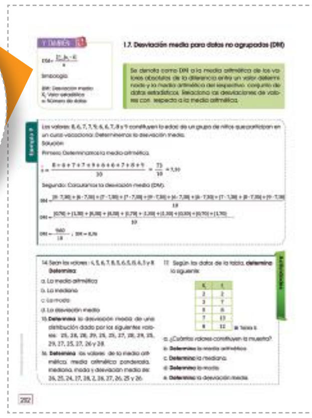
Identificación de las propiedades de los logaritmos que se pueden aplicar en cada ejercicio o problema.

Reflexión y análisis sobre la aplicación de las propiedades de los logaritmos y la relación con la potenciación de números reales

RECURSOS PARA FOMENTAR EL INGENIO EN EL AULA

Estadística y Probabilidad





UNIDAD 6


6
Estadística y Probabilidad

CONTENIDOS:

1. La estadística
   1.1. La recolección de datos y su interpretación
   1.2. Tabla de frecuencia para datos no agrupados
   1.3. Medidas de tendencia central para datos no agrupados
   1.4. Media aritmética
   1.5. Mediana
   1.6. Moda
   1.7. Desviación media para datos no agrupados (DM)
   1.8. La Varianza para datos no agrupados (σ2)
   1.9. Desviación típica para datos no agrupados (σ)
   1.10. Medidas de tendencia central para datos agrupados
   1.11. Media aritmética para datos agrupados
   1.12. Mediana para datos agrupados (Me)
   1.13. Moda para datos agrupados (Mo)
2. Experimentos aleatorios
   2.1. Espacio muestral
   2.2. Operaciones con sucesos
   2.3. Probabilidad
   2.4. Probabilidad condicionada
   2.5. Teorema de Bayes

194

Noticias

Baja el precio del suelo urbano un 11,5 % y las ventas, un 22 %

En el primer trimestre del año 2013, las ventas de pisos bajaron un 22 %, y el precio del metro cuadrado bajó un 11,5 % en comparación con el año anterior. En las poblaciones más habitadas el precio del metro cuadrado ha disminuido un poco más, llegando al 20 %.

El País, 18-6-2013.

Web

En la siguiente web puedes encontrar todo tipo de datos y encuestas. También hay juegos y un poco de historia, que te ayudarán con la estadística:

http://www.ine.es/explica/explica.htm

Esta otra página te servirá como apoyo durante estos temas. En ella podrás repasar la teoría y dispondrás de una evaluación al final:

http://links.edebe.com/zkbk

Películas

Ciudad mágica, de William A. Wellman (1947).

Una empresa que se dedica a elaborar sondeos y busca una ciudad en la que la opinión de cuyos habitantes sea representativa de la de todo el país.

EN CONTEXTO

Observa el gráfico que encontrarás en el siguiente enlace y **contesta** razonadamente a las preguntas:
http://links.edebe.com/ixn

a. ¿Puedes describir la trayectoria del gráfico?
b. ¿Podrías predecir lo que va próximas cuatrimestres? a ocurrir en los
c. ¿Te podrías fiar de esta predicción?
   Busca otros gráficos e intenta predecir lo que va a suceder. ¿Qué ocurre en la realidad?

195

Eje temático	Contenidos	
Estadística y Probabilidad	Elementos del plano	1. La recolección de datos y su interpretación .... página 197
		2. Tabla de frecuencia para datos no agrupados .... página 198
		3. Medidas de tendencia central para datos no agrupados.... página 199
		4. Media aritmética .... página 199
		5. Mediana .... página 200
		6. Moda .... página 201
		7.Desviación estándar .... página 202
		8. Varianza .... página 203
		9. Desviación típica .... página 204
		10. Medidas de tendencia central para datos agrupados........ página 207
		12. Media aritmética .... página 207
		13. Mediana .... página 208
		14. Moda .... página 209
	Probabilidad	Experimentos aleatorios .... página 210
		Operaciones con suceso .... página 211
		Probabilidad........ página 212
		Probabilidad condicionada .... página 214
		Teorema de Bayes .... página 215

Criterio de evaluación

- Emplea la estadística descriptiva para resumir, organizar, graficar e interpretar datos agrupados y no agrupados.
- Emplea técnicas de conteo y teoría de probabilidades para calcular la posibilidad de que un determinado evento ocurra; identifica variables aleatorias; resuelve problemas con o sin TIC; contrasta los procesos, y discute sus resultados.

Elementos del perfil de salida a los que se contribuye

- Actuamos con ética, generosidad, integridad, coherencia y honestidad en todos nuestros actos.
- Tenemos iniciativas creativas, actuamos con pasión, mente abierta y visión de futuro; asumimos liderazgos auténticos,procedemos con pro actividad y, responsabilidad en la toma de decisiones y estamos preparados para enfrentar los riesgos que el emprendimiento conlleva
- Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos e información posibles.
- Sabemos comunicarnos de manera clara en nuestra lengua y en otras, utilizamos varios lenguajes como el numérico, el digital, el artístico y el corporal; asumimos con responsabilidad nuestros discursos.

Objetivos generales del area que se evaluan

- Producir, comunicar y generalizar información, de manera escrita, verbal, simbólica, gráfica y/o tecnológica, mediante la aplicación de conocimientos matemáticos y el manejo organizado, responsable y honesto de las fuentes de datos, para así comprender otras disciplinas, entender las necesidades y potencialidades de nuestro país, y tomar decisiones con responsabilidad social.
- Valorar el empleo de las TIC para realizar cálculos y resolver, de manera razonada y crítica, problemas de la realidad nacional, argumentando la pertinencia de los métodos utilizados y juzgando la validez de los resultados.
- Desarrollar la curiosidad y la creatividad a través del uso de herramientas matemáticas al momento de enfrentar y solucionar problemas de la realidad nacional, demostrando actitudes de orden, perseverancia y capacidades de investigación.
- Proponer soluciones creativas a situaciones concretas de la realidad nacional y mundial mediante la aplicación de las operaciones básicas de los diferentes conjuntos numéricos, y el uso de modelos funcionales, algoritmos apropiados, estrategias y métodos formales y no formales de razonamiento matemático, que lleven a juzgar con responsabilidad la validez de procedimientos y los resultados en un contexto.

Indicadores para la evaluación del criterio

- Calcula, con y sin apoyo de las TIC, las medidas de centralización y dispersión para datos agrupados y no agrupados; representa la información en gráficos estadísticos apropiados y los interpreta, juzgando su validez.
- Analiza, interpreta información y emite conclusiones a partir del análisis de parámetros estadísticos (media, mediana, moda, rango) y de datos discretos provenientes del entorno, con el uso de medios tecnológicos
- Asigna probabilidades (gráficamente o con fracciones) a diferentes sucesos, en experiencias aleatorias, y resuelve situaciones cotidianas.

Básicos imprescindibles

Básicos deseables

Eje temático	Destrezas con criterio de desempeño
Aprendizajes básicos	Analizar y representar, en tablas de frecuencias, diagramas de barra, circulares y poligonales, datos discretos recolectados en el entorno e información publicada en medios de comunicación.
	Analizar y representar, en tablas de frecuencias, diagramas de barra, circulares y poligonales, datos discretos recolectados en el entorno e información publicada en medios de comunicación.
	Describir las experiencias y sucesos aleatorios a través del análisis de sus representaciones gráficas y el uso de la terminología adecuada.
	Emplear programas informáticos para tabular y representar datos discretos estadísticos obtenidos del entorno.
	Calcular la probabilidad de que un evento ocurra, gráficamente y con el uso de fracciones, en función de resolver problemas asociados a probabilidades de situaciones significativas.
Estadística y Probabilidad	Calcular e interpretar la media, mediana, moda, rango, varianza y desviación estándar para datos no agrupados y agrupados, con apoyo de las TIC.
	Resolver y plantear problemas de aplicación de las medidas de tendencia central y de dispersión para datos agrupados, con apoyo de las TIC.
	Juzgar la validez de las soluciones obtenidas en los problemas de aplicación de las medidas de tendencia central y de dispersión para datos agrupados dentro del contexto del problema, con apoyo de las TIC.
	Calcular e interpretar el coeficiente de variación de un conjunto de datos (agrupados y no agrupados).
	Reconocer los experimentos y eventos en un problema de texto, y aplicar el concepto de probabilidad y los axiomas de probabilidad en la resolución de problemas.
	Determinar la probabilidad empírica de un evento repitiendo el experimento aleatorio tantas veces como sea posible (50, 100... veces), con apoyo de las TIC.

<table>
<tr><td>LOGO INSTITUCIONAL</td><td colspan="3">NOMBRE DE LA INSTITUCIÓN</td><td colspan="4">AÑO LECTIVO</td></tr>
<tr><td colspan="8">PLAN DE UNIDAD TEMÁTICA</td></tr>
<tr><td colspan="8">1. DATOS INFORMATIVOS:</td></tr>
<tr><td>Docente:</td><td>Nombre del docente que ingresa la información</td><td>Área/asignatura:</td><td>MATEMÁTICA</td><td>Grado/Curso:</td><td>2° BACHILLERATO</td><td>Paralelo:</td><td></td></tr>
<tr><td>N.º de unidad de planificación:</td><td>6</td><td>Título de unidad de planificación:</td><td>ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD</td><td colspan="2">Objetivos específicos de la unidad de planificación:</td><td colspan="2">Producir, comunicar y generalizar información demanera escrita, verbal, simbólica, gráfica y/o tecnológica mediante la aplicación de conocimientos matemáticos y el manejo organizado, responsable y honesto de las fuentes de datos para comprender otras disciplinas, entender las necesidades y potencialidades de nuestro país y tomar decisiones con responsabilidad social.

Valorar sobre la base de un pensamiento crítico, creativo, reflexivo y lógico la vinculación de los conocimientos matemáticos
con los de otras disciplinas científicas y los saberes ancestrales para plantear soluciones a problemas de la realidad y contribuir al desarrollo del entorno social, natural y cultural.</td></tr>
<tr><td>PERÍODOS</td><td colspan="2">24</td><td colspan="2"></td><td>SEMANA DE INICIO:</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="8">2. PLANIFICACIÓN</td></tr>
<tr><td colspan="6">DESTREZAS CON CRITERIOS DE DESEMPEÑO A SER DESARROLLADAS:</td><td colspan="2">CRITERIOS DE EVALUACIÓN</td></tr>
<tr><td colspan="6">• Resolver y plantear problemas de aplicación de las medidas de tendencia central y de dispersión para datos agrupados con apoyo de las TIC.
• Juzgar la validez de las soluciones obtenidas en los problemas de aplicación de las medidas de tendencia central y de dispersión para datos agrupados dentro del contexto del problema, con apoyo de las TIC.
• Calcular e interpretar el coeficiente de variación de un conjunto de datos (agrupados y no agrupados).
• Reconocer los experimentos y eventos en un problema de texto y aplicar el concepto de probabilidad y los axiomas de probabilidad en la resolución de problemas.
• Determinar la probabilidad empírica de un evento repitiendo el experimento aleatorio tantas veces como sea posible (50, 100,... veces) con apoyo de las TIC.
• Realizar operaciones con sucesos: unión, intersección, diferencia y complemento, leyes de De Morgan en la resolución de problemas.
• Aplicar los métodos de conteo: permutaciones, combinaciones para determinar la probabilidad de eventos simples y a partir de ellos la probabilidad de eventos compuestos en la resolución de problemas.
• Reconocer experimentos en los que se requiere utilizar la probabilidad condicionada mediante el análisis de la dependencia de los eventos involucrados y calcular la probabilidad de un evento sujeto a varias condiciones aplicando el teorema de Bayes en la resolución de problemas.</td><td colspan="2">CE.M.5.9. Emplea la estadística descriptiva para resumir, organizar, graficar e interpretar datos agrupados y no agrupados.</td></tr>
</table>

• Reconocer variables aleatorias discretas cuyo recorrido es un conjunto discreto en ejemplos numéricos y experimentos y la distribución de probabilidad para una variable aleatoria discreta como una función real a partir del cálculo de probabilidades acumuladas definidas bajo ciertas condiciones dadas. • Calcular e interpretar la media, la varianza y la desviación estándar de una variable aleatoria discreta. • Juzgar la validez de las soluciones obtenidas en los problemas que involucren el trabajo con probabilidades y variables aleatorias discretas dentro del contexto del problema.	

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	RECURSOS	INDICADORES DE LOGRO	TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN
	- Texto - Cuaderno - Videos (sitios web) T	I.M.5.9.1. Calcula, con y sin apoyo de las TIC, las medidas de centralización y dispersión para datos agrupados y no agrupados; representa la información en gráficos estadísticos apropiados y Los interpreta, juzgando su validez. (J.2., I.3.)	CComprobar el desarrollo de las destrezas necesarias para la aplicación de la estadística descrptiva, medidas de tendencia central y de dispersión, para el análisis de datos agrupados y no agrupados. Además de calcular e interpretar el coeficiente de variación, determinar los cuantiles y deciles, y realizar sus representaciones gráficas.

ELEMENTOS DEL PERFIL DE SALIDA
J.2. Actuamos con ética, generosidad, integridad, coherencia y honestidad en todos nuestros actos. I.3. Sabemos comunicarnos de manera clara en nuestra lengua y en otras, utilizamos varios lenguajes como el numérico, el digital, el artístico y el corporal; asumimos con Responsabilidad nuestros discursos.

ELABORADO	REVISADO	APROBADO
Docente:	Director del área :	Vicerrector:
Firma:	Firma:	Firma:
Fecha:	Fecha:	Fecha:

CRÓNICA MATEMÁTICA

El nacimiento de la estadística y la probabilidad

Por referencias históricas se sabe que en el segundo milenio a. C. en China ya se elaboraban censos para saber cuánta población había en su territorio y cobrar impuestos.

Y aconteció en aquellos días, que se promulgó un edicto de parte de Augusto César, que todo el mundo fuese empadronado.

Este primer censo se hizo siendo Cirenio gobernador de Siria. E iban todos para ser empadronados, cada uno a su ciudad. (Lc, 2:1-2)

La cita del Evangelio se refiere al censo de población del imperio romano que se hizo en los primeros años de la era cristiana.

El primer texto que se considera de estadística matemática es *Observations upon the Bills of Mortality* (*Observaciones sobre las tasas de mortalidad,* 1662) de John Graunt (1620-1674), que trató de averiguar la esperanza de vida de los habitantes de unas zonas geográficas de Inglaterra, independientemente de la influencia que tuvieron las epidemias de peste de finales del siglo XVI y principios del XVII.

También desde muy antiguo se tiene constancia de la afición a los juegos de azar. Así, en el museo Hermitage de Moscú se pueden observar dados egipcios del siglo XVI a.C.

Sin embargo, no se formalizó el estudio de la probabilidad hasta el siglo XVII a raíz de la correspondencia mantenida entre los matemáticos Blaise Pascal (1623–1662) y Pierre de Fermat (1601–1665), a instancias de un problema propuesto por un noble aficionado a los juegos de azar, conocido como el caballero de Méré.

Demuestra tu ingenio

En un concurso de televisión, se presentan al concursante tres puertas. Dos de ellas no tienen nada detrás y la otra esconde un premio. El concursante elige una puerta y el presentador, antes de abrir la puerta escogida, para darle más emoción al juego abre otra puerta que no tiene nada detrás. Naturalmente, el presentador sabe dónde está el premio, así que siempre abrirá una puerta que no lo tiene. Tras abrir la puerta, pregunta al concursante si mantiene su elección o prefiere cambiarla. Mucha gente piensa que es pura cuestión del azar cambiar o no, y que ambas opciones proporcionan la misma probabilidad de obtener el premio o no. ¿Es mejor quedarse con la elección inicial o es mejor cambiar?

Si accedes a **http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_117_g_4_t_5.html?from=category_g_4_t_5.html**, encontrarás una actividad interactiva para simular el juego que te proporcionará la respuesta.

CICLO DEL APRENDIZAJE

¿Cómo dinamizo el aula?

Experiencia

Se presentan estudiosn estadísticso que sirvan como tema de partida sobre la importancia de la esadística

Manipulación de material con fotos y representación de distintos tipos de análisis estadístcos.

Resolución de problemas de aplicación de funciones en el ambito deportivo y social.

Conceptualización

Definición de variables estadísticas, medidas de dispersión, tablas de frecuencias, procedimientos, graficas y analisis de resultados.

Uso de hojas de cálculo que facilitan la representación gráfica y posterior interpretación de información

Reflexión

¿Qué podemos decir sobre la estadística y su aporte en la economía?

Identificación de medidas de tendencia central su aplicación en las finanzas y economía.

Reflexión y análisis sobre dichas aplicaciones

Aplicación

¿Por qué es importante calcular, analizar e interpretar las medidas de tendencias central y de dispersión de una variable estadística?

Planteamiento y resolución de problemas que apliquen medidas de dispersión y de tendencia central.

1. ¿Qué se entiende por estadística?

   La estadística, en general, es la ciencia que trata de la recopilación, organización, presentación, análisis e interpretación de datos numéricos con el fin de realizar una toma de decisiones más efectiva.

2. ¿En qué consiste una muestra?

   Es un subconjunto limitado extraído de una población con el objeto de reducir el campo de experiencias. Las propiedades que obtengamos se harán extensivas a toda la población.

3. ¿Qué se entiende por probabilidad?

   La probabilidad mide la frecuencia con la que se obtiene un resultado (o conjunto de resultados) al llevar a cabo un experimento aleatorio, del que se conocen todos los resultados posibles, bajo condiciones suficientemente estables. La teoría de la probabilidad se usa extensamente en áreas como la estadística, la física, la matemática, la ciencia y la filosofía para sacar conclusiones sobre la probabilidad de sucesos potenciales y la mecánica subyacente de sistemas complejos.

4. ¿En qué consiste una característica cualitativa?

   Los datos de características cualitativas son aquellos que no se pueden expresar numéricamente. Estos datos se deben convertir a valores numéricos antes de que se trabaje con ellos.

5. ¿Qué se entiende por una variable?

   Una variable es un elemento de una fórmula, proposición o algoritmo que puede adquirir o ser sustituido por un valor cualquiera (siempre dentro de su universo). Una variable es un símbolo que representa un elemento no especificado de un conjunto dado. Dicho conjunto es llamado conjunto universal de la variable, universo o dominio de la variable, y cada elemento del conjunto es un valor de la variable.

6. ¿Cuáles elementos se deben tomar en cuenta para construir una distribución de frecuencias?

   RANGO. Es una medida de dispersión que se obtiene como la diferencia entre el número mayor y el número menor de los datos. AMPLITUD TOTAL. Simplemente se obtiene sumándole 1 al rango. EL NÚMERO DE CLASES. Se determina a través de la fórmula de stuger, la cual es válida cuando el No de observaciones sea menor o igual a 500. Formula.

   VALOR DEL INTERVALO O AMPLITUD Se Obtiene por medio de la ecuación de dicta Vi = AT / Nc

7. ¿Qué se entiende por frecuencia absoluta y por frecuencia relativa en una distribución?

   Frecuencias absolutas: es el número de veces que aparece en la muestra dicho valor de la variable y se representa por fi.

   Frecuencias relativas: es el cociente entre la frecuencia absoluta y el tamaño de la muestra. La denotaremos por fri.

8. ¿Qué se entiende por azar aleatorio o estocástico?

   Dependiendo del ámbito al que se aplique. El ordenamiento estadístico es una forma de tratar matemáticamente la naturaleza y el hombre, como si fuesen datos aleatorios pero sin que lo sean necesariamente.

9. De cinco ejemplos concretos de uso de los porcentajes en su profesión.

   Cálculo de promedio de asistencia de los estudiantes, calcular notas, calcular inasistencia, mostrar el cálculo porcentual a una variable, determinar el porcentaje final semestral final, etc.

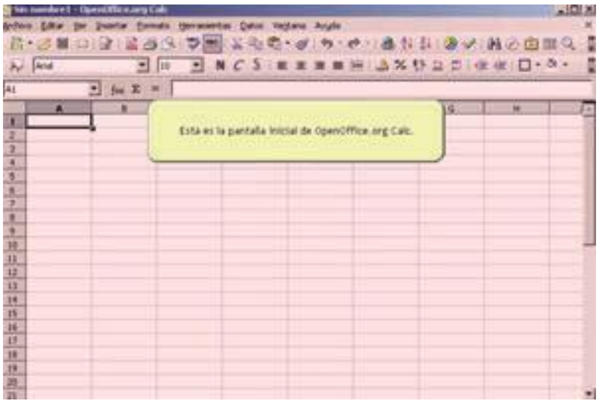
10. ¿Qué importancia tiene medir variabilidad para el análisis estadístico?

    Variabilidad o dispersión nos indican si esas puntuaciones o valores están próximas entre sí o si por el contrario están o muy dispersas.

    Una medida razonable de la variabilidad podría ser la amplitud o rango, que se obtiene restando el valor más bajo de un conjunto de observaciones del valor más alto.

La hoja de cálculo. Utilización en Estadística

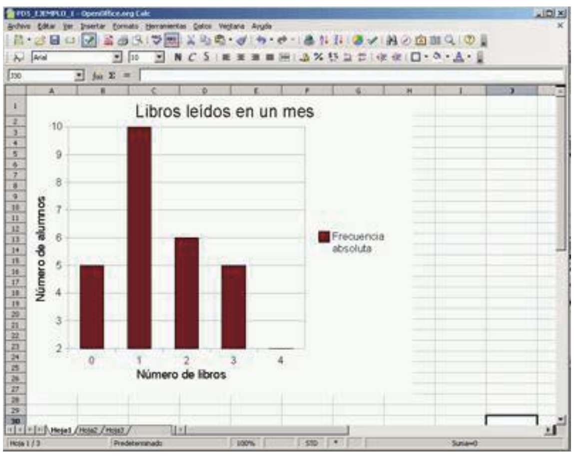
La Estadística es una materia que, aunque muy interesante, puede resultar algo tediosa por la cantidad de datos numéricos que debe manipular para hacer cálculos. Disponer de un instrumento como la hoja de cálculo OpenOffice.org Calc permite poder insistir en los conceptos más que en los cálculos. El uso de estos modelos en las clases puede organizarse de forma que su confección sea simultánea con su uso y el aprendizaje de los temas.



La hoja de cálculo es un recurso TIC con unas grandes posibilidades pedagógicas en Estadística (y en Matemáticas en general) porque:

- Educa al alumnado en el uso correcto de las fórmulas (necesidad de paréntesis, operadores en el orden correcto, etc.).
- Permite automatizar cálculos de forma sencilla e intuitiva.
- Permite interactuar con los gráficos estadísticos creados para cambiarlos, hacer pruebas, elegir el que más se adecue a la necesidad del momento, etc.

  Vas a conocer el uso de la hoja de cálculo como instrumento de manejo y representación de datos, además de cálculo con funciones matemáticas y representación de gráficos.



Orientación didáctica

La unidad nos introduce en el estudio de variables estadísticas y el cálculo de probabilidades, muestra la diferencia entre la población y muestra, es una guía en la elaboración de tablas de frecuencia y el cálculo de medidas de tendencia central de datos agrupados y no agrupados. La portada de la unidad nos muestra un panorama de desarrollo financiero, el cual se lo entiende en base al estudio de estadísticas y probabilidad. En el desarrollo de la unidad el estudiante entenderá ¿Qué son las medidas de tendencia central y medidas de dispersión? Las cuales colaboran en la toma de decisiones dentro de un desarrollo económico.

En importante que el estudiante pueda identificar la probabilidad de que un suceso exista ya que este conocimiento colabora en la toma de decisiones.

Como orientación metodológica el docente puede abordar la unidad con el apoyo de las TICs. Una herramienta que se sugiere es el manejo EXCEL y otras hojas de cálculo, las cuales ayudarían a los estudiantes a comprender, interpretar y calcular con mayor facilidad las medidas de tendencia central y dispersión.

Forme grupos de trabajo que busquen y analicen resultados estadísticos de temas importante de su entorno y las relacionen con los temas estudiados.

Para comprobar la probabilidad de que un evento suceda puede llevar una urna con bolas de distintos colores y pedir a sus alumnos las saquen aleatoriamente

En contexto

Respuesta abierta a modo de reflexión que puede servir como introducción a la estadística bidimensional. Las preguntas se pueden contestar observando el gráfico y analizando la noticia que se explica.

Página 195

Noticias

Bajo el precio del suelo urbano un 11,5 % y las ventas, un 22 %

En el primer trimestre del año 2013, las ventas de pisos bajaron un 22 %, y el precio del metro cuadrado bajó un 11,5 % en comparación con el año anterior. En las poblaciones más habitadas el precio del metro cuadrado ha disminuido un poco más, llegando al 20 %.

El País, 18-6-2013.

Web

En la siguiente web puedes encontrar todo tipo de datos y encuestas. También hay juegos y un poco de historia, que te ayudarán con la estadística:

http://www.ine.es/explica/explica.htm

Esta otra página te servirá como apoyo durante estos temas. En ella podrás repasar la teoría y dispondrás de una evaluación al final:

http://links.edebe.com/zkbk

Películas

Ciudad mágica, de William A. Wellman (1947).

Una empresa que se dedica a elaborar sondeos y busca una ciudad en la que la opinión de cuyos habitantes sea representativa de la de todo el país.

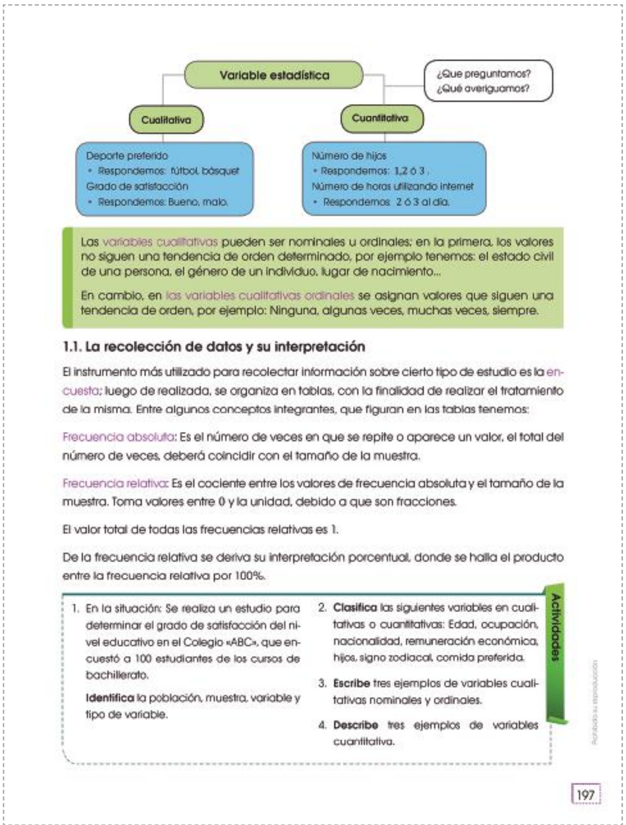
EN CONTEXTO

Observa el gráfico que encontrarás en el siguiente enlace y **contesta** razonadamente a las preguntas:
http://links.edebe.com/xn

a. ¿Puedes describir la trayectoria del gráfico?
b. ¿Podrías predecir lo que va próximos cuatrimestres? a ocurrir en los
c. ¿Te podrías fiar de esta predicción? Busca otros gráficos e intenta predecir lo que va a suceder. ¿Qué ocurre en la realidad?

195

Página 197



Variable estadística

¿Que preguntamos?
¿Qué averiguamos?

Cualitativa

Deporte preferido
- Respondemos: fútbol, básquet

Grado de satisfacción
- Respondemos: Bueno, malo.

Cuantitativa

Número de hijos
- Respondemos: 1,2 ó 3 .

Número de horas utilizando internet
- Respondemos: 2 ó 3 al día.

Las variables cualitativas pueden ser nominales u ordinales; en la primera, los valores no siguen una tendencia de orden determinado, por ejemplo tenemos: el estado civil de una persona, el género de un individuo, lugar de nacimiento...

En cambio, en las variables cualitativas ordinales se asignan valores que siguen una tendencia de orden, por ejemplo: Ninguna, algunas veces, muchas veces, siempre.

1.1. La recolección de datos y su interpretación

El instrumento más utilizado para recolectar información sobre cierto tipo de estudio es la encuesta; luego de realizada, se organiza en tablas, con la finalidad de realizar el tratamiento de la misma. Entre algunos conceptos integrantes, que figuran en las tablas tenemos:

Frecuencia absoluta: Es el número de veces en que se repite o aparece un valor, el total del número de veces, deberá coincidir con el tamaño de la muestra.

Frecuencia relativa: Es el cociente entre los valores de frecuencia absoluta y el tamaño de la muestra. Toma valores entre 0 y la unidad, debido a que son fracciones.

El valor total de todas las frecuencias relativas es 1.

De la frecuencia relativa se deriva su interpretación porcentual, donde se halla el producto entre la frecuencia relativa por 100%.

Actividades

1. En la situación: Se realiza un estudio para determinar el grado de satisfacción del nivel educativo en el Colegio «ABC», que encuestó a 100 estudiantes de los cursos de bachillerato.

   Identifica la población, muestra, variable y tipo de variable.

2. **Clasifica** las siguientes variables en cualitativas o cuantitativas: Edad, ocupación, nacionalidad, remuneración económica, hijos, signo zodiacal, comida preferida.

3. **Escribe** tres ejemplos de variables cualitativas nominales y ordinales.

4. **Describe** tres ejemplos de variables cuantitativa.

197

Solucionario

1. Población: Estudiantes del Colegio "ABC"

   Muestra: 100 estudiantes de bachillerato

   Variable: Grado de satisfacción del nivel educativo

   Tipo de variable: Cualitativa

2. Cualitativas: Ocupación, nacionalidad, sigo zodiacal, comida preferida

   Cuantitativas: Edad, remuneración económica, hijos

3. Nominales: Nombre, nacionalidad, estado civil

   Ordinales: Medallas de una prueba deportiva, clase social, grado de satisfacción.

4. Numero de hermanos, ingreso mensual, horas que utiliza internet.

Solucionario

5. $\bar{x} = \frac{(300)+250+450+230+235+125+450+750+800+230+650+1800}{12} = \frac{6270}{12} = 522{,}5$

125, 230, 230, 235, 250, $\boxed{300, 450}$ 450, 650, 750, 800, 1800

Como el número de datos es par $Me = \frac{300+450}{2} = 375$

6. $\bar{x} = \frac{\sum xi}{n}$; $\bar{x} = \frac{3{,}2+3{,}4+3{,}52+3{,}48+3{,}67+3{,}67+3{,}15+3{,}96+3{,}75+3{,}45}{9} = 3.51$

3,15; 3,2; 3,4; 3,45; 3,48; 3,52; 3,67; 3,75; 3,96

$Me = 3{,}48$

7. $Mo = 9{,}50$ Es el dato que no se repite

$\bar{x} = \frac{\sum xi}{n}$; $\bar{x} = \frac{9{,}75+9{,}5+9{,}5+9{,}25+9{,}5+9{,}75}{6} = 9{,}54$

Ordenamos los datos 9,25; 9,50; $\boxed{9{,}50;\ 9{,}50}$ 9,75; 9,75

$Me = 9{,}50$

Desviación Media

$$Dm = \frac{|9{,}75-9{,}54|+|9{,}50-9{,}54|+|9{,}50-9{,}54|+|9{,}25-9{,}54|+|9{,}50-9{,}54|+|9{,}75-9{,}54|}{6} = \frac{0{,}83}{6}$$

$Dm = 0{,}138$

Varianza

$$\sigma^2 = \frac{9{,}75^2+9{,}50^2+9{,}50^2+9{,}25^2+9{,}50^2+9{,}75^2}{6} = 9{,}54^2$$

$$\sigma^2 = \frac{546{,}44}{6} = 91{,}01$$

$$\sigma^2 = 91{,}12 - 91{,}0$$

$$\sigma^2 = 0{,}11$$

Desviación Típica

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

$$\sigma = \sqrt{0{,}11}$$

$$\sigma = 0{,}33$$

8. (Únicamente hay 19 datos)
Media Aritmética

$$\bar{x} = \frac{3+2+1+1+0+1+0+2+3+2+1+1+1+2+3+4+4+3+2}{19} = \frac{36}{19}$$

$$\bar{x} = 1{,}9$$

Media Aritmética Ponderada (De la tabla)

$$\bar{x} = \frac{0+6+10+12+8}{19} = \frac{36}{19}$$

$$\bar{x} = 1{,}9$$

Mediana (Ordenamos los datos)
0,0,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,3,3,3,3,4,4

$Me: 2$

xi	fi	xi.fi
0	2	0
1	6	6
2	5	10
3	4	12
4	2	8
total	19	36

9. Moda

Con la ayuda de una tabla de frecuencias

$Moda = 50$ (Se repite 16 veces)

xi	fi
47	1
48	2
49	7
50	16
51	6
52	2
53	2
55	1
Total	37

Solucionario

Media

$$\bar{x} = \frac{\sum xi}{n} =$$

$$\bar{x} = \frac{1961}{39}$$

$$\bar{x} = 50{,}3$$

Mediana

Ordenando:

47,48,48,49,49,49,49,49,49,49,50,50,50,50,50,50,50,50,50,50,50,50,50,50,50,50,51,52,52,55

$Me = 50$

10. Media Aritmética

$$\bar{x} = \frac{\sum Xi}{n} = \frac{660}{26}$$

$$\bar{x} = 25{,}4$$

Mediana

Ordenando:

13,15,16,17,18,19,19,20,20,21,21,21,22,23,24,24,25,25,26,27,28,31,35,38,45,67

$$Me = \frac{22 + 23}{2} = 22{,}5$$

Solucionario

11. Media Aritmética

$$\bar{x} = \frac{\sum Xi}{n} = \frac{1191}{37}$$

$$\bar{x} = 32{,}2$$

Mediana

Ordenando:

29,29,29,29,29,30,30,30,30,30,30,31,31,31,31,31,31,31,32,32,32,32,32,32,32,32,32,32,32,32,32,32,33,33,33,34,34,34

$Me = 32$

Moda

$Mo = 32$ (Este valor se repite 14 veces)

12. Media Aritmética

$$\bar{x} = \frac{3+3+3+3+3+4+4+4+4+4+5+5+5+6+6+6+6+7}{18} = \frac{81}{18}$$

$$\bar{x} = 4{,}5$$

Media Aritmética Ponderada (Con la ayuda de una tabla de frecuencias)

$$\bar{x} = \frac{\sum Xi.fi}{\sum fi} = \frac{81}{18} = 4{,}5$$

xi	fi	xi.fi
3	5	15
4	5	20
5	3	15
6	4	24
7	1	7
Total	18	81

Mediana

Ordenando:

3,3,3,3,3,4,4,4,4,4,5,5,5,6,6,6,6,7

$$Me = \frac{4+4}{2} = 4$$

Solucionario

$$Me = \frac{4+4}{2} = 4$$

Moda

Existen dos modas, cada una se repite 5 veces.

$$Mo1 = 3$$

$$Mo2 = 4$$

13. Media Aritmética Ponderada

$$\bar{x} = \frac{\sum Xi.fi}{\sum fi}$$

$$\bar{x} = \frac{(8*23)+9(13)+(10*19)+(11*23)}{23+13+19+23}$$

$$\bar{x} = \frac{744}{78} = 9{,}5$$

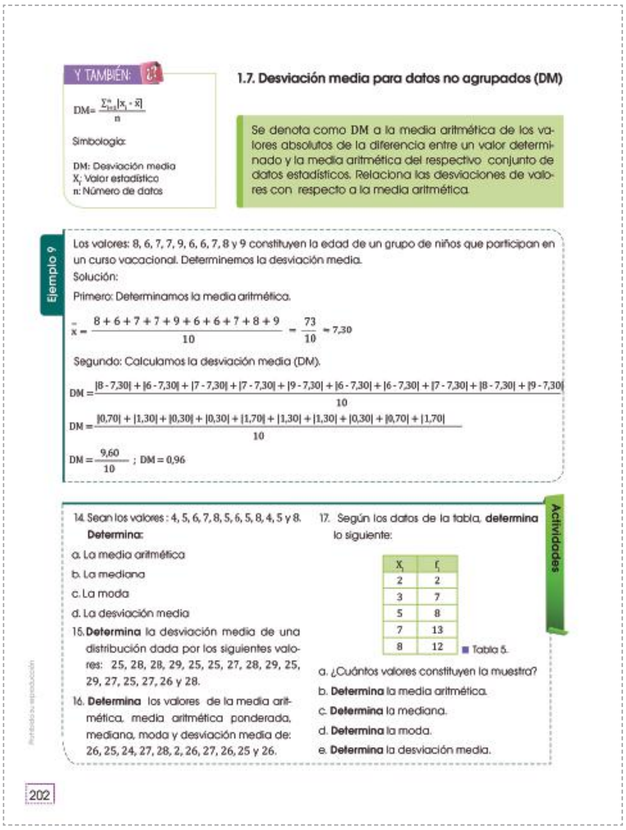
Mediana

Como son un total de 78 datos, la mediana estará entre los datos 39 y 40. Observando la tabla de frecuencias $Me = 10$, ya que los dos anteriores 23 y 13 suman 36 datos.

Moda

$Mo = 8$ (Este valor se repite 23 veces)

Página 202



Y TAMBIÉN:

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}$$

Simbología:

DM: Desviación media
X_i: Valor estadístico
n: Número de datos

1.7. Desviación media para datos no agrupados (DM)

Se denota como DM a la media aritmética de los valores absolutos de la diferencia entre un valor determinado y la media aritmética del respectivo conjunto de datos estadísticos. Relaciona las desviaciones de valores con respecto a la media aritmética.

Ejemplo 9

Los valores: 8, 6, 7, 7, 9, 6, 6, 7, 8 y 9 constituyen la edad de un grupo de niños que participan en un curso vacacional. Determinemos la desviación media.

Solución:

Primero: Determinamos la media aritmética.

$$\bar{x} = \frac{8+6+7+7+9+6+6+7+8+9}{10} = \frac{73}{10} = 7{,}30$$

Segundo: Calculamos la desviación media (DM).

$$DM = \frac{|8-7{,}30|+|6-7{,}30|+|7-7{,}30|+|7-7{,}30|+|9-7{,}30|+|6-7{,}30|+|6-7{,}30|+|7-7{,}30|+|8-7{,}30|+|9-7{,}30|}{10}$$

$$DM = \frac{|0{,}70|+|1{,}30|+|0{,}30|+|0{,}30|+|1{,}70|+|1{,}30|+|1{,}30|+|0{,}30|+|0{,}70|+|1{,}70|}{10}$$

$$DM = \frac{9{,}60}{10}\ ;\ DM = 0{,}96$$

Actividades

14. Sean los valores: 4, 5, 6, 7, 8, 5, 6, 5, 8, 4, 5 y 8. **Determina:**
a. La media aritmética
b. La mediana
c. La moda
d. La desviación media

15. **Determina** la desviación media de una distribución dada por los siguientes valores: 25, 28, 28, 29, 25, 25, 27, 28, 29, 25, 29, 27, 25, 27, 26 y 28.

16. **Determina** los valores de la media aritmética, media aritmética ponderada, mediana, moda y desviación media de: 26, 25, 24, 27, 28, 2, 26, 27, 26, 25 y 26.

17. Según los datos de la tabla, **determina** lo siguiente:

X_i	f_i
2	2
3	7
5	8
7	13
8	12

Tabla 5.

a. ¿Cuántos valores constituyen la muestra?
b. **Determina** la media aritmética.
c. **Determina** la mediana.
d. **Determina** la moda.
e. **Determina** la desviación media.

Solucionario

14. Media Aritmética

$$\bar{x} = \frac{4+5+6+7+8+5+6+5+8+4+5+8}{12} = \frac{71}{12}$$

$$\bar{x} = 5{,}92$$

Mediana

Ordenando:

4,4,5,5,5,5,6,6,7,8,8,8

$$Me = \frac{5+6}{2} = 5{,}5$$

Moda

$Mo = 5$ (Este valor se repite 4 veces)

Desviación Media

$$Dm = \frac{|4-5{,}92|+|4-5{,}92|+|5-5{,}92|+|5-5{,}92|+|5-5{,}92|+|5-5{,}92|+|6-5{,}92|+|6-5{,}92|+|7-5{,}92|+|8-5{,}92|+|8-5{,}92|+|8-5{,}92|}{12}$$

$$Dm = \frac{15}{12} = 1{,}25$$

5. $Dm = \frac{\sum |Xi - \bar{x}|}{n}$

Determinamos:

$$\bar{x} = \frac{\sum Xi}{n} = \frac{431}{16}$$

$$\bar{x} = 26{,}9$$

$$Dm = \frac{20{,}3}{16} = 1{,}27$$

16. En este ejercicio hay un dato incorrecto, no es 2 sino 25

Media Aritmética

$$\bar{x} = \frac{26+25+24+27+28+25+26+27+26+25+26}{11} = \frac{285}{11}$$

$$\bar{x} = 25{,}9$$

Media Aritmética Ponderada (Con la ayuda de una tabla de frecuencias)

$$\bar{x} = \frac{\sum Xi.fi}{\sum fi}$$

xi	fi	xi.fi
24	1	24
25	3	75
26	4	104
27	2	54
28	1	28
Total	11	285

$$\bar{x} = \frac{285}{11} = 25{,}9$$

Mediana

Ordenando:

24,25,25,25,26,26,26,26,27,27,28

$$Me = 26$$

Moda

$Mo = 26$ (Este valor se repite 4 veces)

17. a) Los valores son la suma de los fi

$$Total = 2 + 7 + 8 + 13 + 12 = 42$$

b) $\bar{x} = \frac{\sum Xi.fi}{\sum fi}$

$$\bar{x} = \frac{252}{42} = 6$$

c) De la tabla vemos que la mitad de los datos es 21 y ese valor se encuentra en la variable 7, ya que $2 + 7 + 8 = 16$ y este valor más 13 será 29, por lo tanto:

$$Me = 7$$

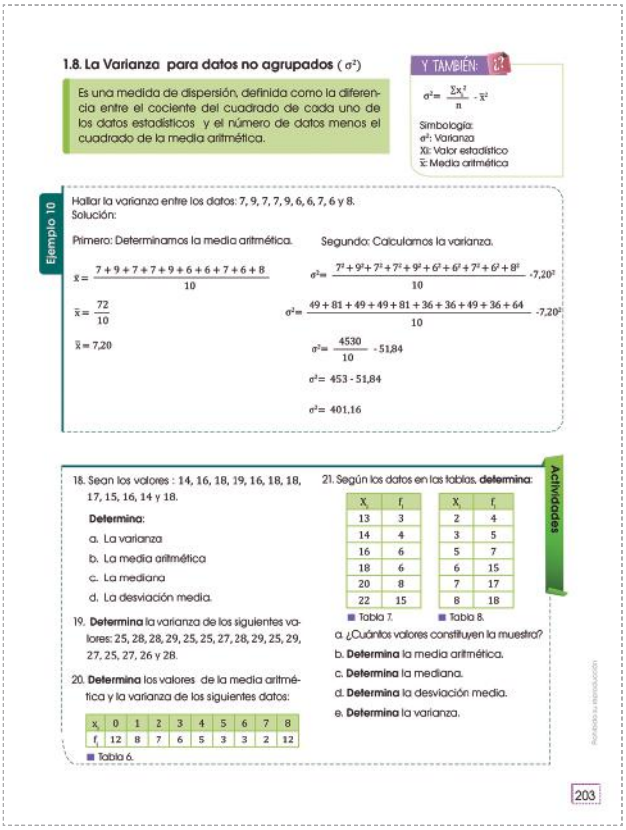
d) $Mo = 7$

e) $Dm = \frac{\sum|Xi-\bar{x}|}{n}$

$$Dm = \frac{2|2-6|+7|3-6|+8|5-6|+13|7-6|+12|8-6|}{42} = \frac{74}{42}$$

$$Dm = 1{,}76$$

Página 203



1.8. La Varianza para datos no agrupados (σ^2)

Es una medida de dispersión, definida como la diferencia entre el cociente del cuadrado de cada uno de los datos estadísticos y el número de datos menos el cuadrado de la media aritmética.

Y TAMBIÉN: ¿?

$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2$

Simbología:
σ^2: Varianza
Xi: Valor estadístico
$\bar{x}$: Media aritmética

Ejemplo 10

Hallar la varianza entre los datos: 7, 9, 7, 7, 9, 6, 6, 7, 6 y 8.
Solución:

Primero: Determinamos la media aritmética.

$\bar{x} = \frac{7+9+7+7+9+6+6+7+6+8}{10}$

$\bar{x} = \frac{72}{10}$

$\bar{x} = 7{,}20$

Segundo: Calculamos la varianza.

$\sigma^2 = \frac{7^2+9^2+7^2+7^2+9^2+6^2+6^2+7^2+6^2+8^2}{10} - 7{,}20^2$

$\sigma^2 = \frac{49+81+49+49+81+36+36+49+36+64}{10} - 7{,}20^2$

$\sigma^2 = \frac{4530}{10} - 51{,}84$

$\sigma^2 = 453 - 51{,}84$

$\sigma^2 = 401{,}16$

Actividades

18. Sean los valores : 14, 16, 18, 19, 16, 18, 18, 17, 15, 16, 14 y 18.

   Determina:

   a. La varianza
   b. La media aritmética
   c. La mediana
   d. La desviación media.

19. **Determina** la varianza de los siguientes valores: 25, 28, 28, 29, 25, 25, 27, 28, 29, 25, 29, 27, 25, 27, 26 y 28.

20. **Determina** los valores de la media aritmética y la varianza de los siguientes datos:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f_i	12	8	7	6	5	3	3	2	12

Tabla 6.

21. Según los datos en las tablas, **determina:**

X_i	f_i
13	3
14	4
16	6
18	6
20	8
22	15

Tabla 7.

X_i	f_i
2	4
3	5
5	7
6	15
7	17
8	18

Tabla 8.

a. ¿Cuántos valores constituyen la muestra?
b. **Determina** la media aritmética.
c. **Determina** la mediana.
d. **Determina** la desviación media.
e. **Determina** la varianza.

203

Solucionario

18. Primero encontramos la Media Aritmética

b) $\bar{x} = \frac{\sum Xi}{n} = \frac{199}{12}$

$\bar{x} = 16{,}58$

a) $\sigma^2 = \frac{\sum Xi^2}{n} - \bar{x}^2$

$$\sigma^2 = \frac{14^2+16^2+18^2+19^2+16^2+18^2+18^2+17^2+15^2+16^2+14^2+18^2}{12} - 16{,}58^2$$

$$\sigma^2 = \frac{3331}{12} - 274{,}8964$$

$$\sigma^2 = 2{,}687$$

Ordenando:
14,14,15,16,16,16,17,18,18,18,18,19

$$Me = \frac{16+17}{2} = 16{,}5$$

$$Dm = \frac{\sum|Xi - \bar{x}|}{n}$$

$$Dm = \frac{17}{12} = 1{,}42$$

$$Dm = \frac{17}{12} = 1{,}42$$

$$\sigma^2 = \frac{11647}{16} = 727{,}94$$

20. $$\bar{x} = \frac{0(12)+1(8)+2(7)+3(6)+4(5)+5(3)+6(3)+7(2)+8(12)}{12+8+7+6+5+3+3+2+12}$$

xi	0	1	2	3	4	5	6	7	8
fi	12	8	7	6	5	3	3	2	12

$$\bar{x} = \frac{203}{58} = 3{,}5$$

Varianza

$$\sigma^2 = \frac{12(0)^2+8(1)^2+7(2)^2+6(3)^2+5(4)^2+3(5)^2+3(6)^2+2(7)^2+12(8)^2}{58} - 3,5^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1219}{58} - 12{,}25$$

$$\sigma^2 = 21{,}02 - 12{,}25 = 8{,}77$$

a) El número de valores son la suma de los fi

Muestra: $\sum fi = 3 + 4 + 6 + 6 + 8 + 15 + 4 + 5 + 7 + 15 + 17 + 18$

Muestra: 108

b) Media Aritmética

$$\bar{x} = \frac{\sum Xi.fi}{\sum fi}$$

$$\bar{x} = \frac{1200}{108} = 11{,}11$$

c) La mitad de los datos es $\frac{108}{2} = 54$

Buscamos la Xi donde se encuentra el dato 54, sumando los fi y observamos que: $Me = 8$

d) $$Dm = \frac{\sum|Xi - \bar{x}|}{n}$$

$$Dm = \frac{644{,}64}{108} = 5{,}97$$

e) $$\sigma^2 = \frac{\sum Xi^2}{n} - \bar{x}^2$$

$$\sigma^2 = \frac{17992}{108} = 11{,}11^2$$

$$\sigma^2 = 166{,}59 - 123{,}43$$

$$\sigma^2 = 43{,}16$$

Página 204

Solucionario

22. Primero calculamos la Media Aritmética

b) $\bar{x} = \frac{245+250+252+253+251+250+250+247+249+253}{10} = \frac{2500}{10}$

$\bar{x} = 250$

a) $\sigma^2 = \frac{245^2+250^2+252^2+253^2+251^2+250^2+250^2+247^2+249^2+253^2}{10} - 250^2$

$$\sigma^2 = \frac{625058}{10} - 62500$$

$$\sigma^2 = 5,8$$

c) Mediana

Ordenando:

245,247,249,250,250,250,251,252,253,253

$$Me = \frac{250+250}{2} = 250$$

d) $Dm = \frac{\sum|Xi-\bar{x}|}{n}$

$$Dm = \frac{18}{10} = 1,8$$

e) $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

$\sigma = \sqrt{5,8}$

$\sigma = 2,4$

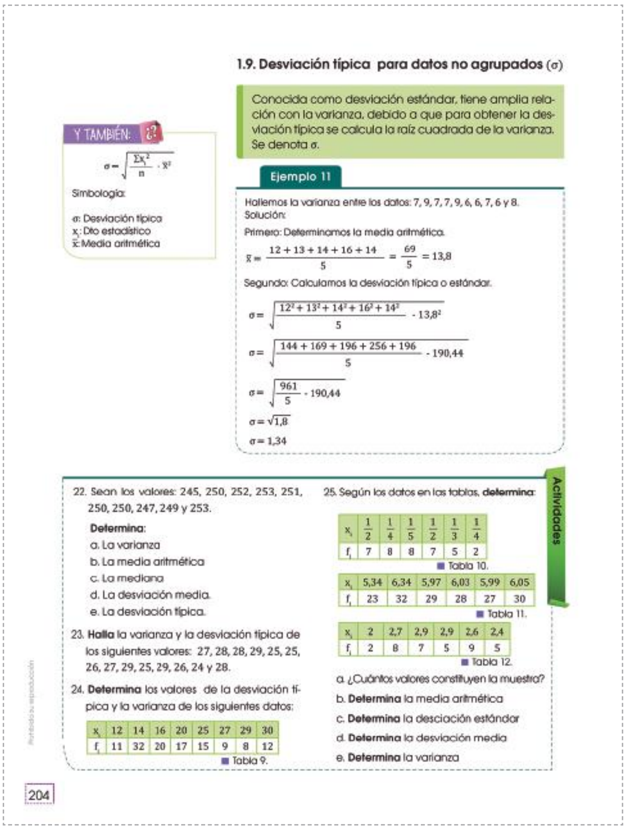
23. Primero determinamos la Media Aritmética

$$\bar{x} = \frac{\sum Xi}{n} = \frac{376}{14}$$

$$\bar{x} = 24,86$$

a) $\sigma^2 = \frac{\sum Xi^2}{n} - \bar{x}^2$

$$\sigma^2 = \frac{10136}{14} - 26.86^2$$



1.9. Desviación típica para datos no agrupados (σ)

Conocida como desviación estándar, tiene amplia relación con la varianza, debido a que para obtener la desviación típica se calcula la raíz cuadrada de la varianza. Se denota σ.

Y TAMBIÉN:

$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \bar{x}^2}$

Simbología:

σ: Desviación típica
x_i: Dto estadístico
$\bar{x}$: Media aritmética

Ejemplo 11

Hallemos la varianza entre los datos: 7, 9, 7, 7, 9, 6, 6, 7, 6 y 8.
Solución:

Primero: Determinamos la media aritmética.

$\bar{x} = \frac{12+13+14+16+14}{5} = \frac{69}{5} = 13,8$

Segundo: Calculamos la desviación típica o estándar.

$\sigma = \sqrt{\frac{12^2+13^2+14^2+16^2+14^2}{5} - 13,8^2}$

$\sigma = \sqrt{\frac{144+169+196+256+196}{5} - 190,44}$

$\sigma = \sqrt{\frac{961}{5} - 190,44}$

$\sigma = \sqrt{1,8}$

$\sigma = 1,34$

Actividades

22. Sean los valores: 245, 250, 252, 253, 251, 250, 250, 247, 249 y 253.

Determina:
a. La varianza
b. La media aritmética
c. La mediana
d. La desviación media.
e. La desviación típica.

23. **Halla** la varianza y la desviación típica de los siguientes valores: 27, 28, 28, 29, 25, 25, 26, 27, 29, 25, 29, 26, 24 y 28.

24. **Determina** los valores de la desviación típica y la varianza de los siguientes datos:

x_i	12	14	16	20	25	27	29	30
f_i	11	32	20	17	15	9	8	12

Tabla 9.

25. Según los datos en las tablas, **determina**:

x_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
f_i	7	8	8	7	5	2

Tabla 10.

x_i	5,34	6,34	5,97	6,03	5,99	6,05
f_i	23	32	29	28	27	30

Tabla 11.

x_i	2	2,7	2,9	2,9	2,6	2,4
f_i	2	8	7	5	9	5

Tabla 12.

a. ¿Cuántos valores constituyen la muestra?
b. **Determina** la media aritmética
c. **Determina** la desciación estándar
d. **Determina** la desviación media
e. **Determina** la varianza

204

$$\sigma^2 = 724 - 721,46$$

$$\sigma^2 = 2,54$$

b) $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

$$\sigma = \sqrt{2,54}$$

$$\sigma = 1,59$$

24. Primero determinamos $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{\sum Xi.fi}{\sum fi}$$

$$\bar{x} = \frac{2450}{124} = 19,76$$

a) $\sigma^2 = \frac{\sum Xi^2.fi}{n} - \bar{x}^2$

$$\sigma^2 = \frac{53240}{124} - 19,76^2$$

$$\sigma^2 = 429,35 - 390,46$$

$$\sigma^2 = 38,89$$

b) $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

$$\sigma = \sqrt{38,89}$$

$$\sigma = 6,24$$

Xi	1/2	1/4	1/5	1/2	1/3	1/4
fi	7	8	8	7	5	2

25. Para la primera tabla

a) Muestra: $\sum fi = 7 + 8 + 8 + 7 + 5 + 2 = 37$

b) $\bar{x} = \frac{\sum fi.Xi}{\sum fi} = \frac{7\left(\frac{1}{2}\right)+8\left(\frac{1}{4}\right)+8\left(\frac{1}{5}\right)+7\left(\frac{1}{2}\right)+5\left(\frac{1}{3}\right)+2\left(\frac{1}{4}\right)}{37}$

$$\bar{x} = \frac{12,77}{37} = 0,345$$

Solucionario

e) Primero calculamos la varianza

$$\sigma^2 = \frac{\sum xi^2}{n} - \bar{x}$$

$$\sigma^2 = \frac{5{,}38}{37} - 0{,}345^2$$

$$\sigma^2 = 0{,}145 - 0{,}119$$

$$\sigma^2 = 0{,}026$$

c) $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

$$\sigma = \sqrt{0{,}026}$$

$$\sigma = 0{,}161$$

d) $Dm = \frac{\sum |Xi - \bar{x}|.fi}{n}$

$$Dm = \frac{4{,}34}{37}$$

$$Dm = 0{,}117$$

Para la segunda tabla

a) Muestra: $\frac{\sum fi.Xi}{n} = \frac{23(5{,}34)+32(6{,}34)+29(5{,}97)+28(6{,}03)+27(5.99)+30(6{,}05)}{169} = 169$

b) $\bar{x} = \frac{\sum fi.Xi}{n} = \frac{23(5{,}34)+32(6{,}34)+29(5{,}97)+28(6{,}03)+27(5{,}99)+30(6.05)}{169}$

$$\bar{x} = \frac{1010{,}90}{169} = 5{,}98$$

e) $\sigma^2 = \frac{23(5{,}34)^2+32(6{,}34)^2+29(5{,}97)^2+28(6{,}03)^2+27(5{,}99)^2+30(6{,}05)^2}{169} - 5{,}98^2$

$$\sigma^2 = \frac{6060{,}647}{169} - 35{,}76$$

$$\sigma^2 = 35{,}86 - 35{,}76$$

$$\sigma^2 = 0{,}1$$

xi	5,34	6,34	5,97	6,03	5,99	6,05
fi	23	32	29	28	27	30

c) $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

$\sigma = 0{,}316$

d) $Dm = \frac{23(5{,}34-5{,}98)+32(6{,}34-5{,}98)+29(5{,}97-5{,}98)+28(6{,}03-5{,}98)+27(5{,}99-5{,}98)+30(6{,}05-5{,}98)}{169}$

$Dm = \frac{30{,}30}{169}$

$Dm = 0{,}179$

Para la tercera tabla

a) Muestra: $2 + 8 + 7 + 5 + 9 + 5 = 36$

b) $\bar{x} = \frac{2(2)+8(2{,}7)+7(2{,}9)+5(2{,}9)+9(2{,}6)+5(2{,}4)}{36}$

$\bar{x} = \frac{95{,}8}{36} = 2{,}66$

e) $\sigma^2 = \frac{2(2)^2+8(2{,}7)^2+7(2{,}9)^2+5(2{,}9)^2+9(2{,}6)^2+5(2{,}4)^2}{36} - 2{,}66^2$

$\sigma^2 = \frac{256{,}88}{36} - 2{,}66^2$

Xi	2,00	2,70	2,90	2,90	2,60	2,40
fi	2	8	7	5	9	5

$\sigma^2 = 7{,}13 - 7{,}08$

$\sigma^2 = 0{,}05$

c) $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

$\sigma = \sqrt{0{,}05}$

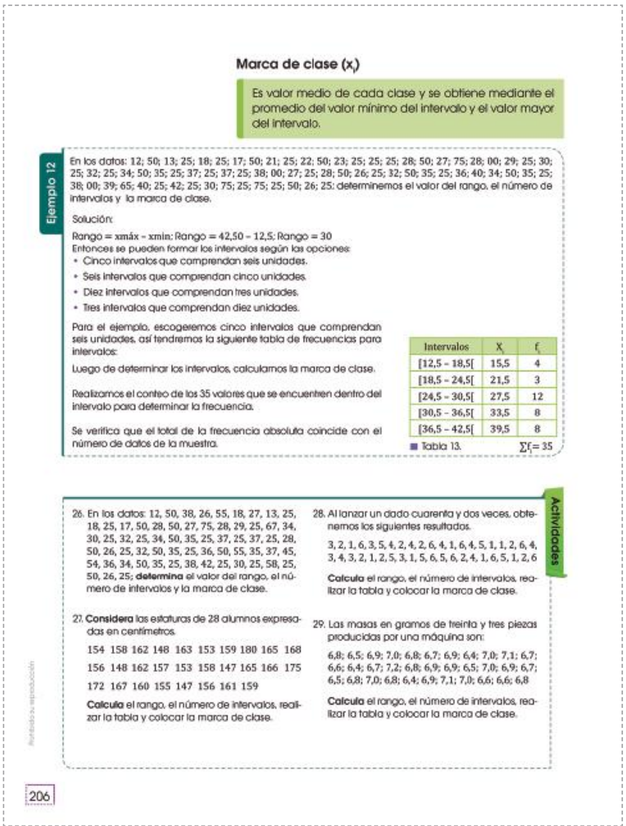
$\sigma = 0{,}224$

d) $Dm = \frac{2|2-2{,}66|+8|2{,}7-2{,}66|+12|2{,}9-2{,}66|+5|2{,}4-2{,}66|}{36}$

$Dm = \frac{1{,}32}{36}$

$Dm = 0{,}037$

Página 206



Marca de clase (x_i)

Es valor medio de cada clase y se obtiene mediante el promedio del valor mínimo del intervalo y el valor mayor del intervalo.

Ejemplo 12

En los datos: 12; 50; 13; 25; 18; 25; 17; 50; 21; 25; 22; 50; 23; 25; 25; 25; 28; 50; 27; 75; 28; 00; 29; 25; 30; 25; 32; 25; 34; 50; 35; 25; 37; 25; 37; 25; 38; 00; 27; 25; 28; 50; 26; 25; 32; 50; 35; 25; 36; 40; 34; 50; 35; 25; 38; 00; 39; 65; 40; 25; 42; 25; 30; 75; 25; 75; 25; 50; 26; 25: determinemos el valor del rango, el número de intervalos y la marca de clase.

Solución:

Rango = xmáx - xmin: Rango = 42,50 - 12,5; Rango = 30

Entonces se pueden formar los intervalos según las opciones:

- Cinco intervalos que comprendan seis unidades.
- Seis intervalos que comprendan cinco unidades.
- Diez intervalos que comprendan tres unidades.
- Tres intervalos que comprendan diez unidades.

Para el ejemplo, escogeremos cinco intervalos que comprendan seis unidades, así tendremos la siguiente tabla de frecuencias para intervalos:

Luego de determinar los intervalos, calculamos la marca de clase.

Realizamos el conteo de los 35 valores que se encuentren dentro del intervalo para determinar la frecuencia.

Se verifica que el total de la frecuencia absoluta coincide con el número de datos de la muestra.

Intervalos	X_i	f_i
[12,5 - 18,5[	15,5	4
[18,5 - 24,5[	21,5	3
[24,5 - 30,5[	27,5	12
[30,5 - 36,5[	33,5	8
[36,5 - 42,5[	39,5	8

Tabla 13. $\sum f_i = 35$

Actividades

26. En los datos: 12, 50, 38, 26, 55, 18, 27, 13, 25, 18, 25, 17, 50, 28, 50, 27, 75, 28, 29, 25, 67, 34, 30, 25, 32, 25, 34, 50, 35, 25, 37, 25, 37, 25, 28, 50, 26, 25, 32, 50, 35, 25, 36, 50, 55, 35, 37, 45, 54, 36, 34, 50, 35, 25, 38, 42, 25, 30, 25, 58, 25, 50, 26, 25; **determina** el valor del rango, el número de intervalos y la marca de clase.

27. **Considera** las estaturas de 28 alumnos expresadas en centímetros.

    154 158 162 148 163 153 159 180 165 168
    156 148 162 157 153 158 147 165 166 175
    172 167 160 155 147 156 161 159

    Calcula el rango, el número de intervalos, realizar la tabla y colocar la marca de clase.

28. Al lanzar un dado cuarenta y dos veces, obtenemos los siguientes resultados.

    3, 2, 1, 6, 3, 5, 4, 2, 4, 2, 6, 4, 1, 6, 4, 5, 1, 1, 2, 6, 4, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 5, 3, 1, 5, 6, 5, 6, 2, 4, 1, 6, 5, 1, 2, 6

    Calcula el rango, el número de intervalos, realizar la tabla y colocar la marca de clase.

29. Las masas en gramos de treinta y tres piezas producidas por una máquina son:

    6,8; 6,5; 6,9; 7,0; 6,8; 6,7; 6,9; 6,4; 7,0; 7,1; 6,7; 6,6; 6,4; 6,7; 7,2; 6,8; 6,9; 6,9; 6,5; 7,0; 6,9; 6,7; 6,5; 6,8; 7,0; 6,8; 6,4; 6,9; 7,1; 7,0; 6,6; 6,6; 6,8

    Calcula el rango, el número de intervalos, realizar la tabla y colocar la marca de clase.

206

Solucionario

26. Rango = $Xmax - Xmin$

$$R = 67 - 12$$

$$R = 55$$ (Sus factores son 5 y 11)

Formaremos 5 intervalos de 11

Intervalos	Xi
[12 - 23[	17,5
[23 - 34[	28,5
[34 - 45[	39,5
[45 - 56[	50,5
[56 - 67]	61,5

27. Rango = $Xmax - Xmin$

$$R = 180 - 147$$

$$R = 33$$ (Número de intervalos 3 de 11)

$$Xi = \frac{147 + 158}{2} = 152,5$$

$$Xi = \frac{158 + 169}{2} = 163,5$$

$$Xi = \frac{169 + 180}{2} = 174,5$$

Intervalos	Xi	fi
[147 - 158[	153	11
[158 - 169[	164	13
[169 - 180]	39,5	4

28. Rango = $Xmax - Xmin$

$$R = 6 - 1$$
$$R = 5$$

Como es un número primo

$R = 7 - 0$ También es prima

Por lo tanto haremos 3 intervalos de 2

Intervalos	Xi	fi
[1 - 3[	2	16
[3 - 5[	4	12
[5 - 7]	6	14

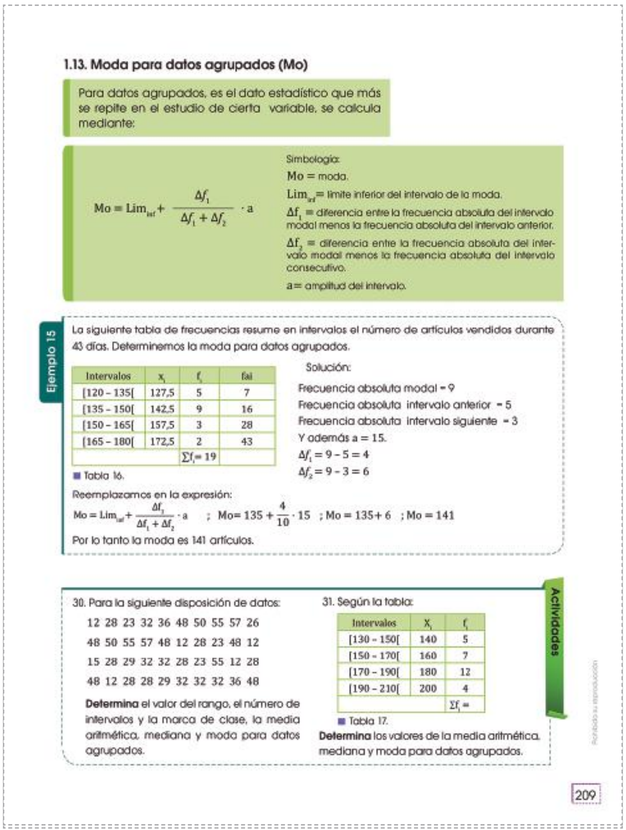
29. $R = 7{,}2 - 6{,}4$

$R = 0{,}8$

Realizamos 4 intervalos de 0,2

Intervalos	Xi	fi
[6,4 - 6,6[	6,5	6
[6,6 - 6,8[	6,7	7
[6,8 - 7,0[	6,9	12
[7,0 - 7,2]	7,1	8

Página 209



1.13. Moda para datos agrupados (Mo)

Para datos agrupados, es el dato estadístico que más se repite en el estudio de cierta variable, se calcula mediante:

$$Mo = Lim_{inf} + \frac{\Delta f_1}{\Delta f_1 + \Delta f_2} \cdot a$$

Simbología:

Mo = moda.

Lim_{inf} = límite inferior del intervalo de la moda.

Δf_1 = diferencia entre la frecuencia absoluta del intervalo modal menos la frecuencia absoluta del intervalo anterior.

Δf_2 = diferencia entre la frecuencia absoluta del intervalo modal menos la frecuencia absoluta del intervalo consecutivo.

a = amplitud del intervalo.

Ejemplo 15

La siguiente tabla de frecuencias resume en intervalos el número de artículos vendidos durante 43 días. Determinemos la moda para datos agrupados.

Intervalos	x_i	f_i	fai
[120 – 135[	127,5	5	7
[135 – 150[	142,5	9	16
[150 – 165[	157,5	3	28
[165 – 180[	172,5	2	43
		$\sum f_i = 19$	

Tabla 16.

Solución:

Frecuencia absoluta modal = 9

Frecuencia absoluta intervalo anterior = 5

Frecuencia absoluta intervalo siguiente = 3

Y además $a = 15$.

$\Delta f_1 = 9 - 5 = 4$

$\Delta f_2 = 9 - 3 = 6$

Reemplazamos en la expresión:

$Mo = Lim_{inf} + \frac{\Delta f_1}{\Delta f_1 + \Delta f_2} \cdot a$; $Mo = 135 + \frac{4}{10} \cdot 15$; $Mo = 135 + 6$; $Mo = 141$

Por lo tanto la moda es 141 artículos.

Actividades

30. Para la siguiente disposición de datos:

12 28 23 32 36 48 50 55 57 26

48 50 55 57 48 12 28 23 48 12

15 28 29 32 32 28 23 55 12 28

48 12 28 28 29 32 32 32 36 48

Determina el valor del rango, el número de intervalos y la marca de clase, la media aritmética, mediana y moda para datos agrupados.

31. Según la tabla:

Intervalos	X_i	f_i
[130 – 150[	140	5
[150 – 170[	160	7
[170 – 190[	180	12
[190 – 210[	200	4
		$\sum f_i =$

Tabla 17.

Determina los valores de la media aritmética, mediana y moda para datos agrupados.

209

Solucionario

30. Rango: $57 - 12 = 15$

Como 57 no puede incluirse como valor máximo aumentamos y disminuimos 1.

$Rang: 58 - 11 = 47$

Como es número primo aumentamos y disminuimos 1

$Rang: 59 - 10 = 49$

Tendremos 7 intervalos de 7

Intervalos	Xi	fi
[10 - 17[	13,5	6
[17 -24[	20,5	3
`[24 - 31[	27,5	10
[31 - 38[	34,5	8
`[38 - 45[	41,5	0
[45 - 52[	48,5	8
[52 - 59[	55,5	5

Media Aritmética

$$\bar{x} = \frac{\sum Xi.fi}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{13{,}5(6) + 20{,}5(3) + 27{,}5(10) + 34{,}5(8) + 41{,}5(0) + 48{,}5(8) + 55{,}5(5)}{40}$$

$$\bar{x} = \frac{1359}{40}$$

$$\bar{x} = 33{,}98$$

Solucionario

1.
   a) Cualitativas: disciplina por cursos, aceptación de las autoridades.
   Cuantitativas: número de estudiantes, promedios por cursos.
   b) Cualitativas: estado de refrigeración, iluminación.
   Cuantitativas: ventas mensuales, porcentaje de empleados mayores de 25 años.
   c) Cualitativas: aseo del gimnasio, estudio de máquinas.
   Cuantitativas: inscritos, calorías por día.
   d) Cualitativas: aceptación en el mercado, satisfacción de empleados
   Cuantitativas: ingreso por los últimos años, número de hijos por empleado.

2. Población: Estudiantes de 10° año de EGB
   Muestra: José, Juan, Marian, Andrea, Luis, Alejandro, Silvia, Paulina, Jhon y Carlos
   Variable: horas al día que utilizan el internet
   Tipo: cuantitativa

3. Cuantitativas: edad, hijos, estatura, numero de hermanos
   Cualitativas: ocupación, profesión, deporte preferido, postre preferido

4. Discretas: número de hijos, animales de una granja

   Continuas: peso, estatura

5. Variable: número de veces que revisa el celular
   Tipo: cuantitativa, discreta

6. a) $\bar{x} = \frac{\sum Xi}{n} = \frac{1014}{40}$
   $\bar{x} = 23{,}35$

   b) $\bar{x} = \frac{\sum Xi.fi}{n}$

   $$\bar{x} = \frac{8(23)+5(24)+6(25)+9(26)+10(27)+2(28)}{40} = \frac{1014}{40}$$

   $\bar{x} = 25{,}35$

   c) Ordenando:

   23,23,23,23,23,23,23,23,,24,24,24,24,24,25,25,25,
   25,25,25,26,26,26,26,26,26,26,26,26,27,27,27,27,2
   7,27,27,27,27,27,28,28

Solucionario

$$Me = \frac{26+26}{2} = 26$$

d) Moda

$Mo = 27$

e) $Dm = \frac{\sum|Xi-\bar{x}|.fi}{n} = \frac{55,3}{40}$

$Dm = 1,3825$

7.

a) De la tabla de frecuencias observamos que el número de niños mayores de años son:

$$\% = (1 - 0,17) * 100 = 83\%$$

b) Ordenando:

5,5,5,5,5,5,6,6,6,6,6,6,6,7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,8,8,8,8,8,9,9,9,9,9,9,10,10

$$Me = \frac{7+7}{2} = 7$$

c) Moda

$Mo = 7$

Xi	fi	fr
5	6	0,17
6	7	0,19
7	10	0,28
8	5	0,14
9	6	0,17
10	2	0,06
	36	1,00

d) $\bar{x} = \frac{\sum Xi.fi}{n} =$

$$\bar{x} = \frac{6(5)+7(6)+10(7)+5(8)+6(9)+2(10)}{36} = \frac{256}{36}$$

$\bar{x} = 7,11$

8. a) De la tabla Muestra: $4 + 8 + 3 + 6 + 4 + 5 + 5 = 35$

b) Tipo: Cuantitativa contínua

Solucionario

c) 1,3 que tiene $fi = 8$

d) $\bar{x} = \frac{\sum Xi.fi}{n} =$

$$\bar{x} = \frac{4(1{,}25) + 8(1{,}3) + 3(1{,}33) + 6(1{,}35) + 4(1{,}4) + 5(1{,}45) + 5(1{,}5)}{35} = \frac{47{,}84}{35}$$

$\bar{x} = 1{,}37$

e) Como $n = 35$; $\frac{n}{2} = 17{,}5 = 18$ La clase de la media es 1,35

$Me = 1{,}35$

$Mo = 8$

f) $Dm = \frac{\sum |Xi - \bar{x}|.fi}{n}$

$$Dm = \frac{2{,}45}{35} = 0{,}07$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum Xi^2}{n} - \overline{x^2}$$

$$\sigma^2 = \frac{65{,}6142}{35} - 1{,}37^2$$

$\sigma^2 = 1{,}87 - 1{,}87 = 0$

e) $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

$\sigma = 0$

e) $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

$\sigma = 0$

9. a) $\bar{x} = \frac{\sum Xi}{n}$

$\bar{x} = \frac{28+32+28+29+29+29}{6} = \frac{175}{6}$

$\bar{x} = 29{,}2$

b)

$\sigma^2 = \frac{\sum Xi^2}{n} - \overline{x^2}$

$\sigma^2 = \frac{28^2+32^2+28^2+29^2+29^2+29^2}{6} - 29{,}2^2$

Solucionario

$\sigma^2 = \frac{5115}{6} - 852{,}64$

$\sigma^2 = 0$

c) $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

$\sigma = 0$

10. a) Determinamos la media aritmética de cada clase

3°A: $\bar{x} = \frac{\sum Xi.fi}{n}$

$\bar{x} = \frac{1(2)+2(1)+3(4)+4(5)+5(7)+6(6)+7(2)+8(1)+9(1)+10(1)}{30} = \frac{148}{30}$

$\bar{x} = 4{,}9$

3°B: $\bar{x} = \frac{\sum Xi.fi}{n}$

$\bar{x} = \frac{1(4)+2(3)+3(3)+4(1)+5(4)+6(5)+7(3)+8(2)+9(2)+10(3)}{30} = \frac{158}{30}$

$\bar{x} = 5{,}3$

El mejor rendimiento lo tiene el curso 3°B

b) 3°A: $Dm = \frac{\sum|Xi-\bar{x}|}{n}$

$Dm = \frac{46{,}6}{30}$

$Dm = 1{,}5$

3° B: $Dm = \frac{\sum|Xi-\bar{x}|}{n}$

$Dm = \frac{72}{30}$

$Dm = 2{,}4$

El curso más uniforme es el 3°A

Solucionario

11. a) $\bar{x} = \frac{0{,}25+0{,}56+0{,}67+0{,}87+0{,}67+0{,}7+0{,}68+0{,}7+0{,}65+0{,}67+0{,}8+0{,}9+0{,}88+0{,}78}{14} = \frac{9{,}78}{14}$

$\bar{x}=0{,}698 \cong 0{,}7$

b) $\bar{x} = \frac{0{,}25+0{,}56+3(0{,}67)+0{,}87+2(0{,}7)+0{,}68+0{,}65+0{,}8+0{,}9+0{,}88+0{,}78}{14} = \frac{9{,}78}{14}$

$\bar{x} = 0{,}7$

c) Ordenando:

0.25;0.56;0.65;0.67;0.67;0.67;0.68;0.7;0.7;0.78:0.8;0.8;
0.88:09

Me $= \frac{0.68+0.7}{2}$; Me =0.69

d) Mo =0.67

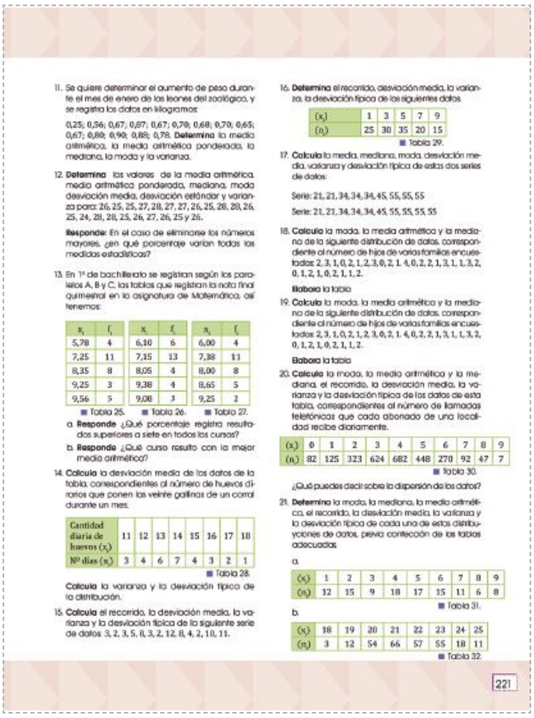
e) $\sigma^2 = \frac{\sum xi^2}{n} - \bar{x}^2$

$\sigma^2 = \frac{7.1774}{14} - 0.7^2$

$\sigma^2 = 3.7 - 0.49$

$\sigma^2 = 3.21$

Página 221


11. Se quiere determinar el aumento de peso durante el mes de enero de los leones del zoológico, y se registra los datos en kilogramos:

0,25; 0,56; 0,67; 0,87; 0,67; 0,70; 0,68; 0,70; 0,65; 0,67; 0,80; 0,90; 0,88; 0,78. **Determina** la media aritmética, la media aritmética ponderada, la mediana, la moda y la varianza.

12. **Determina** los valores de la media aritmética, media aritmética ponderada, mediana, moda desviación media, desviación estándar y varianza para: 26, 25, 25, 27, 28, 27, 27, 26, 25, 28, 28, 26, 25, 24, 28, 28, 25, 26, 27, 26, 25 y 26.

Responde: En el caso de eliminarse los números mayores, ¿en qué porcentaje varían todas las medidas estadísticas?

13. En 1° de bachillerato se registran según los paralelos A, B y C, las tablas que registran la nota final quimestral en la asignatura de Matemática, así tenemos:

x_i	f_i
5,78	4
7,25	11
8,35	8
9,25	3
9,56	5

Tabla 25.

x_i	f_i
6,10	6
7,15	13
8,05	4
9,38	4
9,08	3

Tabla 26.

x_i	f_i
6,00	4
7,38	11
8,00	8
8,65	5
9,25	2

Tabla 27.

a. **Responde** ¿Qué porcentaje registra resultados superiores a siete en todos los cursos?

b. **Responde** ¿Qué curso resulta con la mejor media aritmética?

14. **Calcula** la desviación media de los datos de la tabla, correspondientes al número de huevos diarios que ponen las veinte gallinas de un corral durante un mes.

Cantidad diaria de huevos (x_i)	11	12	13	14	15	16	17	18
Nº días (n_i)	3	4	6	7	4	3	2	1

Tabla 28.

Calcula la varianza y la desviación típica de la distribución.

15. **Calcula** el recorrido, la desviación media, la varianza y la desviación típica de la siguiente serie de datos: 3, 2, 3, 5, 8, 3, 2, 12, 8, 4, 2, 10, 11.

16. **Determina** el recorrido, desviación media, la varianza, la desviación típica de los siguientes datos.

(x_i)	1	3	5	7	9
(n_i)	25	30	35	20	15

Tabla 29.

17. **Calcula** la media, mediana, moda, desviación media, varianza y desviación típica de estas dos series de datos:

Serie: 21, 21, 34, 34, 34, 45, 55, 55, 55

Serie: 21, 21, 34, 34, 34, 45, 55, 55, 55, 55

18. **Calcula** la moda, la media aritmética y la mediana de la siguiente distribución de datos, correspondiente al número de hijos de varias familias encuestadas: 2, 3, 1, 0, 2, 1, 2, 3, 0, 2, 1, 4, 0, 2, 2, 1, 3, 1, 1, 3, 2, 0, 1, 2, 1, 0, 2, 1, 1, 2.

Elabora la tabla

19. **Calcula** la moda, la media aritmética y la mediana de la siguiente distribución de datos, correspondiente al número de hijos de varias familias encuestadas: 2, 3, 1, 0, 2, 1, 2, 3, 0, 2, 1, 4, 0, 2, 2, 1, 3, 1, 1, 3, 2, 0, 1, 2, 1, 0, 2, 1, 1, 2.

Elabora la tabla

20. **Calcula** la moda, la media aritmética y la mediana, el recorrido, la desviación media, la varianza y la desviación típica de los datos de esta tabla, correspondientes al número de llamadas telefónicas que cada abonado de una localidad recibe diariamente.

(x_i)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
(n_i)	82	125	323	624	682	448	270	92	47	7

Tabla 30.

¿Qué puedes decir sobre la dispersión de los datos?

21. **Determina** la moda, la mediana, la media aritmética, el recorrido, la desviación media, la varianza y la desviación típica de cada una de estas distribuciones de datos, previa confección de las tablas adecuadas.

a.

(x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
(n_i)	12	15	9	18	17	15	11	6	8

Tabla 31.

b.

(x_i)	18	19	20	21	22	23	24	25
(n_i)	3	12	54	66	57	55	18	11

Tabla 32.

221

12)

a) $\bar{x} = \frac{\sum xi}{n} = \frac{578}{22}$

$\bar{x} = 26.27$

b) $\bar{x} = \frac{\sum xi.fi}{n}$

Xi	fi
24	1
25	6
26	6
27	4
28	5
	22

$\bar{x} = \frac{1(24) + 6(25) + 6(26) + 4(27) + 5(28)}{22}$

$\bar{x} = \frac{578}{22}$; $\bar{x} = 26.27$

c) Ordenemos:

24,25,25,25,25,25,25,26,26,26,26,26,26,27,27,27,27,28,28,28,28,28

Me = $\frac{26+26}{2}$; Me= 26

d) Existen 2 modas

Mo1=25 ; Mo2=26

e) Dm= $\frac{\sum|xi-x|}{n}$

Dm= $\frac{32,54}{22}$; Dm =1.48

f) $\sigma^2 = \frac{\sum XI^2}{n} - \bar{X}^2$

$\sigma^2 = \frac{15218}{22} - 26{,}27^2$

$\sigma^2 = 1{,}61$

g) $\sigma = \sqrt{1{,}61}$

$\sigma = 1{,}27$

Responder: Si se eliminan los 5 valores de 28

a) La media aritmética varia de 26,27 a 25,76, varia en aproximadamente en 2%

13) a) A $\% = \frac{(11+8+3+5)}{31} * 100$; $\% = 87{,}1\%$

B $\% = \frac{(13+4+4+3)}{30} * 100$; $\% = 80\%$

C $\% = \frac{(11+8+5+2)}{30} * 100$; $\% = 86{,}7\%$

b) A $\bar{X} = \frac{\sum XI.FI}{n}$

$\bar{X} = \frac{4(5{,}78)+11(7{,}25)+8(8{,}35)+3(9{,}25)+5(9{,}56)}{31}$

$\bar{X} = \frac{245{,}22}{31}$; $\bar{X} = 7{,}9$

B $\bar{X} = \frac{6(6{,}1)+13(7{,}15)+4(8{,}05)+4(9{,}38)+3(908)}{30}$

$\bar{X} = \frac{226{,}51}{30}$; $\bar{X} = 7{,}55$

C $\bar{X} = \frac{4(6)+11(7{,}38)+8(8)+5(8{,}65)+2(9{,}25)}{31}$

$\bar{X} = \frac{230{,}93}{30}$; $\bar{X} = 7{,}7$

El curso con mayor promedio es el A

14. Primero calculamos $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{11(3)+12(4)+13(6)+14(7)+15(4)+16(3)+17(2)+18(11)}{30} = \frac{417}{30}$$

$\bar{x} = 13{,}9$

a) $Dm = \frac{\sum|Xi - \bar{x}|}{n}$

$$Dm = \frac{16,2}{30} = 0,54$$

b) $\sigma^2 = \frac{\sum Xi^2}{n} - \overline{x^2}$

$$\sigma^2 = \frac{5895}{30} - 13,9^2$$

$$\sigma^2 = 3,3$$

c) $\sigma = \sqrt{3,3}$

$$\sigma = 1,81$$

15. a) $R = Xmax - Xmin$

$R = 11 - 2 \quad ; \quad R = 9$

b) Primero calculamos $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{3+2+3+5+8+3+2+12+8+4+2+10+11}{13} = \frac{73}{13}$$

$$\bar{x} = 5,6$$

$$Dm = \frac{\sum|x - xi|}{n}$$

$$Dm = \frac{41,8}{13} = 3,2$$

c) $\sigma^2 = \frac{\sum(xi)^2}{n} - \overline{x^2}$

$$\sigma^2 = \frac{573}{13} - 5,6^2$$

$$\sigma^2 = 12,72$$

d) $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

$$\sigma = \sqrt{12,72}$$

$\sigma = \ 3{,}6$

16. a) $R = Xmax - Xmin$

$R = 9 - 1 \quad ; \quad R = 8$

b) $\bar{x} = \frac{25(1)+30(3)+35(5)+20(7)+15(9)}{125} = \frac{565}{125}$

$\bar{x} = 4{,}52$

c) $Dm = \frac{\sum|Xi-\bar{x}|}{n}$

$Dm = \frac{267{,}2}{125} = 2{,}13$

d) $\sigma^2 = \frac{\sum xi^2}{n} - \bar{x}^2$

16. Serie: 21, 21, 34, 34, 34, 45, 55, 55,55

$\bar{x} = \frac{21+21+34+34+34+45+55+55+55}{9} = \frac{354}{9}$

$\bar{x} = 39{,}3$

$Dm = \frac{\sum|Xi-\bar{x}|}{n}$

$Dm = \frac{\sum|Xi-\bar{x}|}{n}$

$\sigma^2 = \frac{2(21)^2+3(34)^2+45^2+3(55)^2}{9} - 39{,}3^2$

$\sigma^2 = \frac{15450}{9} - 1544{,}49$

$\sigma^2 = 172{,}18$

$\sigma = \sqrt{172{,}18} = 13{,}12$

Serie: 21, 21, 34, 34, 34, 45, 55, 55,55, 55

$$\bar{x} = \frac{21 + 21 + 34 + 34 + 34 + 45 + 55 + 55 + 55 + 55}{10} = \frac{409}{10}$$

$\bar{x} = 40{,}9$

$$Dm = \frac{\sum|Xi - \bar{x}|}{n}$$

$$Dm = \frac{121}{10} = 12{,}1$$

$$\sigma^2 = \frac{2(21)^2 + 3(34)^2 + 45^2 + 4(55)^2}{10} - 40{,}9^2$$

$$\sigma^2 = \frac{18475}{10} - 1672{,}81$$

$$\sigma^2 = 174{,}69$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

$$\sigma \sqrt{174{,}69} = 13{,}2$$

17)

XI	FI
0	5
1	10
2	10
3	4
4	1
	30

a) Existen 2 modas

Mo1=1 Mo2=2

b) $\bar{x} = \frac{\sum xi.fi}{n}$; $\bar{x} = \frac{0(5)+1(10)+2(10)+3(4)+4(1)}{30}$; $\bar{x} = \frac{46}{30}$; $\bar{x} = 1{,}53$

c) Me = $\frac{1+2}{2}$; $Me = 1{,}5$

18) Tabla en el libro de texto del estudiante

19) a) Moda Mo=4 (Su fi =682)

b) $\bar{x} = \frac{0(82)+1(125)+2(323)+3(624)+4(682)+5(448)+6(270)+7(92)+8(47)+9(7)}{2700}$

$\bar{x} = \frac{10314}{2700}$; $\bar{x} = 3{,}82$

c) Mediana como el total son 2700 datos → $\frac{4}{2}$=1350 , sumaremos los fi hasta llegar a un valor cercano a 1350

Me= 4

d) R=9-0 =9

e) Dm = $\frac{\sum|xi-\bar{x}|.fi}{4}$; $Dm = \frac{3530{,}56}{2700}$; Dm=1,3

f) $\sigma^2 = \frac{\sum xi^2.fi}{n} - \bar{x}^2$

$$\sigma^2 = \frac{82(0)^2 + 125(1)^2 + 323(2)^2 + 624(3)^2 + 682(4)^2 + 448(5)^2 + 270(6)^2 + 92(7)^2 + 47(8)^2}{2700}$$

$$\sigma^2 = \frac{46948}{2700} - 14{,}6$$

$$\sigma^2 = 2{,}8$$

g) $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$; $\sigma = \sqrt{2{,}8}$; $\sigma = 1{,}7$

Estos valores nos muestran que la mayoría de datos están cercanos a la media aritmética

20) Para la tabla a

Mo=4

Me=5

R=9-1 ; R= 8

a) $\bar{x} = \frac{12(1)+15(2)+9(3)+18(4)+17(5)+15(6)+11(7)+6(8)+8(9)}{111}$

$\bar{x} = \frac{513}{11}$; $\bar{x} = 4{,}62$

b) Dm = $\frac{\sum|xi-\bar{x}|.fi}{n}$; $Dm = \frac{226{,}02}{111}$; $Dm = 2{,}04$

c) $\sigma^2 = \frac{\sum|xi|^2.fi}{n} - \bar{x}$

$$\sigma^2 = \frac{2977}{111} - 4{,}22^2$$

$$\sigma^2 = 5{,}47$$

d) $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$; $\sigma = \sqrt{5{,}47}$; $\sigma = 2.3$

Para la tabla b

Mo: 21

Me:20

$$\bar{x} = \frac{3(18) + 12(19) + 54(20) + 66(21) + 57(22) + 55(23) + 18(24) + 11(25)}{273}$$

$$\bar{x} = \frac{5920}{273} \qquad ;\ \bar{x} = 21{,}7$$

$$\text{Dm}=\frac{\sum|xi-x|.fi}{n} \qquad ;\ Dm = \frac{4919{,}68}{273} \qquad ;\ Dm = 18{,}02$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum|xi|^2.fi}{n} - \bar{x}^2$$

$$\sigma^2 = \frac{129936}{373} - 21{,}7^2 \qquad ;\ \sigma^2 = 5{,}06$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \qquad ;\ \sigma = \sqrt{5{,}06} \qquad ;\sigma = 2{,}25$$

Solucionario

21. $R = Xmax - Xmin$

$R = 39 - 21 \quad ; \quad R = 18$

Tenemos 3 intervalos de 6

intervalo	xi	fi
[21-27[	24	26
[27-33[	30	16
[33-39[	36	3

22. Si aumentamos los valores, el rango no cambia

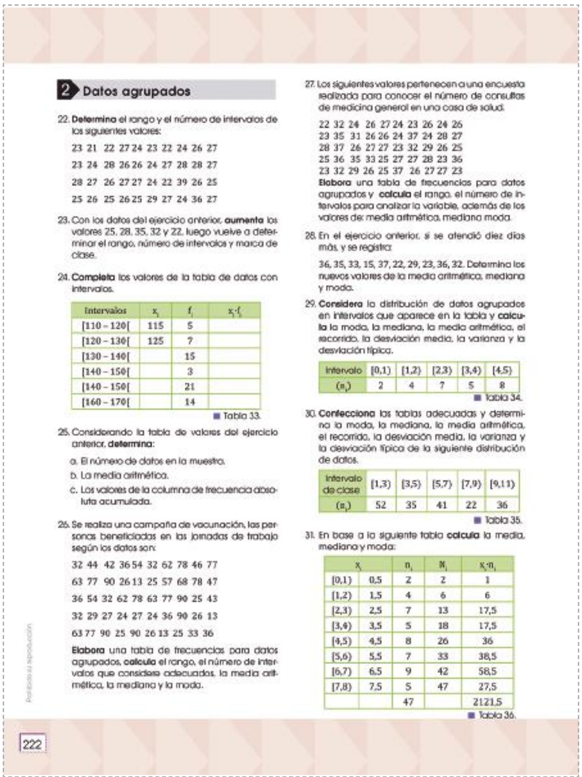
$R = 39 - 21 \quad ; \quad R = 18$

intervalo	xi	fi
[22-27[		27
[27-32[		14
[32-37[		9

23.

intervalos	xi	fi	xi.fi	fa
[110-120[	115	5	575	0,08
[120-130[	125	7	875	0,19
[130-140[	135	15	2025	0,42
[140-150[	145	3	435	0,47
[140-150[	145	21	3045	0,79
[160-170[	165	14	2310	1,00

Página 222



2 Datos agrupados

22. **Determina** el rango y el número de intervalos de los siguientes valores:

23 21 22 27 24 23 22 24 26 27
23 24 28 26 26 24 27 28 28 27
28 27 26 27 27 24 22 39 26 25
25 26 25 26 25 29 27 24 36 27

23. Con los datos del ejercicio anterior, **aumenta** los valores 25, 28, 35, 32 y 22, luego vuelve a determinar el rango, número de intervalos y marca de clase.

24. **Completa** los valores de la tabla de datos con intervalos.

Intervalos	x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
[110 – 120[	115	5	
[120 – 130[	125	7	
[130 – 140[		15	
[140 – 150[		3	
[140 – 150[		21	
[160 – 170[		14	

Tabla 33.

25. Considerando la tabla de valores del ejercicio anterior, **determina**:

a. El número de datos en la muestra.
b. La media aritmética.
c. Los valores de la columna de frecuencia absoluta acumulada.

26. Se realiza una campaña de vacunación, las personas beneficiadas en las jornadas de trabajo según los datos son:

32 44 42 36 54 32 62 78 46 77
63 77 90 26 13 25 57 68 78 47
36 54 32 62 78 63 77 90 25 43
32 29 27 24 27 24 36 90 26 13
63 77 90 25 90 26 13 25 33 36

Elabora una tabla de frecuencias para datos agrupados, **calcula** el rango, el número de intervalos que considere adecuados, la media aritmética, la mediana y la moda.

27. Los siguientes valores pertenecen a una encuesta realizada para conocer el número de consultas de medicina general en una casa de salud.

22 32 24 26 27 24 23 26 24 26
23 35 31 26 26 24 37 24 28 27
28 37 26 27 27 23 32 29 26 25
25 36 35 33 25 27 27 28 23 36
23 32 29 26 25 37 26 27 27 23

Elabora una tabla de frecuencias para datos agrupados y **calcula** el rango, el número de intervalos para analizar la variable, además de los valores de: media aritmética, mediana moda.

28. En el ejercicio anterior, si se atendió diez días más, y se registra:

36, 35, 33, 15, 37, 22, 29, 23, 36, 32. Determina los nuevos valores de la media aritmética, mediana y moda.

29. **Considera** la distribución de datos agrupados en intervalos que aparece en la tabla y **calcula** la moda, la mediana, la media aritmética, el recorrido, la desviación media, la varianza y la desviación típica.

Intervalo	[0,1)	[1,2)	[2,3)	[3,4)	[4,5)
(n_i)	2	4	7	5	8

Tabla 34.

30. **Confecciona** las tablas adecuadas y determina la moda, la mediana, la media aritmética, el recorrido, la desviación media, la varianza y la desviación típica de la siguiente distribución de datos.

Intervalo de clase	[1,3)	[3,5)	[5,7)	[7,9)	[9,11)
(n_i)	52	35	41	22	36

Tabla 35.

31. En base a la siguiente tabla **calcula** la media, mediana y moda:

x_i		n_i	N_i	$x_i \cdot n_i$
[0,1)	0,5	2	2	1
[1,2)	1,5	4	6	6
[2,3)	2,5	7	13	17,5
[3,4)	3,5	5	18	17,5
[4,5)	4,5	8	26	36
[5,6)	5,5	7	33	38,5
[6,7)	6,5	9	42	58,5
[7,8)	7,5	5	47	27,5
		47		2121,5

Tabla 36.

222

24. a) Muestra: $5 + 7 + 15 + 3 + 21 + 14$

Muestra = 65

b) $\bar{x} = \frac{115(5)+125(7)+135(15)+145(3)+145(21)+165(14)}{65} = \frac{9265}{65}$

$\bar{x} = 142{,}5$

c) $fr = \frac{fi}{n}$ y la frecuencia relativa acumulada fa es la suma consecutiva de las frecuencias relativas de cada clase.

25. $R = 90 - 13$; $R = 77$

Tenemos 7 intervalos de 12

intervalo	xi	fi
[13-24[	18.5	3
[24-35[	29.5	16
[35-46[	40.5	7
[46-57[	51.5	5
[57-68 [	62.5	6
[68-79[	73.5	8
[79-90]	84.5	5

a) $\bar{x} = \frac{3(18.5)+16(29.5)+7(40.5)+5(51.5)+6(62.5)+8(73.5)+5(84.5)}{50} = \frac{2398{,}5}{50}$

$\bar{x} = 47{,}97$

b) Clase de la mediana 35 – 46

$$Me = 35 - \frac{\frac{50}{2} - 19}{7} * 11$$

$$Me = 35 - \frac{6(11)}{7} = 25{,}6$$

c) Clase de la moda 24 - 35

$$Mo = 24 + \frac{(16-3)}{(16-3)+(16-7)}$$

$$Mo = 24 + \frac{13}{13+9} = 24{,}6$$

26. $R = 37 - 22 \quad ; \qquad R = 15$

Tenemos 3 intervalos de 5

intervalo	xi	fi
[22-27[	24,5	27
[27-32[	29,5	14
[32-37[	34,5	9
		50

$$\bar{x} = \frac{27(24{,}5)+14(29{,}5)+9(34{,}5)}{50} = \frac{1385}{50}$$

$$\bar{x} = 27{,}7$$

Clase de mediana 22 - 27

$$Me = 22 + \frac{\frac{50}{2}-0}{27} * 5$$

$$Me = 22 + \frac{25(5)}{27} = 26{,}6$$

Clase de la moda 22- 27

$$Mo = 22 + \frac{(17-0)}{(17-0)+(17-14)}$$

$$Mo = 22 + \frac{17}{20} = 22{,}85$$

27. El rango cambia $R = 37 - 15 \quad ; \qquad R = 22$. Si sumamos y restamos 1, tenemos 4 intervalos de 6

$$\bar{x} = \frac{17(1)+23(17)+29(25)+35(17)}{60} = \frac{1728}{60}$$

$\bar{x} = 28{,}8$

intervalo	xi	fi
[14 - 20[	17	1
[20 - 26[	23	17
[26 - 32[	29	25
[32 - 38[	35	17
		60

Clase de la media 26 – 32

$$Me = 26 + \frac{\frac{60}{2} - 18}{25} * 6$$

$$Me = 26 + \frac{12(6)}{25} = 28{,}9$$

Clase de la moda 26 – 32

$$Mo = 26 + \frac{(25-17)}{(25-17)+(25-17)} * 6$$

$$Mo = 26 + \frac{8(6)}{16} = 29$$

28. Recorrido:

$$R = Xmax - Xmin$$

$$R = 5 - 0 \quad ; \quad R = 5$$

intervalo	xi	fi
[0 - 1[	0,5	2
[1 - 2[	1,5	4
[2 - 3[	2,5	7
[3 - 4[	3,5	5
[4 - 5[	4,5	8

$$\bar{x} = \frac{2(0{,}5)+4(1{,}5)+7(2{,}5)+5(3{,}5)+8(4{,}5)}{26} = \frac{78}{26}$$

$$\bar{x} = 3$$

La mitad de los datos es 13

Clase de la media 2 – 3

$$Me = 2 + \frac{\frac{26}{2} - 6}{7} * 1$$

$$Me = 2 + \frac{7}{7} * 1 = 3$$

Clase de la moda 2 – 3

$$Mo = 2 + \frac{(7-2)}{(7-2)+(7-5)} * 1$$

$$Mo = 2 + \frac{5}{7} = 2{,}7$$

$$Dm = \frac{2|0,5-3|+4|1,5-3|+7|2,5-3|+5|3,5-3|+8|4,5-3|}{26} = \frac{29}{26}$$

$$Dm = 0,9$$

$$\sigma^2 = \frac{2(0,5)^2+4(1,5)^2+7(2,5)^2+5(3,5)^2+8(4,5)^2}{26} - 3^2$$

$$\sigma^2 = \frac{276,5}{26} - 9 = 1,6$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

$$\sigma = \sqrt{1,6} = 1,3$$

29. $R = 11 - 1 \quad ; \quad R = 10$

$$\bar{x} = \frac{52(2)+35(4)+41(6)+22(8)+36(10)}{186} = \frac{1026}{186}$$

$$\bar{x} = 5,5$$

$$Dm = \frac{52|2-5,5|+35|4-5,5|+41|6-5,5|+22|8-5,5|+36|10-5,5|}{186} = \frac{472}{186}$$

$$Dm = 2,5$$

$$\sigma^2 = \frac{52(2)^2+35(4)^2+41(6)^2+22(8)^2+36(10)^2}{186} - 5.5^2$$

$$\sigma^2 = \frac{7252}{186} - 30,25$$

$$\sigma^2 = 8,74$$

intervalo	xi	fi
[1 - 3[	2	52
[3 - 5[	4	35
[5 - 7[	6	41
[7 - 9[	8	22
[9 - 11[	10	36
		186

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

$$\sigma = \sqrt{8,74}$$

$$\sigma = 2,96$$

30) $\bar{x} = \frac{\sum fi.xi}{ni}$

$$\bar{x} = \frac{2121,5}{47}$$

$$\bar{x} = 45,1$$

Mediana

Como $\frac{n}{2} = 23{,}5$; la clase de la media sea [4-5)

$$Me = 4 + \frac{\frac{n}{2} - 18}{26} * 1$$

Me=4+0,2

Me=4,211

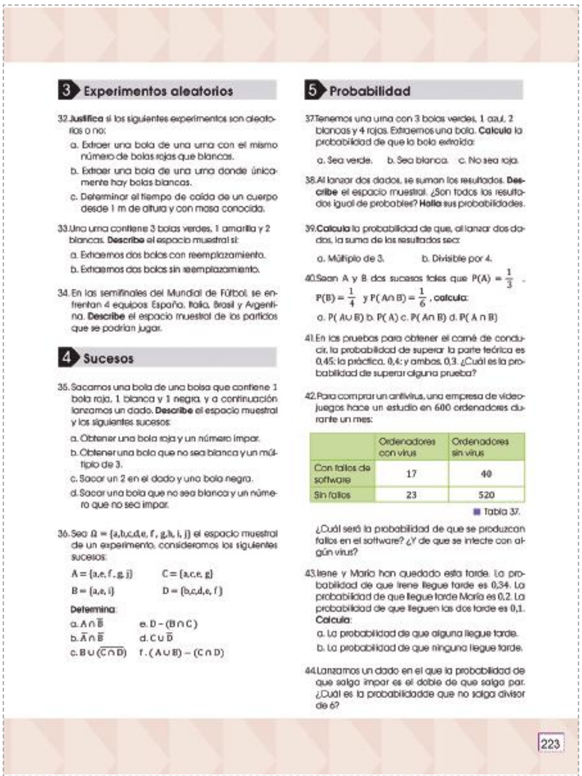
Clase de la moda [6-7)

$$Mo = 6 + \frac{(9-7)}{(9-7)+(9-5)} * 1$$

$$Mo = 6 + \frac{2}{6}$$

Mo=6,33

Página 223



3 Experimentos aleatorios

32. **Justifica** si los siguientes experimentos son aleatorios o no:
   a. Extraer una bola de una urna con el mismo número de bolas rojas que blancas.
   b. Extraer una bola de una urna donde únicamente hay bolas blancas.
   c. Determinar el tiempo de caída de un cuerpo desde 1 m de altura y con masa conocida.

33. Una urna contiene 3 bolas verdes, 1 amarilla y 2 blancas. **Describe** el espacio muestral si:
   a. Extraemos dos bolas con reemplazamiento.
   b. Extraemos dos bolas sin reemplazamiento.

34. En las semifinales del Mundial de Fútbol, se enfrentan 4 equipos: España, Italia, Brasil y Argentina. **Describe** el espacio muestral de los partidos que se podrían jugar.

4 Sucesos

35. Sacamos una bola de una bolsa que contiene 1 bola roja, 1 blanca y 1 negra, y a continuación lanzamos un dado. **Describe** el espacio muestral y los siguientes sucesos:
   a. Obtener una bola roja y un número impar.
   b. Obtener una bola que no sea blanca y un múltiplo de 3.
   c. Sacar un 2 en el dado y una bola negra.
   d. Sacar una bola que no sea blanca y un número que no sea impar.

36. Sea $\Omega = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ el espacio muestral de un experimento, consideramos los siguientes sucesos:
   $A = \{a, e, f, g, j\}$ $C = \{a, c, e, g\}$
   $B = \{a, e, i\}$ $D = \{b, c, d, e, f\}$

   Determina:
   a. $A \cap \overline{B}$ e. $D - (B \cap C)$
   b. $\overline{A} \cap \overline{B}$ d. $C \cup \overline{D}$
   c. $B \cup (\overline{C \cap D})$ f. $(A \cup B) - (C \cap D)$

5 Probabilidad

37. Tenemos una urna con 3 bolas verdes, 1 azul, 2 blancas y 4 rojas. Extraemos una bola. **Calcula** la probabilidad de que la bola extraída:
   a. Sea verde.   b. Sea blanca.   c. No sea roja.

38. Al lanzar dos dados, se suman los resultados. **Describe** el espacio muestral. ¿Son todos los resultados igual de probables? **Halla** sus probabilidades.

39. **Calcula** la probabilidad de que, al lanzar dos dados, la suma de los resultados sea:
   a. Múltiplo de 3.   b. Divisible por 4.

40. Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ y $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$, **calcula**:
   a. $P(A \cup B)$ b. $P(A)$ c. $P(A \cap B)$ d. $P(A \cap B)$

41. En las pruebas para obtener el carné de conducir, la probabilidad de superar la parte teórica es 0,45; la práctica, 0,4; y ambas, 0,3. ¿Cuál es la probabilidad de superar alguna prueba?

42. Para comprar un antivirus, una empresa de videojuegos hace un estudio en 600 ordenadores durante un mes:

	Ordenadores con virus	Ordenadores sin virus
Con fallos de software	17	40
Sin fallos	23	520

Tabla 37.

¿Cuál será la probabilidad de que se produzcan fallos en el software? ¿Y de que se infecte con algún virus?

43. Irene y María han quedado esta tarde. La probabilidad de que Irene llegue tarde es 0,34. La probabilidad de que llegue tarde María es 0,2. La probabilidad de que lleguen las dos tarde es 0,1. **Calcula**:
   a. La probabilidad de que alguna llegue tarde.
   b. La probabilidad de que ninguna llegue tarde.

44. Lanzamos un dado en el que la probabilidad de que salga impar es el doble de que salga par. ¿Cuál es la probabilidadde que no salga divisor de 6?

223

Solucionario

Experimentos aleatorios

31. TX1 112861, página 200 ejercicio 6
32. TX1 112861, página 200 ejercicio 7
33. TX1 112861, página 200 ejercicio 8

Sucesos

34. TX1 112861, página 200 ejercicio 9
35. TX1 112861, página 200 ejercicio 10

Probabilidad

36. TX1 112861, página 200 ejercicio 11
37. TX1 112861, página 200 ejercicio 12
38. TX1 112861, página 200 ejercicio 13
39. TX1 112861, página 200 ejercicio 14
40. TX1 112861, página 201 ejercicio 15
41. TX1 112861, página 201 ejercicio 16
42. TX1 112861, página 201 ejercicio 17
43. TX1 112861, página 201 ejercicio 18

Solucionario

1) a) F
   b) V
   c) F
   d) V
   e) V
   f) F
   g) F

2) Respuesta c

intervalo	xi	fi
[2 - 4[	3	3
[4 - 6[	5	6
[6 - 8[	7	7

3) 3+6+3+8+4+5+X

7

$35 + x = 42$

X=42-35

X=7

Respuesta d

5) Rango =51-11

se suma y resta 1

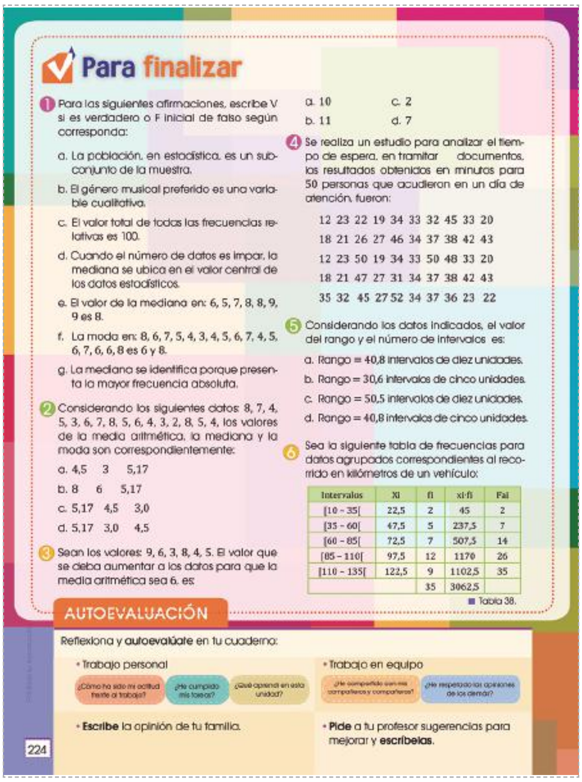
al valor máximo y mínimo

Rango = 4

Respuesta d

6) no tiene preguntas

Página 224



Para finalizar

1. Para las siguientes afirmaciones, escribe V si es verdadero o F inicial de falso según corresponda:
   a. La población, en estadística, es un subconjunto de la muestra.
   b. El género musical preferido es una variable cualitativa.
   c. El valor total de todas las frecuencias relativas es 100.
   d. Cuando el número de datos es impar, la mediana se ubica en el valor central de los datos estadísticos.
   e. El valor de la mediana en: 6, 5, 7, 8, 8, 9, 9 es 8.
   f. La moda en: 8, 6, 7, 5, 4, 3, 4, 5, 6, 7, 4, 5, 6, 7, 6, 6, 8 es 6 y 8.
   g. La mediana se identifica porque presenta la mayor frecuencia absoluta.
2. Considerando los siguientes datos: 8, 7, 4, 5, 3, 6, 7, 8, 5, 6, 4, 3, 2, 8, 5, 4, los valores de la media aritmética, la mediana y la moda son correspondientemente:
   a. 4,5 3 5,17
   b. 8 6 5,17
   c. 5,17 4,5 3,0
   d. 5,17 3,0 4,5
3. Sean los valores: 9, 6, 3, 8, 4, 5. El valor que se deba aumentar a los datos para que la media aritmética sea 6, es:
   a. 10 c. 2
   b. 11 d. 7
4. Se realiza un estudio para analizar el tiempo de espera, en tramitar documentos, los resultados obtenidos en minutos para 50 personas que acudieron en un día de atención, fueron:

   12 23 22 19 34 33 32 45 33 20
   18 21 26 27 46 34 37 38 42 43
   12 23 50 19 34 33 50 48 33 20
   18 21 47 27 31 34 37 38 42 43
   35 32 45 27 52 34 37 36 23 22
5. Considerando los datos indicados, el valor del rango y el número de intervalos es:
   a. Rango = 40,8 intervalos de diez unidades.
   b. Rango = 30,6 intervalos de cinco unidades.
   c. Rango = 50,5 intervalos de diez unidades.
   d. Rango = 40,8 intervalos de cinco unidades.
6. Sea la siguiente tabla de frecuencias para datos agrupados correspondientes al recorrido en kilómetros de un vehículo:

Intervalos	Xi	fi	xi·fi	Fai
[10 - 35[	22,5	2	45	2
[35 - 60[	47,5	5	237,5	7
[60 - 85[	72,5	7	507,5	14
[85 - 110[	97,5	12	1170	26
[110 - 135[	122,5	9	1102,5	35
		35	3062,5	

Tabla 38.

AUTOEVALUACIÓN

Reflexiona y **autoevalúate** en tu cuaderno:

- Trabajo personal
  ¿Cómo ha sido mi actitud frente al trabajo? ¿He cumplido mis tareas? ¿Qué aprendí en esta unidad?
- Trabajo en equipo
  ¿He compartido con mis compañeros y compañeras? ¿He respetado las opiniones de los demás?
- **Escribe** la opinión de tu familia.
- **Pide** a tu profesor sugerencias para mejorar y **escríbelas**.

224

Solucionario

1. Indica que **variables** son **cualitativas** y cuales **cuantitativas**:

   Comida Favorita, Profesión que te gusta, Número de goles marcados por tu equipo favorito en la última temporada, Número de alumnos de tu Instituto, El color de los ojos de tus compañeros de clase, Coeficiente intelectual de tus compañeros de clase.

2. Los miembros de una cooperativa de viviendas tienen las siguientes edades:

   42 60 60 38 60 63 21 66 56 57 51 57 44 45 35 30 35 47 53 49 50 49 38 45 28 41 47 42 53 32

   54 38 40 63 48 33 35 61 47 41 55 53 27 20 21 42 21 39 39 34 45 39 28 54 33 35 43 48 48 27

   53 30 29 53 38 52 54 27 27 43 28 63 41 23 58 56 59 60 40 24

   Elabore una tabla de frecuencias.

   Calcule la media y la desviación típica.

3. Sea una distribución estadística que viene dada por la siguiente tabla:

x_i	f_i
61	5
64	18
67	42
70	27
73	8

Calcular:

La moda, mediana y media.

El rango, desviación media, varianza y desviación típica.

4. Las alturas de los jugadores de un equipo de baloncesto vienen dadas por la tabla:

Altura	Nº de jugadores
[170, 175)	1
[175, 180)	3
[180, 185)	4
[185, 190)	8
[190, 195)	5
[195, 2.00)	2

Calcular:

La media.

La mediana.

La desviación típica.

¿Cuántos jugadores se encuentran por encima de la media más una desviación típica?

1 Se lanzan tres monedas y observamos qué sale.

a) Construye el espacio muestral.

b) Describe los sucesos *A:* «salir al menos una cara», *B:* «obtener al menos dos cruces», *C:* «la primera y la última sean caras».

c) Calcula $A \cap B$, $B \cap C$, $A - C$ y $A \cap (B \cup C)$.

2 Consideramos el experimento aleatorio de lanzar 2 dados, uno de seis caras y otro de doce, y sumar los resultados obtenidos. Describe el espacio muestral mediante una tabla de contingencia.

a) ¿Son todos los sucesos elementales equiprobables?

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener más de 14?

Sol.: b) 0,1389

3 Sean A y B sucesos con $P(\overline{A}) = \frac{3}{5}$, $P(B/A) = \frac{1}{2}$ y $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$, calcula:

a) $P(B)$ b) $P(A \cup \overline{B})$ c) $P(A/\overline{B})$

Sol.: a) 0,6; b) 0,6; c) 0,5

4 Con un dado trucado la probabilidad de obtener un número par es de 0,8, la probabilidad de sacar un número mayor que 3 es de 0,75, y la probabilidad de que salga el 5 es 0,2. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 2?

Sol.: 0,25

5 Sean A y B sucesos con $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B/A) = \frac{1}{3}$ y $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$, responde a las siguientes preguntas:

a) ¿Son A y B independientes?

b) ¿Son A y B excluyentes?

c) Calcula $P(B)$.

d) Calcula $P(A/\overline{B})$

Sol.: c) 0,333; d) 0,5

6 La probabilidad de que mañana llueva es 0,53, la probabilidad de que sople viento es 0,62, y la probabilidad de que ni llueva ni sople viento es 0,25.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que mañana llueva y sople viento?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que mañana solo llueva o solo sople viento?

Sol.: a) 0,4; b) 0,35

7 En un colegio en el que hay 900 alumnos, el 55 % son chicos. En el recreo juegan al fútbol 100 chicos y 65 chicas, y al baloncesto 45 chicos y 60 chicas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido practique algún deporte?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea chico y no juegue a nada?

c) Si es chico, ¿cuál es la probabilidad de que juegue al baloncesto?

	BALONCESTO	FÚTBOL	NADA
ALUMNOS			
ALUMNAS			

Sol.: a) 0,3; b) 0,3889; c) 0,0909

8 La probabilidad de que en un experimento de laboratorio fallen los aparatos es de 0,05; además, la probabilidad de tener un error al tomar las medidas es de 0,15. En cualquier caso, la probabilidad de que ocurra alguna de las dos cosas y que deba repetirse el experimento es de 0,18. ¿Cuál es la probabilidad de fallar al medir y, además, de que falle algún aparato?

Sol.: 0,02

9 Un acuario tiene un 30 % de posibilidades de tener una plaga de algas y un 15 % de posibilidades de falta de nitrógeno. Las probabilidades de supervivencia de los peces disco el primer mes es de 0,6, que mengua a 0,4 con plaga de algas y a 0,2 con falta de nitrógeno.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, al introducir un pez disco, este sobreviva?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el acuario tenga falta de nitrógeno si hay un pez disco vivo?

Sol.: a) 0,48; b) 0,0625

10 El número de estudiantes que vienen andando triplica al de los que vienen en bicicleta, que son el mismo número que los que vienen en coche. Además, las posibilidades de llegar tarde andando son del 20 %; en bicicleta, del 15 %, y en coche, del 30 %.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno venga en bicicleta?

b) Si elegimos un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que llegue tarde?

c) Si un alumno llega tarde, ¿con qué probabilidad ha venido en bicicleta?

Sol.: a) 0,2; b) 0,21; c) 0,1428

Solucionario

1. Cualitativas:
   Comida Favorita. Profesión que te gusta. El color de los ojos de tus compañeros de clase.

   Cuantitativas:
   Número de goles marcados por tu equipo favorito en la última temporada. Número de alumnos de tu Instituto. Coeficiente intelectual de tus compañeros de clase.

2. **SOLUCIÓN:**

	fi
20 - 29	14
30 - 39	17
40 - 49	22
50 - 59	18
60 - 69	9
total	80

Cálculo de la media:
Puede calcularse directamente sumando las edades de todos los miembros de la cooperativa y dividiendo por el total que en este caso es ochenta, el resultado es una media de 43,29.
También:

	x_i	fi	$x_i n_i$
20-29	25	14	350
30-39	35	17	595
40-49	45	22	990
50-59	55	18	990
60-69	65	9	585
Total		80	3510

$\bar{x} = \frac{3510}{80} = 43{,}875$, por tanto, podemos decir que la media es de casi 44 años.

Cálculo de la desviación típica:

Edad	x_i	n_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 n$
20-29	25	14	-18,875	356,2656	4987,71875
30-39	35	17	-8,875	78,7656	1339,01563
40-49	45	22	1,125	1,2656	27,84375
50-59	55	18	11,125	123,7656	2227,78125
60-69	65	9	21,125	446,2656	4016,39063

Total		**80**			12598,75

$$S_x = \sqrt{\frac{12598{,}75}{80}} = 12{,}549$$

La desviación típica es de 12,5 años

3.

xi	fi	Fi	xi · fi	|x – x |	|x – x | · fi	xi2 · fi
61	5	5	305	6.45	32.25	18 605
64	18	23	1152	3.45	62.10	73 728
67	42	65	2814	0.45	18.90	188 538
71	27	92	1890	2.55	68.85	132 300
73	8	100	584	5.55	44.40	42 632
	100		6745		226.50	455 803

Moda Mo = 67

Mediana 100/2 = 50 Me = 67

Media

$$\bar{x} = \frac{6745}{100} = 67.45$$

Desviación media

$$D_{\bar{x}} = \frac{226.5}{100} = 2.265$$

Rango r = 73 – 61 = 12

Varianza

$$\sigma^2 = \frac{455803}{100} - 67.45^2 = 8.53$$

Desviación típica

$$\sigma = \sqrt{8.53} = 2.92$$

4.

	x_i	f_i	F_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
[1.70, 1.75)	1.725	1	1	1.725	2.976
[1.75, 1.80)	1.775	3	4	5.325	9.453
[1.80, 1.85)	1.825	4	8	7.3	13.324
[1.85, 1.90)	1.875	8	16	15	28.128
[1.90, 1.95)	1.925	5	21	9.625	18.53
[1.95, 2.00)	1.975	2	23	3.95	7.802
		23		42.925	80.213

Media

$$\bar{x} = \frac{42.925}{23} = 1.866$$

Mediana

$$\frac{23}{2} = 11.5 \qquad Me = 1.85 + \frac{\frac{23}{2} - 8}{8} \cdot 0.05 = 1.872$$

Desviación típica

$$\sigma = \sqrt{\frac{80.213}{23} - 1.866^2} = 0.077$$

x + σ = 1.866+ 0.077 = 1.943

Este valor pertenece a un percentil que se encuentra en el penúltimo intervalo.

$$1.943 = 1.90 + \frac{\frac{23}{100} \cdot k - 16}{5} \qquad k = 88$$

$$\frac{100}{100-88} = \frac{23}{x} \qquad x = 3$$

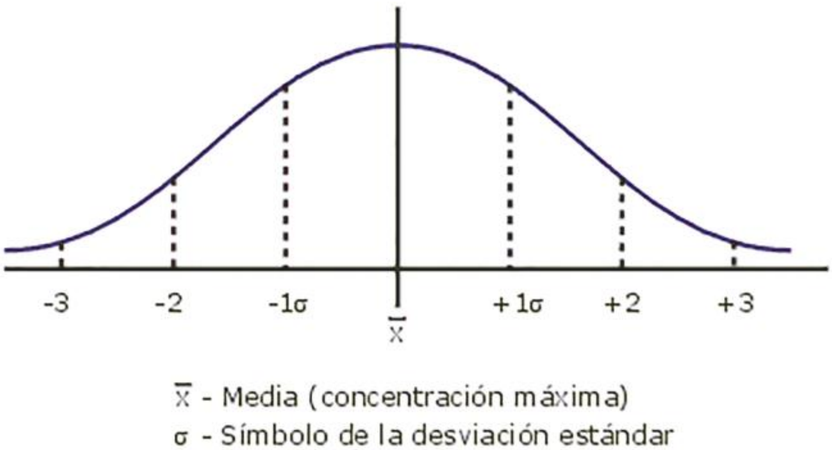
Sólo hay 3 jugadores por encima de x + σ.

AMPLIACIÓN DE CONTENIDOS

La Campana de Gauss

En cursos superiores el estudiante deberá conocer y familiarizarse con el concepto de la función gaussiana o conocida también con el nombre de Campana de Gauss, que tiene las siguientes aplicaciones:

- Los orbitales moleculares usados en química computacional son combinaciones lineales de funciones gaussianas llamados orbitales gaussianos.
- También es muy extendido su uso en Economía y Administración.
- Matemáticamente, la función gaussiana juega un papel importante en la definición de los polinomios de Hermite.
- Consecuentemente, están también asociadas con el estado de vacío en la teoría cuántica de campos.
- Los rayos gaussianos se usan en sistemas ópticos y de microondas.
- Las funciones gaussianas se utilizan como filtro de suavizado en el procesamiento digital de imágenes.



http://goo.gl/tgJpAa

Trabajo Inclusivo

1. Los pesos de los 65 empleados de una fábrica vienen dados por la siguiente tabla:

Pesos	fi
[50, 60)	8
[60, 70)	10
[70, 80)	16
[80,90)	14
[90, 100)	10
[100, 110)	5
[110, 120)	2

Construir la tabla de frecuencias

2. Si yo tengo una canasta llena de peras y manzanas, de las cuales hay 20 peras y 10 manzanas.

¿Qué fruta es más probable que saque al azar de la canasta?

Respuesta a Trabajo Inclusivo

1.

	Xi	fi	Fi	ni	Ni
[50, 60)	55	8	8	0.12	0.12
[60, 70)	65	10	18	0.15	0.27
[70, 80)	75	16	34	0.24	0.51
[80,90)	85	14	48	0.22	0.73
[90, 100)	95	10	58	0.15	0.88
[100, 110)	105	5	63	0.08	0.96
[110, 120)	115	2	65	0.03	0.99
		65			

2. Para este ejemplo tenemos que 30 es el total de frutas en la canasta; es decir los casos posibles. Para calcular la probabilidad de sacar una manzana mis casos favorables son 10 puesto que existen sólo 10 manzanas. Así, aplicando la fórmula obtenemos que:

   P(Manzana)=10/30=1/3= 33.3% probable

   Calculando igual, la probabilidad de sacar pera es:

   P(Pera)=20/30=2/3= 66.7% probable

   Como 66.7 es mayor que 33.3 es más probable que saque una pera, pues hay más peras que manzanas en la canasta.

Solucionario

Redes bayesianas

- Las variables son el tipo de accidente, la edad del conductor, los factores atmosféricos, el sexo del conductor, la iluminación, el número de heridos y el número de personas involucradas en el accidente. Se basa en el teorema de Bayes.
- Actualmente, hay múltiples campos que utilizan las redes bayesianas, como la inteligencia artificial, la toma de decisiones, la meteorología, el reconocimiento facial, el estudio de infecciones, etc.

¿La intuición entiende de probabilidades?

- Probablemente elegirá el numero 00005 por su particularidad, pero los dos números son igual de probables. A priori, no hay números más probables que otros, de modo que atribuir más probabilidad de éxito a uno u otro no tiene sentido

El nacimiento de la estadística aplicada

- Respuesta sugerida:

A Galton se le puede considerar como el «padre» de la psicología diferencial, al aplicar los principios de su primo, Darwin, al estudio de las diferencias individuales.

Descubrió también que, con la edad, el oído humano pierde la percepción de las ondas de alta frecuencia (tonos agudos).

En lo que más afecta a la psicología, acuñó el concepto estadístico de correlación como una forma de determinar matemáticamente la relación entre dos variables (el procedimiento matemático fue refinado más tarde por su discípulo Karl Pearson).

Página 225

ZONA

UD. 6
Estadística y probabilidad

Redes bayesianas

En el año 2011, investigadores de la Universidad de Granada determinaron hasta 18 variables que pueden intervenir en un accidente mortal de tráfico, y solo con 7 de ellas ya es posible construir modelos probabilísticos basados en las **redes bayesianas**.

Entra en la red y accede a http://links.edebe.com/myeyaq, donde podrás encontrar más información al respecto. ¿Cuáles son estas 7 variables fundamentales? ¿En qué teorema probabilístico se basan?
Busca información sobre otros ámbitos (científicos, técnicos, sociales...) en los que se pueden realizar modelos probabilísticos basados en las redes bayesianas. ¿Qué utilidad pueden tener dichos modelos?

¿LA INTUICIÓN ENTIENDE DE PROBABILIDADES?

- En una administración de lotería, a una persona le dan a escoger entre el número 00 005 y el 48 679. ¿Qué número crees que escogerá? ¿Cuál es el razonamiento para elegir un número u otro? ¿Es un razonamiento matemático?
- Si a esta misma persona le dicen que en el último sorteo el primer premio fue para el número 48 679, ¿qué número crees que escogerá? ¿Cuál será su razonamiento? ¿Es un razonamiento matemático?
- En una clase de 30 estudiantes, están discutiendo la probabilidad de que, como mínimo, dos de ellos hayan nacido el mismo día. ¿A qué conclusión crees que llegarán? ¿Cuál es su razonamiento? ¿Es un razonamiento matemático?

El nacimiento de la estadística aplicada

Esta frase es del matemático y pensador británico Karl Pearson (1857-1936) que, entre otros aspectos, estableció las bases de la estadística matemática del siglo XX, llegando a definir los conceptos de desviación típica, correlación y análisis de la regresión.
Entra en Internet y averigua qué relación guardaba Pearson con otro científico británico y primo de Charles Darwin, Francis Galton (1822-1911), en cuanto al concepto de correlación que ambos trabajaron.
Se sabe que el valor del coeficiente de correlación de Pearson esta comprendido entre -1 y 1, y que existe una escala graduada que interpreta diferentes intervalos de valores de este coeficiente. Busca en Internet información sobre esta escala y qué significado otorga a cada grupo de valores.

Ingeniero estadístico

Si yo fuera ingeniero estadístico, mediante técnicas estadísticas y la complementación de herramientas computacionales, analizaría los datos del censo poblacional, determinando las medidas estadísticas de las variables consideradas en el censo, para luego entregar resultados como:

- ocho de cada diez personas tiene casa propia.
- cuatro de cada diez familias disponen del servicio de Internet.
- Cada familia ecuatoriana tiene en promedio 2 hijos.

225