Bachillerat General Unificado

MATEMÁTICA

3.º Curso

GUÍA DEL DOCENTE

DISTRIBUCIÓN GRATUITA
PROHIBIDA SU VENTA

Ministerio de Educación

Transformar la educación
MISIÓN DE TODOS

LNS

Matemática
3 BGU

GUÍA DEL DOCENTE

serie
Ingenios

EDITORIAL DON BOSCO
edebé

PRESIDENTE DE LA REPÚBLICA
Rafael Correa Delgado

MINISTRO DE EDUCACIÓN
Augusto Espinosa Andrade

Viceministro de Educación
Freddy Peñafiel Larrea

Viceministro de Gestión Educativa
Wilson Rosalino Ortega Mafla

Subsecretario de Fundamentos Educativos (E)
Miguel Ángel Herrera Pavo

Subsecretaria de Administración Escolar
Mirian Maribel Guerrero Segovia

Directora Nacional de Currículo (S)
María Cristina Espinosa Salas

Directora Nacional de Operaciones y Logística
Ada Leonora Chamorro Vásquez

© Ministerio de Educación del Ecuador, 2016
Av. Amazonas N34-451 y Atahualpa
Quito, Ecuador
www.educacion.gob.ec

La reproducción parcial o total de esta publicación, en cualquier forma y por cualquier medio mecánico o electrónico, está permitida siempre y cuando sea autorizada por los editores y se cite correctamente la fuente.

Ministerio de **Educación**

Editorial Don Bosco
OBRAS SALESIANAS DE COMUNICACIÓN

Marcelo Mejía Morales
Gerente general

Eder Acuña Reyes
Dirección editorial

Sylvia Freile Montero
Adaptación y edición de contenidos

Sylvia Freile Montero
Creación de contenidos nuevos

Luis Felipe Sánchez
Coordinación de estilo

Luis Felipe Sánchez
Revisión de estilo

Pamela Cueva Villavicencio
Coordinación gráfica

Pamela Cueva Villavicencio
Diagramación

Darwin Parra
Ilustración

Darwin Parra
Diseño de portada e ilustración

En alianza con

Grupo edebé
Proyecto: Matemáticas 2
Bachillerato segundo curso

Antonio Garrido González
Dirección general

José Luis Gómez Cutillas
Dirección editorial

María Banal Martínez
Dirección de edición de Educación Secundaria

Santiago Centelles Cervera
Dirección pedagógica

Juan López Navarro
Dirección de producción

Equipo de edición Grupo edebé
© grupo edebé, 2009
Paseo San Juan Bosco, 62
08017 Barcelona
www.edebe.com

EDITORIAL DON BOSCO

ISBN 978-9942-23-050-8
Primera impresión: julio 2016
Este libro fue evaluado por la Universidad Tecnológica Equinoccial, y obtuvo la certificación curricular del Ministerio de Educación el el 30 de mayo de 2016.

ADVERTENCIA
Un objetivo manifiesto del Ministerio de Educación es combatir el sexismo y la discriminación de género en la sociedad ecuatoriana y promover, a través del sistema educativo, la equidad entre mujeres y hombres. Para alcanzar este objetivo, promovemos el uso de un lenguaje que no reproduzca esquemas sexistas, y de conformidad con esta práctica preferimos emplear en nuestros documentos oficiales palabras neutras, tales como las personas (en lugar de los hombres) o el profesorado (en lugar de los profesores), etc. Sólo en los casos en que tales expresiones no existan, se usará la forma masculina como genérica para hacer referencia tanto a las personas del sexo femenino como masculino. Esta práctica comunicativa, que es recomendada por la Real Academia Española en su Diccionario Panhispánico de Dudas, obedece a dos razones: (a) en español es posible <referirse a colectivos mixtos a través del género gramatical masculino>, y (b) es preferible aplicar <la ley lingüística de la economía expresiva> para así evitar el abultamiento gráfico y la consiguiente ilegibilidad que ocurriría en el caso de utilizar expresiones como las y los, os/as y otras fórmulas que buscan visibilizar la presencia de ambos sexos.

Ministerio de Educación

Este libro de texto que tienes en tus manos es una herramienta muy importante para que puedas desarrollar los aprendizajes de la mejor manera. Un libro de texto no debe ser la única fuente de investigación y de descubrimiento, pero siempre es un buen aliado que te permite descubrir por ti mismo la maravilla de aprender.

El Ministerio de Educación ha realizado un ajuste curricular que busca mejores oportunidades de aprendizaje para todos los estudiantes del país en el marco de un proyecto que propicia su desarrollo personal pleno y su integración en una sociedad guiada por los principios del Buen Vivir, la participación democrática y la convivencia armónica.

Para acompañar la puesta en marcha de este proyecto educativo, hemos preparado varios materiales acordes con la edad y los años de escolaridad. Los niños y niñas de primer grado recibirán un texto que integra cuentos y actividades apropiadas para su edad y que ayudarán a desarrollar el currículo integrador diseñado para este subnivel de la Educación General Básica. En adelante y hasta concluir el Bachillerato General Unificado, los estudiantes recibirán textos que contribuirán al desarrollo de los aprendizajes de las áreas de Ciencias Naturales, Ciencias Sociales, Lengua y Literatura, Matemática y Lengua Extranjera-Inglés.

Además, es importante que sepas que los docentes recibirán guías didácticas que les facilitarán enriquecer los procesos de enseñanza y aprendizaje a partir del contenido del texto de los estudiantes, permitiendo desarrollar los procesos de investigación y de aprendizaje más allá del aula.

Este material debe constituirse en un apoyo a procesos de enseñanza y aprendizaje que, para cumplir con su meta, han de ser guiados por los docentes y protagonizados por los estudiantes.

Esperamos que esta aventura del conocimiento sea un buen camino para alcanzar el Buen Vivir.

Ministerio de Educación

2016

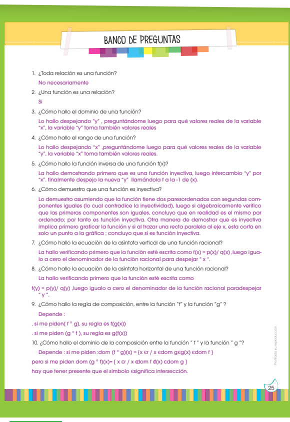
Prohibida su reproducción

CÓMO ES LA GUÍA. PROGRAMACIÓN Y ORIENTACIONES DE LAS UNIDADES DIDÁCTICAS

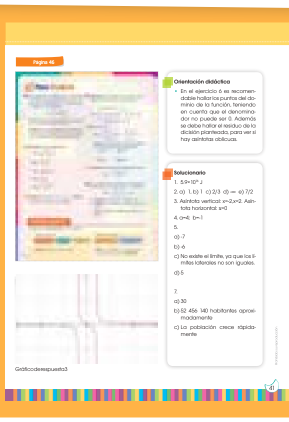
conoce tu guía

Unidad 0

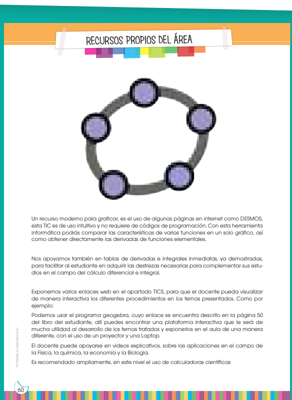
Banco de preguntas



Evaluación diagnóstica



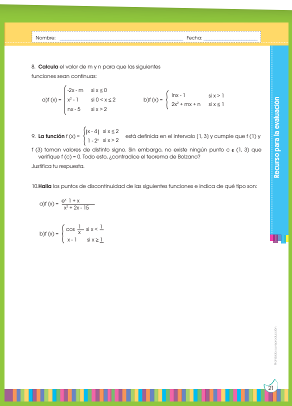
Recursos propios del área



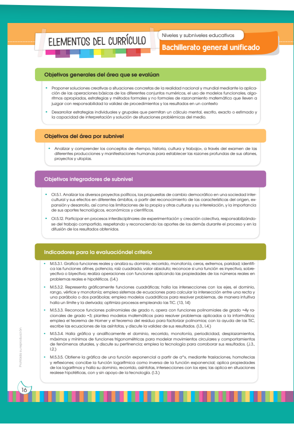
Ampliación de contenidos

Prohibida su reproducción

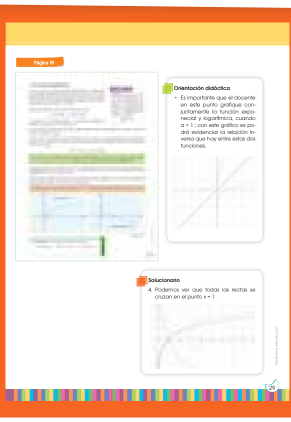
Recursos para fomentar el ingenio



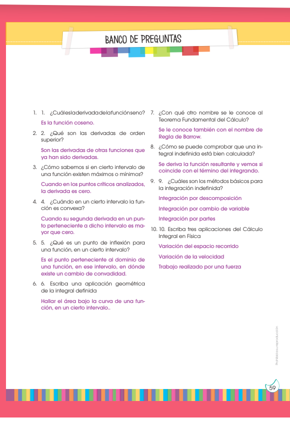
Elementos del currículo



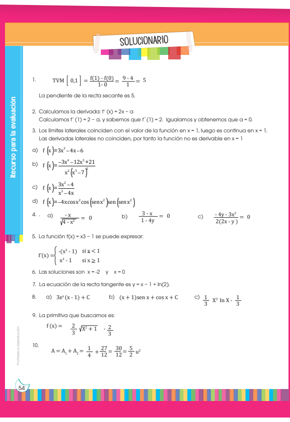
Ciclo de aprendizaje



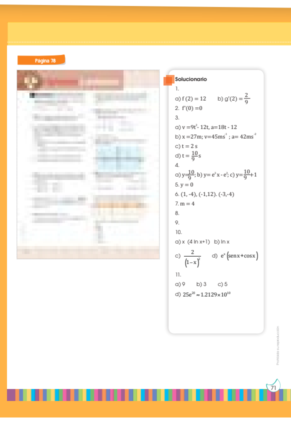
Trabajo inclusivo



Recursos para la evaluación



Solucionarios



Prohibida su reproducción

INGENIOS: El proyecto educativo de Editorial Don Bosco

La sociedad actual se enfrenta a nuevos retos que solo pueden superarse con educación, esfuerzo y talento personal y social.

INGENIOS es el proyecto de Editorial Don Bosco que promueve el desarrollo óptimo de los potenciales individuales de cada alumno, contribuye a mejorar la calidad de su educación y le permite afrontar con garantías de éxito los retos del futuro y alcanzar un mayor nivel de felicidad.

INGENIOS contempla las esencias del talento y los contextos del talento, contribuyendo a un modelo de escuela que potencia al máximo el desarrollo de la persona.

Las esencias del talento

Talento analítico y crítico

Aprender a pensar, utilizar rutinas de pensamiento, valorar el pensamiento... Toda una actitud ante la vida.

Talento creativo

Dejar aflorar la imaginación, la expresividad... en la resolución de problemas y retos.

Talento emprendedor

Iniciativa, imaginación, trabajo en equipo, comunicación, constancia... Persigue tus sueños.

Talento emocional

Talento que permite gestionar de manera eficaz las emociones y las hace fluir adecuadamente.

Talento social

Sensible a la justicia social para lograr un mundo mejor.

Talento cooperativo

Para aprender con y de los demás, y generar productos de valor.

Los contextos del talento

El desarrollo del talento se lleva a cabo en un contexto determinado, relacionado con un **modelo de escuela** y **de sociedad**:

1. **Un aprendizaje en un contexto práctico y funcional.** El proyecto INGENIOS integra el trabajo del desarrollo de las destrezas con criterios de desempeño y las inteligencias múltiples.
   - El aprendizaje se sitúa en contextos reales, próximos y significativos para los alumnos, mediante actividades prácticas y funcionales.
   - Las destrezas con criterios de desempeño se programan, se trabajan (actividades, tareas y proyectos) y se evalúan (rúbricas).
2. **Unas propuestas educativas abiertas al mundo.** Una gran parte del conocimiento se adquiere en contextos no formales, por ello nuestros libros están «abiertos al mundo» (aprendizaje 360º). Para ello:
   - Proponemos temas que despiertan el interés y la curiosidad y mueven a indagar y ampliar el conocimiento.
   - Invitamos al alumno a aprender fuera del aula.
3. **Un entorno innovador y tecnológico.** El proyecto INGENIOS ha adquirido un compromiso con la innovación y las nuevas tecnologías, avanzando en la Escuela del Siglo XXI. En ese sentido, los principales elementos de innovación son:
   - Cultura del pensamiento. Dar valor al pensar; enseñar a pensar.
   - Espíritu emprendedor. El emprendimiento es una oportunidad para desarrollar capacidades, y una necesidad social.
   - Compromiso TIC. La tecnología al servicio de la persona (humanismo tecnológico) en formatos amigables y compatibles.
4. **Un modelo de escuela integradora.** La **diversidad** de la sociedad tiene su reflejo en la escuela y una escuela para todos debe ofrecer respuestas a esa diversidad. Además, una mayor equidad contribuye a mejorar los resultados académicos. INGENIOS apuesta por el enfoque preventivo, y lo concreta en:
   - Itinerarios alternativos para acceder al conocimiento basados en las IM.
   - Adaptaciones curriculares y actividades multinivel.
5. **Una sociedad con valores.** La actual sociedad necesita personas con una sólida formación en valores para lograr una convivencia más positiva y afrontar los retos del futuro. INGENIOS se apoya en:
   - Valores universalmente aceptados, con un mensaje adaptado a la nueva realidad.
   - La adquisición de compromisos firmes en la mejora de la sociedad.

Prohibida su reproducción

Programación y orientaciones de las unidades didácticas

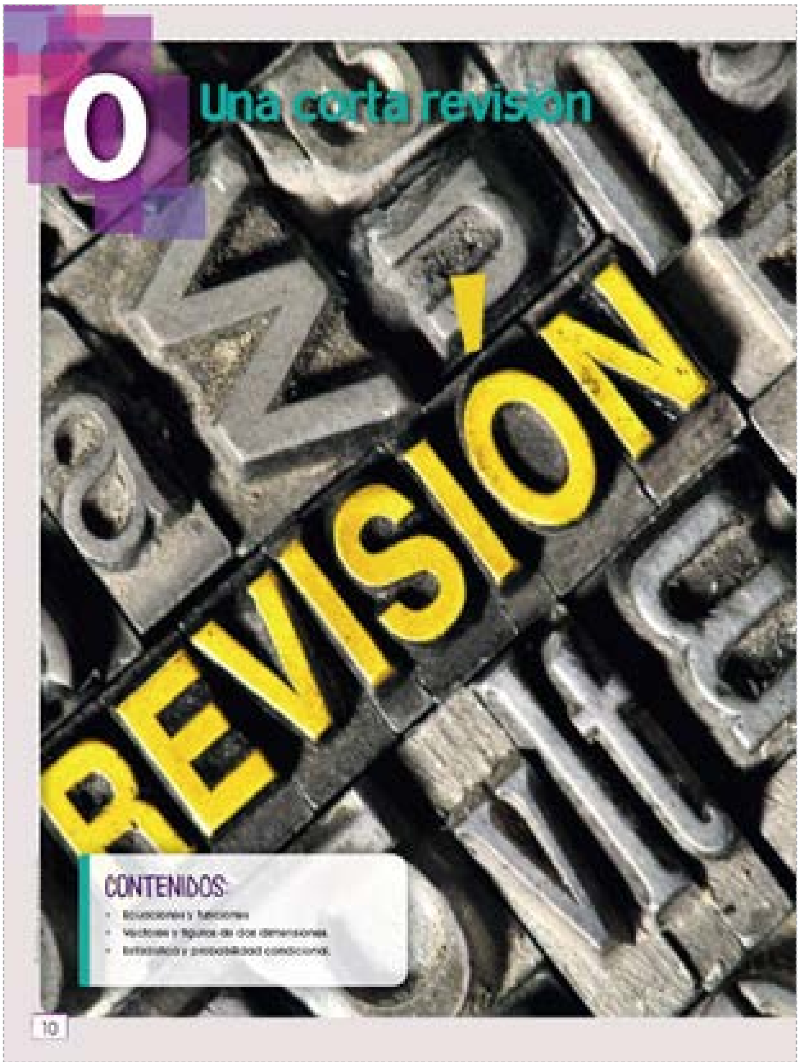
Prohibida su reproducción

Página 10

Orientación didáctica

- En esta unidad encontrarás una colección de ejercicios de repaso y refuerzo de temas de grados anteriores, agrupados por bloques numéricos, que sirven además para realizar la evaluación diagnóstica que se recomienda en al finalizar esta unidad.

El profesor puede sugerir la participación de estudiantes en el pizarrón, siguiendo los procedimientos completos de los ejercicios con mayor dificultad, y de esta forma asegura conocimientos previos y anticipa posibles dificultades en los contenidos de la unidad.Se sugiere también que el docente les pida a los estudiantes que justifiquen sus respuestas.



Actividades complementarias

1. Se sugiere el desarrollo del siguiente ejercicio, a manera de repaso de conocimientos y destrezas adquiridas en cursos anteriores:

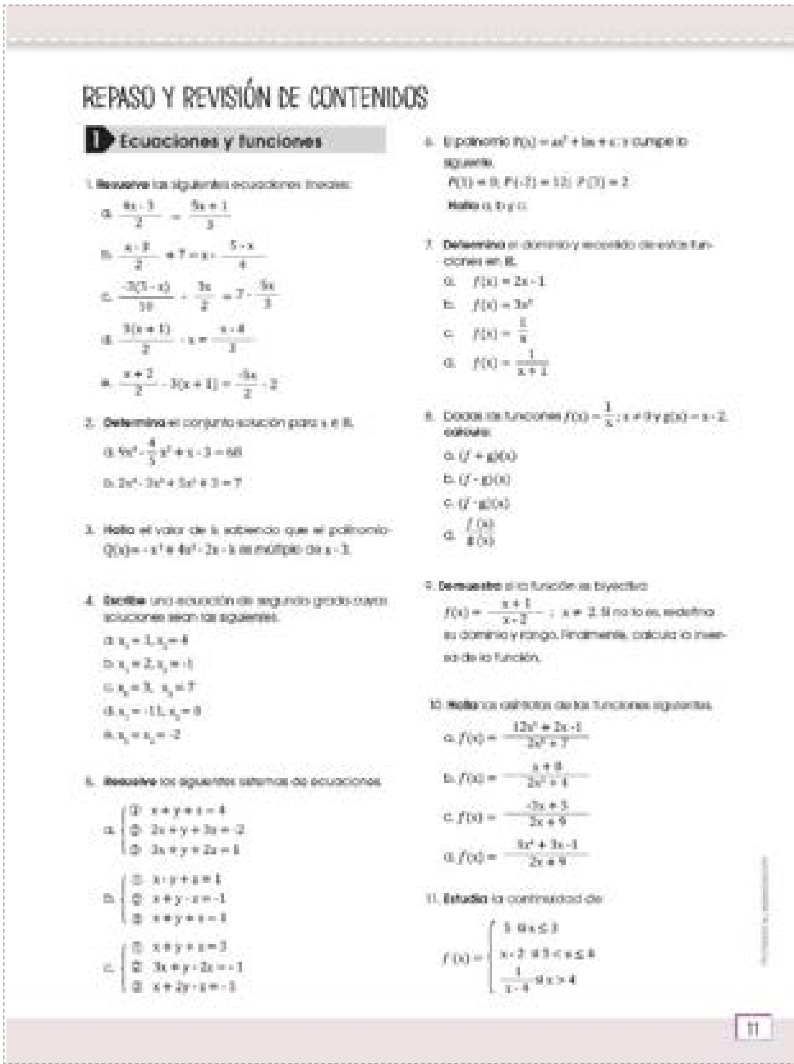
Resolver la siguiente ecuación de cuarto grado, por medio de una sustitución algebraica, para convertirla en una ecuación de segundo grado.

$x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

Soluciones: $x_1 = \sqrt{2}$; $x_2 = -\sqrt{2}$; $x_3 = 1$; $x_4 = -1$

Prohibida su reproducción

Página 11



Solucionario

2. Resuelve:
   a. x = 2 b. x = 1

3. Halla el valor de k:
   k = 3

5. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:
   a. x = 2, y = 3, z = -1
   b. x = 0, y = 0, z = 1
   c. x = 2, y = -2, z = 3

6. El polinomio $P(x)=ax^2+bx+c$ cumple que:

P(1)=0;P(-2)=12;P(3)=2

- Halla a, b y c.
  a = 1; b = -3; c = 2

7. Determina el dominio y recorrido de estas funciones en R:
   a. Dominio: R, Recorrido: R
   b. Dominio: R, Recorrido: (0,∞)
   c. Dominio: R\0, Recorrido: R\0
   d. Dominio: R\1, Recorrido: R\0

8. Calcula:

$$(f+g)(x)=\frac{x^2-2x+1}{x}$$

$$(f-g)(x)=\frac{-x+2x+1}{x}$$

$$(f\cdot g)(x)=\frac{x-2}{x}$$

$$\frac{f}{g}(x)=\frac{1}{x^2-2x}$$

9. Demuestra:

$$f^{-1}(x)=\frac{2x+1}{x-1}$$

10. Halla:
    a. Horizontal: 6, vertical: -√(5&7/2)
    b. Horizontal: 0, vertical: -√(3&2)
    c. Horizontal: -3, vertical: 2
    d. Horizontal: -9/2

11. La función es discontinua en $x_0=3$ y en $x_0=4$

Prohibida su reproducción

Página 12

Solucionario

12. sen α= 0.89,

cos α= - 0.45,

sen (180 - α) = 0.89,

cos (180 - α),

sen (360 - α) = - 0.89,

cos (360 - α) = - 0.45

13. a. <1,1>   b. $<-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}>$

c. <10,-14>   d. $<-\frac{13}{2},\frac{15}{2}>$

14. a. 13   b. $\sqrt{10}$

c. $\sqrt{29}$ d. $\frac{13}{\sqrt{290}}$

15. (-2, 4)

16. Se cortan en (0, -1)

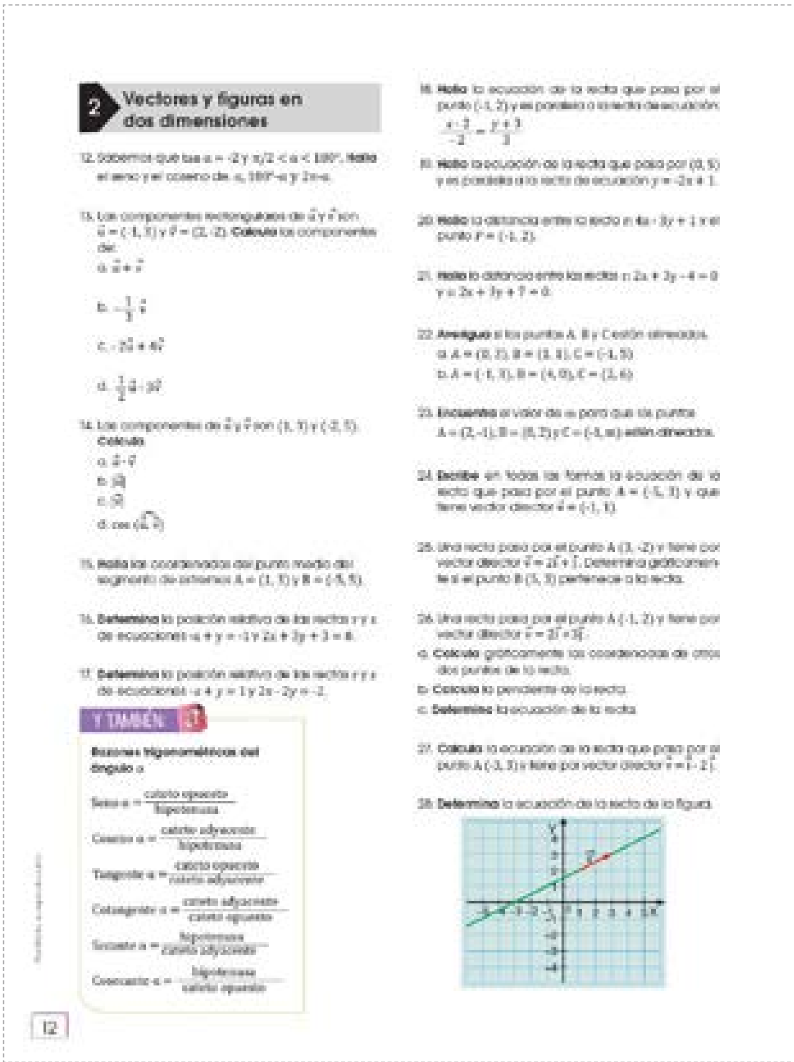
17. Son rectas coincidentes

19. y = -2x + 5

20. $\frac{9}{5}$ 21. $\frac{11}{\sqrt{3}}$

22.
a. Están alineados
b. No están alineados

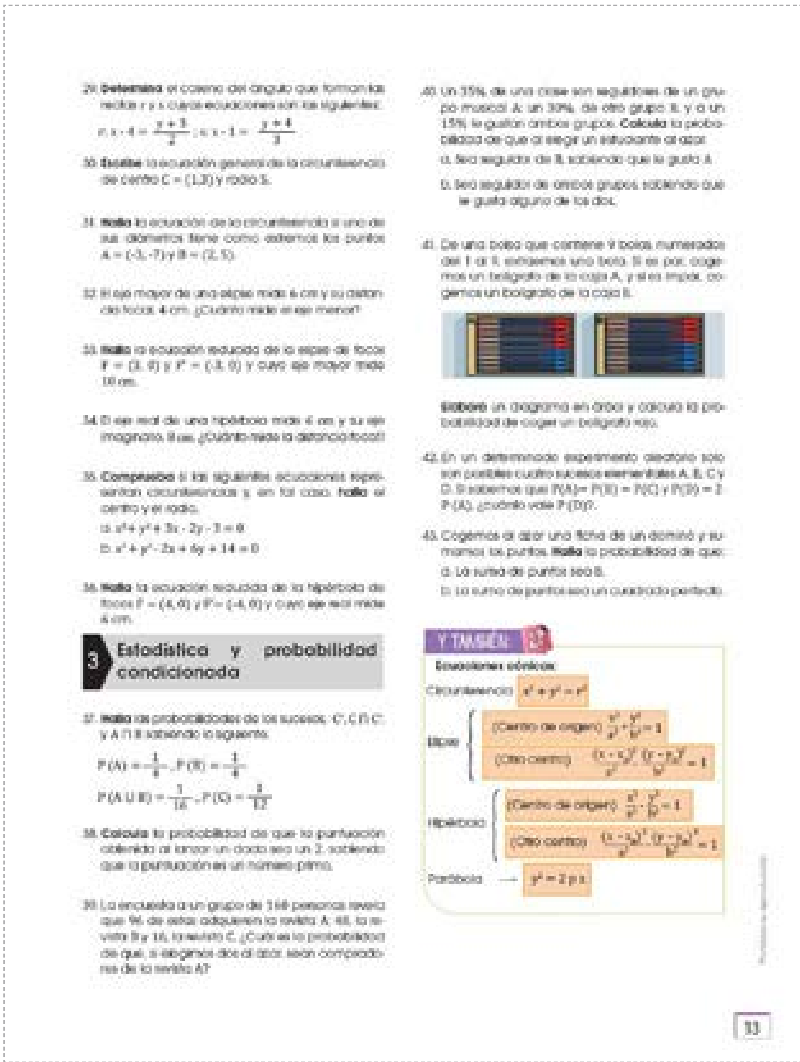
23. $m = \frac{7}{2}$


2 Vectores y figuras en dos dimensiones

12

Prohibida su reproducción

Página 13



Solucionario

29. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

30. $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$

31. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+1\right)^2 = \frac{169}{4}$

32. $2\sqrt{5}$

33. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

34. 10 cm

35. $C=\left(-\frac{3}{2},1\right), r=\frac{5}{2}$

36. $P\left(\bar{C}\right)=\frac{11}{12}, P\left(C\cap\bar{C}\right)=0, P\left(A\cap B\right)=\frac{7}{16}$

37. 1/3

38. 0.3585

40.

a) 0.429 b) 0.3

Prohibida su reproducción

Nombre: ______________________ Fecha: ______________

Evaluación Diagnóstica

1. **Encuentra** 3 soluciones de la siguiente ecuación y compruébalas.

$2x - 5y = 10$

2. **Explica** el procedimiento que debemos emplear para representar gráficamente las soluciones de esta ecuación.

$2x + 3y = 9$

3. **Resuelve** gráficamente el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 3x + y = 4 \\ x - 2y = -1 \end{array}\right\}$$

4. **Resuelve** algebraicamente estos sistemas de ecuaciones.

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 6 \\ x - 2y = 3 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 4x + 2y = 8 \\ 3x + y = -9 \end{array}\right\}$

5. **Traduce** al lenguaje algebraico el siguiente enunciado.
   Un padre tiene 29 años más que su hijo y dentro de 14 años le doblará la edad.

6. Se han envasado 200 litros de leche en 130 botellas de 2 litros y de 1 litro. ¿Cuántas botellas de cada tipo se han utilizado?

7. El perímetro de un rectángulo es de 390 m. Calcula sus dimensiones sabiendo que mide 51 m más de largo que de ancho.

8. El triple de un número más el doble de otro es 10 y el segundo más el cuádruple del primero es 15. ¿Cuáles son estos números?

Prohibida su reproducción

1. Despejamos una de las incógnitas de la ecuación, por ejemplo, la y.

$y = \dfrac{2x - 10}{5}$

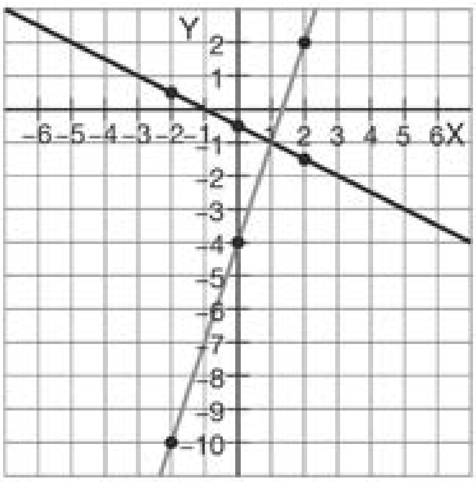
x	$y = \dfrac{2x - 10}{5}$
−10	−6
−5	−4
0	−2
5	0
10	2

Comprobamos con un punto: 2 (0) - 5 · (-2) = 10

2. ● Despejar $y = \dfrac{9 - 2x}{3}$
   - Asignar valores a x; y.
   - Graficar los puntos obtenidos.

3. Contruimos las tablas de soluciones y las representamos gráficamente..

Primera ecuación		Segunda ecuación	
x	y = 3x − 4	x	$y = \dfrac{-x-1}{2}$
−2	−10	−2	0,5
0	−4	0	−0,5
2	2	2	−1,5



4. a) $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 6 \\ x - 2y = 3 \end{array}\right\}$

5. Las ecuaciones correspondientes son:

$x = 29 + y$

$x + 14 = 2 \cdot (y + 14)$

6. Se obtienen las siguientes ecuaciones.

$\left.\begin{array}{r} x + y = 130 \\ 2x + y = 200 \end{array}\right\}$

Cuya solución es x= 70, y= 60. Se han utilizado 70 botellas de 2 litros y 60 botellas de 1 litro.

7. Denominamos x a la altura del rectángulo e y a la base, y obtenemos el siguiente sistema:

$\left.\begin{array}{r} 2x + 2y = 390 \\ y + x + 51 \end{array}\right\}$

Cuya solución es x = 72, y = 123. El rectángulo mide 123 m de base por 72 m de altura.

8. A partir del enunciado, se obtiene el sistema siguiente:

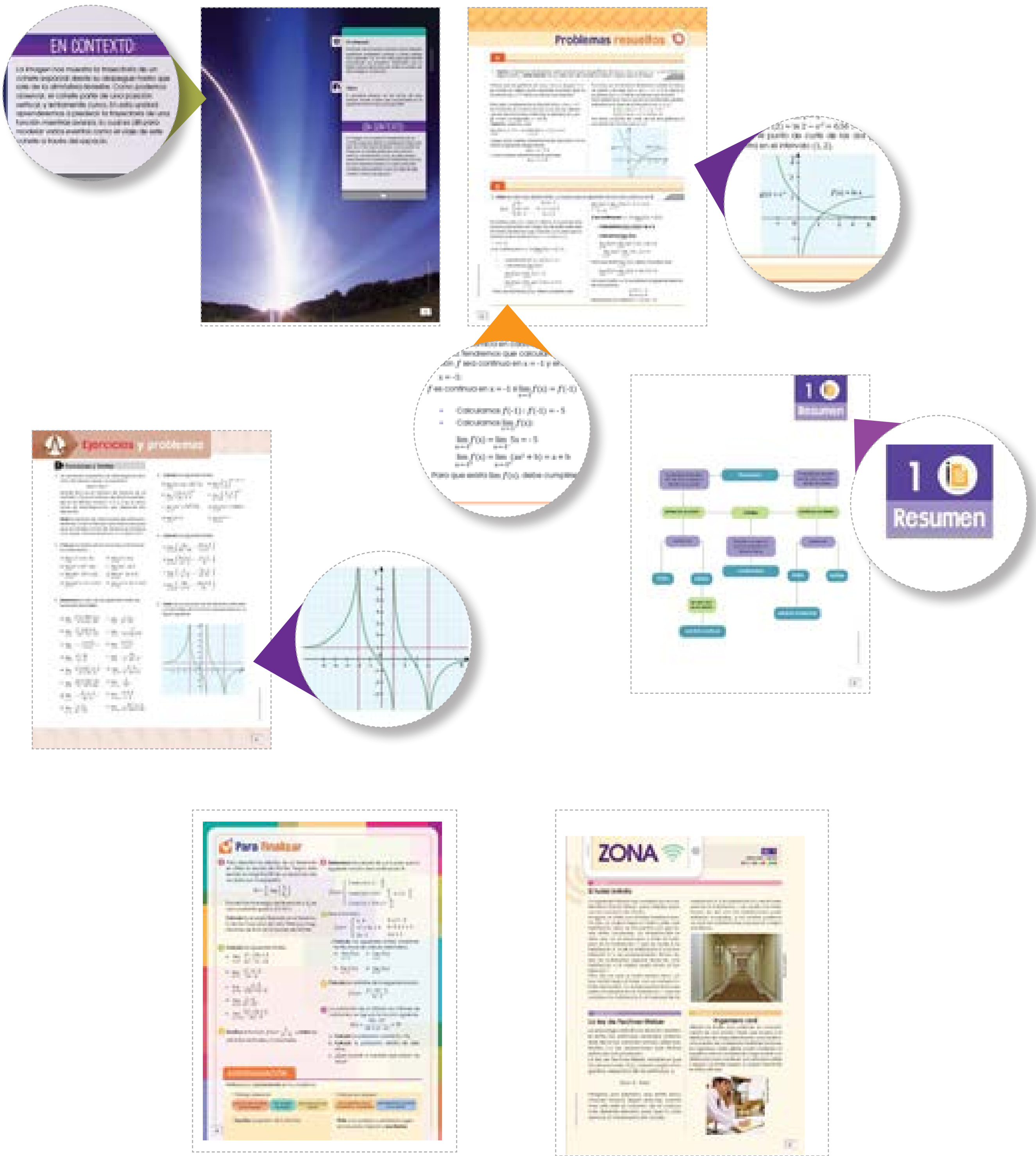
$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 10 \\ 4x + y = 15 \end{array}\right\}$

Cuya solución es x = 4, y = −1.

Evaluación Diagnóstica

Prohibida su reproducción

Funciones y límites



Prohibida su reproducción

UNIDAD 1

Ejetemático	Contenidos	
Funciones y límites	**1. Exponentes y logaritmos**	1.1. Función exponencial 1.2. Función logarítmica 1.3. Ecuaciones exponenciales 1.4. Ecuaciones logarítmicas
	2. Límites de funciones	2.1. Límite finito de una función en un punto 2.2. Límites laterales finitos 2.3. Límites laterales finitos 2.4. Límite infinito de una función en un punto 2.5. Límites de una función en el infinito
	3. Propiedades de los límites	3.1. Propiedades 3.2. Indeterminaciones
	4. Cálculo de límites	4.1. Límites de funciones polinómicas 4.2. Límites de funciones racionales 4.3. Límites de funciones definidas a trozos
	5. Levantar indeterminaciones para calcular límites	
	6. Aplicación de límites	6.1. Asíntotas verticales 6.2. Asíntotas horizontales
	7. Cálculo de límites	7.1. Continuidad en un punto 7.2. Continuidad lateral 7.3. Continuidad en un intervalo
	8. Propiedades de las funciones continuas	8.1. Continuidad de las funciones elementales
	9. Teoremas relativos a la continuidad	9.1. Teorema de conservación del signo 9.2. Teorema de Bolzano 9.3. Teorema de valor intermedio 9.4. Teorema de Weierstrass

Prohibida su reproducción

Objetivo del área por subnivel

O.M.5.1. Proponer soluciones creativas a situaciones concretas de la realidad nacional y mundial mediante la aplicación de las operaciones básicas de los diferentes conjuntos numéricos, y el uso de modelos funcionales, algoritmos apropiados, estrategias y métodos formales y no formales de razonamiento matemático, que lleven a juzgar con responsabilidad la validez de procedimientos y los resultados en un contexto.

Objetivo integrador del área por subnivel

OI.5.1. Analizar los diversos proyectos políticos, las propuestas de cambio democrático en una sociedad intercultural y sus efectos en diferentes ámbitos, a partir del reconocimiento de las características del origen, expansión y desarrollo, así como las limitaciones de la propia y otras culturas y su interrelación, y la importancia de sus aportes tecnológicos, económicos y científicos.

OI.5.12. Participar en procesos interdisciplinares de experimentación y creación colectiva, responsabilizándose del trabajo compartido, respetando y reconociendo los aportes de los demás durante el proceso y en la difusión de los resultados obtenidos.

<table>
<tr><th>Logo Institucional</th><th colspan="4">Nombre de la institución</th><th colspan="3">Año lectivo</th></tr>
<tr><td colspan="8">PLAN DE UNIDAD TEMÁTICA</td></tr>
<tr><td colspan="8">1. DATOS INFORMATIVOS:</td></tr>
<tr><td>Docente:</td><td>Nombre del docente que ingresa la información</td><td>Área/asignatura:</td><td>MATEMÁTICA</td><td>Grado/Curso:</td><td>2° BACHILLERATO</td><td>Paralelo:</td><td></td></tr>
<tr><td>N.º de unidad de planificación:</td><td>1</td><td>Título de unidad de planificación:</td><td>FUNCIONES Y LÍMITES</td><td colspan="2">Objetivos específicos de la unidad de planificación:</td><td colspan="2">Proponer soluciones creativas a situaciones concretas de la realidad nacional y mundial mediante la aplicación de las operaciones básicas de los diferentes conjuntos numéricos, el uso de modelos funcionales, algoritmos apropiados, estrategias y métodos formales y no formales de razonamiento matemático que lleven a juzgar con responsabilidad la validez de procedimientos y los resultados en un contexto.
Desarrollar estrategias individuales y grupales que permitan un cálculo mental, escrito, exacto o estimado y la capacidad de interpretación y solución de situaciones problémicas del medio.</td></tr>
<tr><td>PERÍODOS</td><td colspan="2">18</td><td colspan="2"></td><td>SEMANA DE INICIO:</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="8">2. PLANIFICACIÓN</td></tr>
<tr><td colspan="6">DESTREZAS CON CRITERIOS DE DESEMPEÑO A SER DESARROLLADAS:</td><td colspan="2">CRITERIOS DE EVALUACIÓN</td></tr>
<tr><td colspan="6">• Resolver y plantear problemas reales o hipotéticos que pueden ser modelizados con derivadas de funciones cuadráticas identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas, juzgando la pertinencia y validez de los resultados obtenidos.
• Interpretar de manera geométrica y física la primera derivada (pendiente de la tangente, velocidad instantánea) de funciones polinomiales de grado =4 con apoyo de las TIC.
• Interpretar de manera física la segunda derivada (aceleración media, aceleración instantánea) de una función polinomial de grado =4 para analizar la monotonía, determinar los máximos y mínimos de estas funciones y graficarlas con apoyo de las TIC (calculadora gráfica, software, applets).
• Calcular de manera intuitiva la derivada de funciones racionales cuyos numeradores y denominadores sean polinomios de grado =2 para analizar la monotonía, determinar los máximos y mínimos de estas funciones y graficarlas con apoyo de las TIC (calculadora gráfica, software, applets)
• Resolver aplicaciones reales o hipotéticas con ayuda de las derivadas de funciones polinomiales de grado =4 y de funciones racionales cuyos numeradores y denominadores sean polinomios de grado =2 y juzgar la validez y pertinencia de los resultados obtenidos.
• Reconocer y graficar funciones exponenciales analizando sus características: monotonía, concavidad y comportamiento al infinito.
• Aplicar las propiedades de los exponentes y los logaritmos para resolver ecuaciones e inecuaciones con funciones exponenciales y logarítmicas con ayuda de las TIC.
• Reconocer y resolver aplicaciones, problemas o situaciones reales o hipotéticas que pueden ser modelizados con funciones exponenciales o logarítmicas identificando las variables significativas presentes y las relacionesentre ellas y juzgar la validez y pertinencia de los resultados obtenidos.</td><td colspan="2">CE.M.5.3. Opera y emplea funciones reales, lineales, cuadráticas, polinomiales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas para plantear situaciones hipotéticas y cotidianas que puedan resolverse mediante modelos matemáticos; comenta la validez y limitaciones de los procedimientos empleados y verifica sus resultados mediante el uso de las TIC.</td></tr>
</table>

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	RECURSOS	INDICADORES DE LOGRO	TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN
• Aplicar el principio de duplicación en teoría exponencial, como introducción al tema de funciones exponenciales. • Debatir en clase el fenómeno de duplicación de bacterias, para poner en contexto las relaciones númericas. • Diferenciar los conceptos de funcion exponencial y logarítmica • Reflexionar acerca de la importancia de estos modelos en el crecimiento poblacional del Ecuador y el mundo. • En caso de límites, reflexionar el caso de existencia de asíntotas y su interpretación gráfica. • Atravez de un gráfico de la relación crecimiento poblacional en función del tiempo	- Texto - Calculadora - Enlaces web - Pizarra	IM.5.3.1. Grafica funciones reales y analiza su dominio, recorrido, monotonía, ceros, extremos, paridad; identifica las funciones afines, potencia, raíz cuadrada, valor absoluto; reconoce si una función es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva; realiza operaciones con funciones aplicando las propiedades de los números reales en problemas reales e hipotéticos.(I.4.) M.5.3.2. Representa gráficamente funciones cuadráticas; halla las intersecciones con los ejes, el dominio, rango, vértice y monotonía; emplea sistemas de ecuaciones para calcular la intersección entre una recta y una parábola o dos parábolas; emplea modelos cuadráticos para resolver problemas, de manera intuitiva halla un límite y la derivada; optimiza procesos empleando las TIC. (13, 14) M.5.3.3. Reconoce funciones polinomiales de grado n, opera con funciones polinomiales de grado =4 y racionales de grado =3; plantea modelos matemáticos para resolver problemas aplicados a la informática; emplea el teorema de Horner y el teorema del residuo para factorizar polinomios; con la ayuda de las TIC, escribe las ecuaciones de las asíntotas, y discute la validez de sus resultados. (I.3., I.4.) M.5.3.4. Halla gráfica y analíticamente el dominio, recorrido, monotonía, periodicidad, desplazamientos, máximos y mínimos de funciones trigonométricas para modelar movimientos circulares y comportamientos de fenómenos naturales, y discute su pertinencia; emplea la tecnología para corroborar sus resultados. (J.3., I.2.) M.5.3.5. Obtiene la gráfica de una función exponencial a partir de a^x, mediante traslaciones, homotecias y reflexiones; concibe la función logarítmica como inversa de la función exponencial; aplica propiedades de los logaritmos y halla su dominio, recorrido, asíntotas, intersecciones con los ejes; las aplica en situaciones reales e hipotéticas, con y sin apoyo de la tecnología. (I.3.)	Comprobar el desarrollo de las destrezas necesarias para el manejo de vectores en el plano y sus características, graficación, norma, Operaciones con vectores algebraicas, en forma gráfica y en Forma analítica, así como para la resolución de problemas de aplicación. El estudiante debe ser capaz de calcular el producto de un número por un vector, el producto Escalar entre vectores, la ortogonalidad, la distancia entre dos puntos, el ángulo entre dos vectores; determinar la posición relativa de dos rectas; describir la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola (tanto en su forma cartesiana como en su forma paramétrica), y, en general, resolver aplicaciones geométricas de vectores en R

ELEMENTOS DEL PERFIL DE SALIDA
J.3. Procedemos con respeto y responsabilidad con nosotros y con las demás personas, con la naturaleza y con el mundo de las ideas. Cumplimos nuestras obligaciones y exigimos la observación de nuestros derechos. I.2. Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para Resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos información posibles. I.3. Sabemos comunicarnos de manera clara en nuestra lengua y en otras, utilizamos varios lenguajes como el numérico, el digital, el artístico y el corporal; asumimos con Responsabilidad nuestros discursos. I.4. Actuamos de manera organizada, con autonomía e independencia; aplicamos el razonamiento lógico, crítico y complejo; y practicamos la humildad intelectual en un aprendizaje a lo largo de la vida.

ELABORADO	REVISADO	APROBADO
Docente:	Director del área :	Vicerrector:
Firma:	Firma:	Firma:
Fecha:	Fecha:	Fecha:

Objetivos generales del área que se evalúan

- Proponer soluciones creativas a situaciones concretas de la realidad nacional y mundial mediante la aplicación de las operaciones básicas de los diferentes conjuntos numéricos, el uso de modelos funcionales, algoritmos apropiados, estrategias y métodos formales y no formales de razonamiento matemático que lleven a juzgar con responsabilidad la validez de procedimientos y los resultados en un contexto
- Desarrollar estrategias individuales y grupales que permitan un cálculo mental, escrito, exacto o estimado y la capacidad de interpretación y solución de situaciones problémicas del medio.

Objetivos del área por subnivel

- Analizar y comprender los conceptos de «tiempo, historia, cultura y trabajo», a través del examen de las diferentes producciones y manifestaciones humanas para establecer las razones profundas de sus afanes, proyectos y utopías.

Objetivos integradores de subnivel

- OI.5.1. Analizar los diversos proyectos políticos, las propuestas de cambio democrático en una sociedad intercultural y sus efectos en diferentes ámbitos, a partir del reconocimiento de las características del origen, expansión y desarrollo, así como las limitaciones de la propia y otras culturas y su interrelación, y la importancia de sus aportes tecnológicos, económicos y científicos.
- OI.5.12. Participar en procesos interdisciplinares de experimentación y creación colectiva, responsabilizándose del trabajo compartido, respetando y reconociendo los aportes de los demás durante el proceso y en la difusión de los resultados obtenidos.

Indicadores para la evaluacióndel criterio

- M.5.3.1. Grafica funciones reales y analiza su dominio, recorrido, monotonía, ceros, extremos, paridad; identifica las funciones afines, potencia, raíz cuadrada, valor absoluto; reconoce si una función es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva; realiza operaciones con funciones aplicando las propiedades de los números reales en problemas reales e hipotéticos. (I.4.)
- M.5.3.2. Representa gráficamente funciones cuadráticas; halla las intersecciones con los ejes, el dominio, rango, vértice y monotonía; emplea sistemas de ecuaciones para calcular la intersección entre una recta y una parábola o dos parábolas; emplea modelos cuadráticos para resolver problemas, de manera intuitiva halla un límite y la derivada; optimiza procesos empleando las TIC. (13, 14)
- M.5.3.3. Reconoce funciones polinomiales de grado n, opera con funciones polinomiales de grado =4y racionales de grado =3; plantea modelos matemáticos para resolver problemas aplicados a la informática; emplea el teorema de Horner y el teorema del residuo para factorizar polinomios; con la ayuda de las TIC, escribe las ecuaciones de las asíntotas, y discute la validez de sus resultados. (I.3., I.4.)
- M.5.3.4. Halla gráfica y analíticamente el dominio, recorrido, monotonía, periodicidad, desplazamientos, máximos y mínimos de funciones trigonométricas para modelar movimientos circulares y comportamientos de fenómenos aturales, y discute su pertinencia; emplea la tecnología para corroborar sus resultados. (J.3., I.2.)
- M.5.3.5. Obtiene la gráfica de una función exponencial a partir de a^x, mediante traslaciones, homotecias y reflexiones; concibe la función logarítmica como inversa de la función exponencial; aplica propiedades de los logaritmos y halla su dominio, recorrido, asíntotas, intersecciones con los ejes; las aplica en situaciones realese hipotéticas, con y sin apoyo de la tecnología. (I.3.)

Prohibida su reproducción

Criterio de evaluación

- CE.M.5.3. Opera y emplea funciones reales, lineales, cuadráticas, polinomiales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas para plantear situaciones hipotéticas y cotidianas que puedan resolverse mediante modelos matemáticos; comenta la validez y limitaciones de los procedimientos empleados y verifica sus resultados mediante el uso de las TIC.

Elementos del perfil de salida a los que se contribuye

- J.3. Procedemos con respeto y responsabilidad con nosotros y con las demás personas, con la naturaleza y con el mundo de las ideas. Cumplimos nuestras obligaciones y exigimos la observación de nuestros derechos.
- I.2. Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos e información posibles.
- I.3. Sabemos comunicarnos de manera clara en nuestra lengua y en otras, utilizamos varios lenguajes como el numérico, el digital, el artístico y el corporal; asumimos con responsabilidad nuestros discursos.
- I.4. Actuamos de manera organizada, con autonomía e independencia; aplicamos el razonamiento lógico, crítico y complejo; y practicamos la humildad intelectual en un aprendizaje a lo largo de la vida.

Básicos imprescindibles | Básicos deseables

Eje temático	Destrezas con criterio de desempeño
Funciones y Límites	• Resolver y plantear problemas reales o hipotéticos que pueden ser modelizados con derivadas de funciones cuadráticas identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas, juzgando la pertinencia y validez de los resultados obtenidos..
	• Interpretar de manera geométrica y física la primera derivada (pendiente de la tangente, velocidad instantánea) de funciones polinomiales de grado =4 con apoyo de las TIC. .
	• Interpretar de manera física la segunda derivada (aceleración media, aceleración instantánea) de una función polinomial de grado =4 para analizar la monotonía, determinar los máximos y mínimos de estas funciones y graficarlas con apoyo de las TIC (calculadora gráfica, software, applets).
	• Calcular de manera intuitiva la derivada de funciones racionales cuyos numeradores y denominadores sean polinomios de grado =2 para analizar la monotonía, determinar los máximos y mínimos de estas funciones y graficarlas con apoyo de las TIC (calculadora gráfica, software, applets)
	• Resolver aplicaciones reales o hipotéticas con ayuda de las derivadas de funciones polinomiales de grado =4 y de funciones racionales cuyos numeradores y denominadores sean polinomios de grado =2 y juzgar la validez y pertinencia de los resultados obtenidos.
	• Reconocer y graficar funciones exponenciales analizando sus características: monotonía, concavidad y comportamiento al infinito.
	• Aplicar las propiedades de los exponentes y los logaritmos para resolver ecuaciones e inecuaciones con funciones exponenciales y logarítmicas con ayuda de las TIC.
	• Reconocer y resolver aplicaciones, problemas o situaciones reales o hipotéticas que pueden ser modelizados con funciones exponenciales o logarítmicas identificando las variables significativas presentes y las relacionesentre ellas y juzgar la validez y pertinencia de los resultados obtenidos.

Prohibida su reproducción

Exhaución e integración

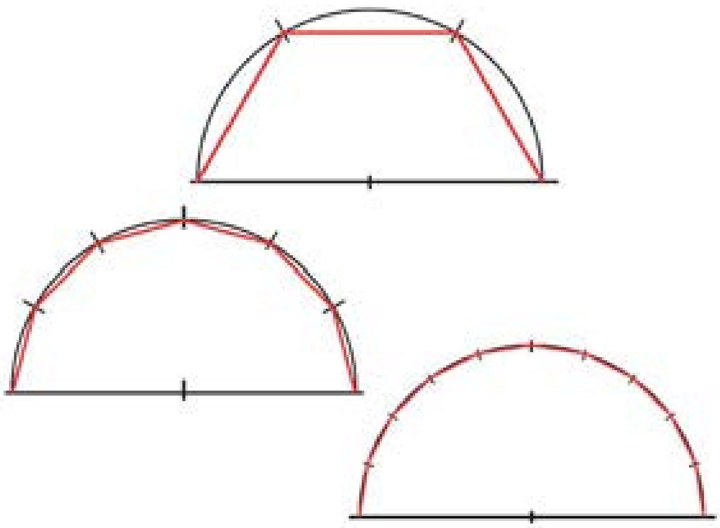
Los matemáticos griegos inscribían y circunscribían figuras rectilíneas a figuras curvilíneas y multiplicaban el número de lados o de caras indefinidamente para aproximar cada vez más la figura rectilínea a la curvilínea; y, por tanto, para determinar sus áreas o sus volúmenes. Sin embargo, hasta Eudoxo de Cnido (aprox. 408-355 a. C.) no sabían cómo cerrar el razonamiento, puesto que les faltaba el concepto de límite. Eudoxo elaboró el siguiente axioma, la propiedad de la exhaución:

Si de cualquier magnitud sustraemos una parte no menor que su mitad, y si del resto sustraemos de nuevo una cantidad no menor que su mitad, y si continuamos repitiendo este proceso de sustracción, terminaremos por obtener como resto una magnitud menor que cualquier magnitud del mismo tipo dada de antemano.

Este axioma se conoce actualmente como axioma de Arquímedes o axioma de continuidad. Su principal innovación reside en que introduce, sin nombrarlo, el concepto de tan pequeño como se desee, es decir, lo que equivale a nuestro paso al límite.

Este método fue usado satisfactoriamente para demostrar teoremas de áreas y volúmenes. Concretamente, Arquímedes (287-212 a. C.) halló fórmulas exactas de las áreas del círculo y de algunas otras figuras especiales. El álgebra elemental era totalmente desconocida en tiempos de Arquímedes, lo que hacía imposible extender el método a cualquier clase de regiones, sin poseer una manera adecuada de poder expresar los largos cálculos en forma simplificada.

Con la introducción muy extendida de los bien elegidos símbolos algebraicos (+, −...), revivió el interés por el antiguo método de exhaución y en el siglo XVI se descubrieron múltiples resultados parciales que, gradualmente, transformaron el método de exhaución en lo que hoy se conoce como cálculo integral.



Método de exhaución para una región semicircular.

Prohibida su reproducción

Diferenciación

En el siglo XVII el matemático francés Pierre de Fermat (1601-1665) trató de determinar los máximos y mínimos de ciertas funciones. Al observar que en estos puntos la tangente debe ser horizontal, redujo el problema de localizar los valores extremos al de localizar las tangentes horizontales.

Esto le condujo a una cuestión más general: la determinación de la dirección de la tangente en un punto arbitrario de la curva. Fermat descubrió un método para determinar los extremos de una función. Si se examina con atención este método, que consiste en cambiar ligeramente el valor de la variable para considerar valores próximos a uno dado, se observa que se trata de un cálculo diferencial encubierto.

Sin embargo, sólo era eficaz para algunas clases de funciones.

El movimiento de cualquier objeto, incluido un tifón, puede describirse mediante ecuaciones diferenciales

Prohibida su reproducción

Nombre: ______________________ Fecha: ______________

1. **Calcula** los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to 2} (3x - 2)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x + 1}{x - 2}$

c) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x + 4}{x + 2}$

d) $\lim\limits_{x \to -3} \sqrt{x^2 - 2x + 1}$

2. **Sea** la función $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq 3 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

¿Existe el límite en x = 3? En caso afirmativo, calcula el valor del límite.

3. **Calcula** el valor de a para que $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$ exista siendo:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{6}{x} & \text{si } x > -3 \\ x^2 + x + a & \text{si } x < -3 \end{cases}$$

4. **Calcula** los valores de a y b para que:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{ax^2 + x} - \sqrt{bx^2 + 3x}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

5. **Calcula** las asíntotas de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^5 + 2x^2 - 5}{x^4 - 1}$$

6. **Halla** las asíntotas de la función definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{x - 1}$$

7. **Halla** las asíntotas de la función definida por:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + kx & \text{si } x \leq 2 \\ k - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} e^{kx} & \text{si } x \leq 0 \\ x - 2k & \text{si } x > 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 3 \\ k - x & \text{si } x > 3 \end{cases}$

Prohibida su reproducción

Nombre: ______________________________ Fecha: ______________

8. **Calcula** el valor de m y n para que las siguientes funciones sean continuas:

a) $f(x) = \begin{cases} -2x - m & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ nx - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \ln x - 1 & \text{si } x > 1 \\ 2x^2 + mx + n & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

9. **La función** $f(x) = \begin{cases} |x - 4| & \text{si } x \leq 2 \\ 1 - 2^x & \text{si } x > 2 \end{cases}$ está definida en el intervalo $(1, 3)$ y cumple que $f(1)$ y $f(3)$ toman valores de distinto signo. Sin embargo, no existe ningún punto $c \in (1, 3)$ que verifique $f(c) = 0$. Todo esto, ¿contradice el teorema de Bolzano?

Justifica tu respuesta.

10. **Halla** los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones e indica de qué tipo son:

a) $f(x) = \dfrac{e^x \; 1 + x}{x^2 + 2x - 15}$

b) $f(x) = \begin{cases} \cos \dfrac{1}{x} & \text{si } x < \dfrac{1}{} \\ x - 1 & \text{si } x \geq \underline{1} \end{cases}$

Recurso para la evaluación

Prohibida su reproducción

1. a) 4 b) $\frac{1}{2}$ c) 0 d) 4

2. Para calcular este límite, calculamos los límites laterales cuando $x \rightarrow 3$:

$$\lim_{x \to 3^-} x + 2 = 5$$

$$\lim_{x \to 3^+} x^2 - 4 = 9 - 4 = 5$$

3. Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{6}{x} = \frac{6}{-3} = -2$$

$$\lim_{x \to 3^+} x^2 + x + a = 9 - 3 + 3 + a = 6 - a$$

Igualamos los límites y hallamos a = 8.

4. Calculamos los límites laterales:

Si imponemos que este límite sea $-\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$-\frac{1}{\sqrt{a}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{2} \Leftrightarrow a = 2$$

Por tanto, los parámetros deben ser a = b = 2 para que se cumpla el enunciado.

5. Asíntotas verticales:

Prohibida su reproducción

Nombre: ____________________ Fecha: ____________

1. Calcula los siguientes límites mediante tablas de valores:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - 1}{x - 1}$ b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$

2. Sea $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Calcula los límites laterales de f en los puntos de abscisa x = 1 y x = 3, mediante tablas de valores:

Respuestas:

1. LÍMITES DE FUNCIONES

1. *a)* Debemos realizar una tabla de valores de

$$f(x) = \frac{x-1}{x-5}$$

para valores de la variable x cada vez más próximos a 0 por la derecha y otra para valores próximos a 0 por la izquierda:

x	f (x)
0,1	0,183 673
0,01	0,198 397
0,001	0,199 840
0,000 1	0,199 984
0,000 01	0,199 998

De la tabla anterior concluimos que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0{,}2$.

x	f (x)
−0,1	0,215 686
−0,01	0,201 597
−0,001	0,200 160
−0,000 1	0,200 016
−0,000 01	0,200 002

De esta tabla concluimos que $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0{,}2$.

Por tanto, de la observación de las dos tablas anteriores, parece ser que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0{,}2$.

b) Debemos elaborar una tabla de valores de

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$$

para valores de la variable x cada vez más próximos a −2 por la derecha y otra para valores próximos a −2 por la izquierda.

x	f (x)
−1,9	−3,9
−1,99	−3,99
−1,999	−3,999
−1,999 9	−3,999 9
−1,999 99	−3,999 99

Observando la tabla anterior, afirmamos que $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -4$.

x	f (x)
−2,1	−4,1
−2,01	−4,01
−2,001	−4,001
−2,000 1	−4,000 1
−2,000 01	−4,000 01

Observando esta tabla, podemos afirmar que $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -4$.

Así pues, las tablas construidas nos indican que $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -4$.

2. Si elaboramos las tablas de valores correspondientes:

x	f (x)
0,9	2
0,99	2
0,999	2
0,999 9	2
0,999 99	2

Por tanto, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$.

x	f (x)
3,1	12,61
3,01	12,060 1
3,001	12,006 001
3,000 1	12,000 6
3,000 01	12,000 06

Así, $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 12$.

— Puesto que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2 \neq 4 = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, no existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

En cambio, como $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 12 = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$, existe el límite $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$, y su valor es 12.

Prohibida su reproducción

CICLO DEL APRENDIZAJE

¿Cómo dinamizo el aula?

Experiencia

- Aplicar el principio de duplicación en teoría exponencial, como introducción al tema de funciones exponenciales.
- Debatir en clase el fenómeno de duplicación de bacterias, para poner en contexto las relaciones númericas.
- Analizar una imagen de dicho crecimientoexponencial,evidenciando las características principales de este fenómeno.

Conceptualización

- Diferenciar los conceptos de funcion exponencial y logarítmica
- Comparar las definiciones en caso de límites a un punto y límites al infinito.

Reflexión

- Reflexionaracercadelaimportancia de estos modelos en el crecimiento poblacionaldelEcuadoryelmundo.
- En caso de límites, reflexionar el caso de existencia de asíntotas y su interpretación gráfica.
- Identificar los elementos para distinguir entre funciones contínuas y discontínuas.

Aplicación

- Atravez de un gráfico de la relación crecimiento poblacional en función del tiempo
- Reconocerloselementos(variables) involucradas en el gráfico y sus respectivas ecuaciones.
- Producirprediccionesusandolosmodelosmatemáticosestudiados,usandoconobaselainformacióndecensos en nuestro país.

Prohibida su reproducción

BANCO DE PREGUNTAS

1. ¿Toda relación es una función?

   No necesariamente

2. ¿Una función es una relación?

   Si

3. ¿Cómo hallo el dominio de una función?

   Lo hallo despejando ”y” , preguntándome luego para qué valores reales de la variable “x”, la variable “y” toma también valores reales

4. ¿Cómo hallo el rango de una función?

   Lo hallo despejando “x” ,preguntándome luego para qué valores reales de la variable “y”, la variable “x” toma también valores reales.

5. ¿Cómo hallo la función inversa de una función f(x)?

   La hallo demostrando primero que es una función inyectiva, luego intercambio “y” por “x”. finalmente despejo la nueva “y” llamándola f a la -1 de (x).

6. ¿Cómo demuestro que una función es inyectiva?

   Lo demuestro asumiendo que la función tiene dos paresordenados con segundas componentes iguales (lo cual contradice la inyectividad), luego si algebraicamente verifico que las primeras componentes son iguales, concluyo que en realidad es el mismo par ordenado; por tanto es función inyectiva. Otra manera de demostrar que es inyectiva implica primero graficar la función y si al trazar una recta paralela al eje x, esta corta en solo un punto a la gráfica ; concluyo que sí es función inyectiva.

7. ¿Cómo hallo la ecuaciòn de la asìntota vertical de una función racional?

   La hallo verificando primero que la funciòn estè escrita como f(x) = p(x)/ q(x) ,luego igualo a cero el denominador de la funciòn racional para despejar “ x “.

8. ¿Cómo hallo la ecuaciòn de la asìntota horizontal de una función racional?

   La hallo verificando primero que la funciòn estè escrita como

f(y) = p(y)/ q(y) ,luego igualo a cero el denominador de la funciòn racional paradespejar “ y “.

9. ¿Cómo hallo la regla de composición, entre la función ″f″ y la función ″g″ ?

   Depende :

. si me piden(f ° g), su regla es f(g(x))

. si me piden (g ° f), su regla es g(f(x))

10. ¿Cómo hallo el dominio de la composición entre la función ″ f ″ y la función ″ g ″?

   Depende : si me piden :dom (f ° g)(x) = {x ϵr / x ϵdom gϵg(x) ϵdom f }

pero si me piden dom (g ° f)(x)= { x ϵr / x ϵdom f ϵf(x) ϵdom g }

hay que tener presente que el símbolo ϵsignifica intersección.

Prohibida su reproducción

Los enlaces a internet como recurso didáctico

El uso de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) han cambiado la forma como se relacionan las personas. El hecho educativo, como relación de enseñanza-aprendizaje, no escapa a esta realidad.

Si bien el acceso a internet en las instituciones educativas no es universal, al menos los estudiantes interactúan constantemente con ordenadores (portátiles y de escritorio) y dispositivos móviles (teléfonos inteligentes y tablets) conectados a la red de redes.

Esto supone para el profesor o profesora, en especial para el área de Matemática, la ventaja de utilizar internet como recurso didáctico por dos razones:

• Permite acceder a mucha información actualizada y clasificada, de la más variada temática, sin contar con soportes físicos como las bibliotecas. Esta información permite, tanto al profesor o profesora como al estudiante, ampliar los contenidos abordados en las clases.

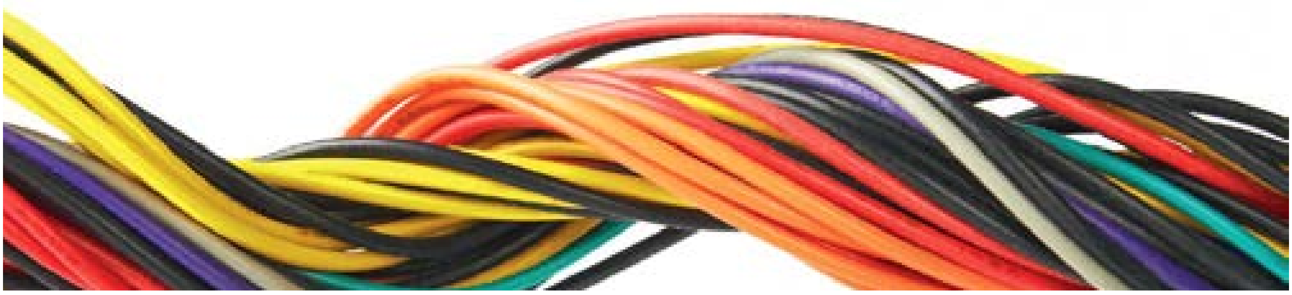
• Permite crear soportes virtuales (documentos, videos, audios, esquemas, líneas del tiempo, etc.) para presentar a los estudiantes la información recogida y clasificada.

El uso de enlaces

A la hora de utilizar internet como fuente de ampliación de contenidos, el profesor o profesora debe presentar la actividad de la forma más clara y resumida. Por ejemplo, en el libro del estudiante de este grado, se presentan unos recuadros señalados como "TIC", en los que se sugiere seguir enlaces para ampliar la información del apartado al que se refieren. Este tipo de recursos son de gran utilidad también a la hora de asignar actividades para el hogar y/o evaluaciones.

Para usar los enlaces a internet de esta forma, se recomienda al profesor o profesora:

1. Hacer búsquedas de sitios web de acuerdo al tema que se quiere ampliar.
2. Verificar la idoneidad pedagógica y el rigor científico del contenido de los sitios encontrados.
3. Usar un acortador de URL (acortador de enlaces) para proporcionar a los estudiantes enlaces cortos que puedan copiar en su cuaderno sin inconveniente.
4. Sugerir el seguimiento de los enlaces junto a actividades que le permitan aprehender mejor la información.



Prohibida su reproducción

Orientación didáctica

- Para anticipar posibles dificultades en los contenidos de la unidad, el profesor o profesora puede utilizar las siguientes propuestas: repasar los conceptos y las y propiedades de la potenciación y radicación.

Se recomienda que el profesor o profesora resuelva varios ejemplos en la pizarra y solucione todas las dudas de los estudiantes.

Es importante repasar los conceptos de proporcionalidad directa e inversa, así como también operaciones con polinomios y los casos principales de factoreo.

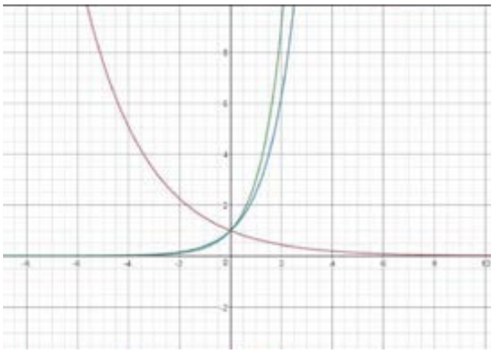
Propuestas:

- Dedicar el tiempo suficiente a explicar adecuadamente el concepto de función, dominios y recorridos de funciones básicas.
- Preguntar a menudo a los estudiantes si tienen dudas en el momento de explicar las diferentes variaciones en los gráficos de las funciones presentadas. Es conveniente tabular algunos valores, para adquirir las destrezas deseadas.

Prohibida su reproducción

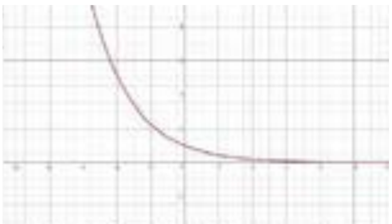
Solucionario

1.

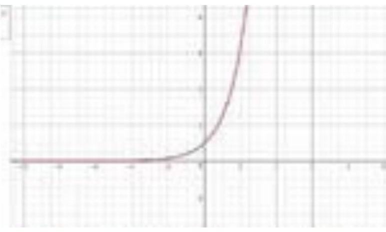


2.

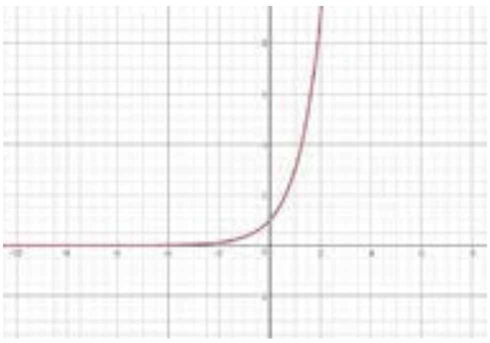
a)



b)



3.



Página 18

Podemos definir la función biyectiva: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

$$x \to f(x) = b^x$$

Las funciones exponenciales $f(x) = a^x, a > 1$, y $g(x) = b^x, 0 < b < 1$ presentan gráficas similares las de las funciones que acabamos de estudiar, $f(x) = 2^x$ y $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

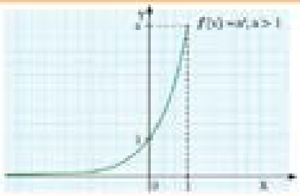
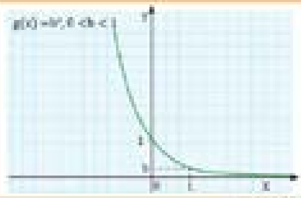
Gráfica de la función $f(x) = a^x, a > 1$	Gráfica de la función $g(x) = b^x, 0 < b < 1$
	

Tabla 3.

Propiedades

- **Dominio**: $D(f) = \mathbb{R}$
- **Recorrido**: $R(f) =]0, +\infty)$
- **Acotación**: Está acotada inferiormente por 0.
- Intersecciones con los ejes: eje OY en el punto $(0, 1)$, ya que $a^0 = 1$.
- **Continuidad**: Es continua en $\mathbb{R}$.
- **Tendencia**: La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

Si $a > 1$: $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$ y $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$

Si $0 < a < 1$: $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ y $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$

- **Periodicidad**: No es periódica.
- **Simetría**: No es simétrica.
- **Crecimiento y decrecimiento**: Es estrictamente creciente si $a > 1$, y estrictamente decreciente si $0 < a < 1$.
- **Extremos relativos**: No tiene.
- **Inyectividad**: Es inyectiva, puesto que cualquier recta horizontal que tracemos sobre la gráfica la intercepta como máximo en un punto. Esto es si

$$f(x_1) = f(x_2)$$

Entonces

$$x_1 = x_2$$

- **Sobreyectividad**: No es sobreyectiva, pues el recorrido no es $\mathbb{R}$.

Por tanto f no es biyectiva.

Tabla 4

Actividades

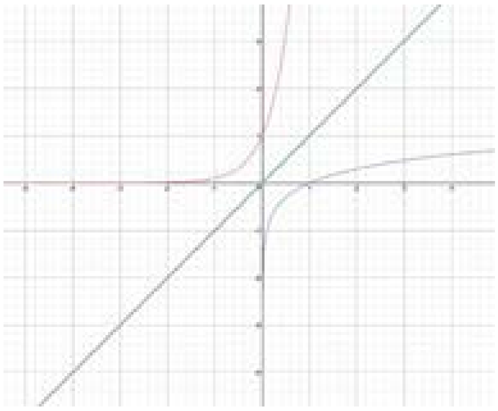
1. **Representa** en un mismo sistema de coordenadas las siguientes funciones.
   a. $f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x$ b. $g(x) = \left(\frac{5}{2}\right)^x$
   c. $h(x) = 3^x$
2. **Representa** en diferentes planos cartesianos.
   a. $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ b. $g(x) = \left(\frac{5}{2}\right)^x$
   c. $h(x) = 3^x$
3. **Contesta**: ¿Cuál de los dos procedimientos anteriores nos permiten analizar mejor las funciones?

18

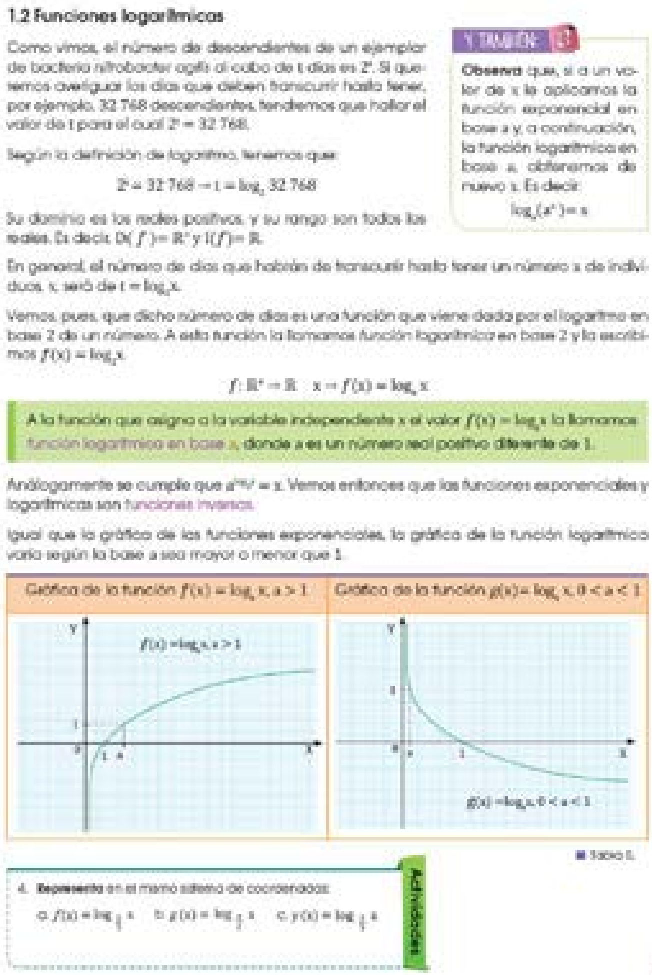
Prohibida su reproducción

Orientación didáctica

- Es importante que el docente en este punto grafique conjuntamente la función exponencial y logarítmica, cuando $a > 1$; con este gráfico se podrá evidenciar la relación inversa que hay entre estas dos funciones.



Página 19



1.2 Funciones logarítmicas

Como vimos, el número de descendientes de un ejemplar de bacteria *nitrobacter agilis* al cabo de t días es 2^t. Si queremos averiguar los días que deben transcurrir hasta tener, por ejemplo, 32 768 descendientes, tendremos que hallar el valor de t para el cual $2^t = 32\,768$.

Según la definición de logaritmo, tenemos que:

$$2^t = 32\,768 \rightarrow t = \log_2 32\,768$$

Su dominio es los reales positivos, y su rango son todos los reales. Es decir, $D(f) = \mathbb{R}^+$ y $I(f) = \mathbb{R}$.

Y TAMBIÉN: **Observa** que, si a un valor de x le aplicamos la función exponencial en base a y, a continuación, la función logarítmica en base a, obtenemos de nuevo x. Es decir:

$$\log_a(a^x) = x$$

En general, el número de días que habrán de transcurrir hasta tener un número x de individuos, x, será de $t = \log_2 x$.

Vemos, pues, que dicho número de días es una función que viene dada por el logaritmo en base 2 de un número. A esta función la llamamos *función logarítmica en base 2* y la escribimos $f(x) = \log_2 x$.

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad x \rightarrow f(x) = \log_2 x$$

A la función que asigna a la variable independiente x el valor $f(x) = \log_a x$ la llamamos función logarítmica en base a, donde a es un número real positivo diferente de 1.

Análogamente se cumple que $a^{\log_a x} = x$. Vemos entonces que las funciones exponenciales y logarítmicas son funciones inversas.

Igual que la gráfica de las funciones exponenciales, la gráfica de la función logarítmica varía según la base a sea mayor o menor que 1.

Gráfica de la función $f(x) = \log_a x, a > 1$	Gráfica de la función $g(x) = \log_a x, 0 < a < 1$

Tabla 1.

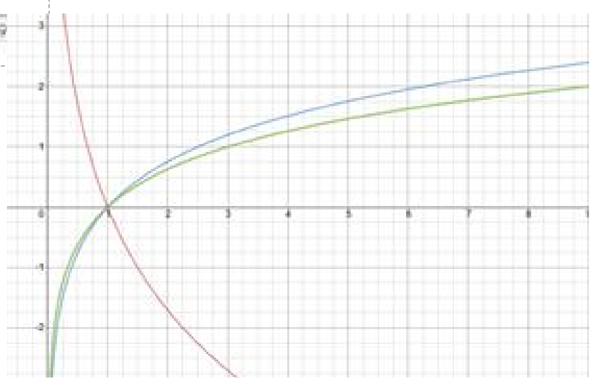
Actividades

4. **Representa** en el mismo sistema de coordenadas:

a. $f(x) = \log_{[illegible]} x$ b. $g(x) = \log_{[illegible]} x$ c. $y(x) = \log_{[illegible]} x$

ucionario

odemos ver que todas las rectas se ruzan en el punto $x = 1$



Prohibida su reproducción

Solucionario

5.

a) $x = 5$

b) $x = \frac{9}{2}$

d) $x = 2$

g) $7^x = 2$

$x \approx 0{,}356$

Desarrollo del ejercicio a)

$$2^{3x-5} = 1024$$

$$\frac{2^{3x}}{2^5} = 1024$$

$$2^{3x} = (1024)(32)$$

$$2^{3x} = 2^{10} \cdot 2^5$$

$$2^{3x} = 2^{15}$$

$$\Rightarrow 3x = 15$$

$$x = 5$$

Página 20

Y TAMBIÉN

Si hacemos el cambio [illegible] por las propiedades de las potencias, se tiene: [illegible]

1.3 Ecuaciones exponenciales

Observa la expresión $2^x = 32\,768$.

Se trata de una ecuación cuya incógnita aparece en un exponente.

Llamamos ecuaciones exponenciales a aquellas ecuaciones cuya incógnita aparece en el exponente de una potencia.

Para resolver una ecuación exponencial, además de la definición y las propiedades de las potencias y los logaritmos, utilizaremos:

- La inyectividad de las funciones exponenciales: [illegible]

  La inyectividad permite convertir una ecuación exponencial en otra ecuación cuya resolución es más sencilla.

- Un cambio de variable: en general $a^x = t$.

  Este cambio de variable permite convertir una ecuación exponencial, cuya incógnita es x, en otra ecuación, cuya incógnita es t, y de resolución más sencilla.

Ejemplo 1

Resuelve la ecuación $2^x = 32\,768$.
Escribiremos en forma de potencias de la misma base los dos miembros de la ecuación. Para ello descompondremos en factores primos el número 32 768.
Obtenemos $32\,768 = 2^{15}$, de donde resulta $2^x = 2^{15}$.
Así pues, por la inyectividad de las funciones exponenciales, tenemos que $x = 15$.
Observa que este resultado coincide con el logaritmo en base 2 de 32 768.

Ejemplo 2

Resuelve la ecuación $2^{3x} = 11$.
Tomamos logaritmos decimales en ambos miembros de la ecuación:
$\log 2^{3x} = \log 11$
Por las propiedades de los logaritmos:
$$3x \cdot \log 2 = \log 11$$
Y de aquí:
$$3x = \frac{\log 11}{\log 2} = 3{,}46$$
Luego $x = 1{,}15$.

Ejemplo 3

Resuelve la ecuación [illegible].
Por las propiedades de las potencias, la ecuación se puede escribir:
$$\frac{3^{2x}}{3} - 3^x = 18$$
Efectuaremos el cambio de variable $3^x = t$. De esta forma $3^{2x} = t^2$, por lo que resulta una ecuación cuya incógnita es t:
$$\frac{t^2}{3} - t = 18$$
Eliminando denominadores se obtiene la siguiente ecuación de segundo grado:
$$t^2 - 3t - 54 = 0$$
Las soluciones de esta ecuación son $t = 9$ y $t = -6$.
Observa que la solución $t = -6$ no es válida, ya que equivale a la expresión $3^x = -6$, y 3^x ha de ser siempre un número positivo.
Por tanto, la única solución válida es $t = 9$, o lo que es igual, $3^x = 9$.
Escribiendo ambos miembros de la igualdad como potencias de la misma base, tenemos que $3^x = 3^2$.
Luego $x = 2$.

Actividades

5. **Resuelve** las siguientes ecuaciones.

a. $2^{3x-5} = 1024$ c. [illegible] e. [illegible] g. $7^x = 2$ i. [illegible]

b. [illegible] d. [illegible] f. [illegible] h. [illegible] i. [illegible]

20

Prohibida su reproducción

Página 21


1.4 Ecuaciones logarítmicas

Observa la expresión log x = 2,5143.

Se trata de una ecuación cuya incógnita viene afectada por un logaritmo.

Llamamos ecuaciones logarítmicas a aquellas ecuaciones cuya incógnita viene afectada por un logaritmo.

Ejemplo 4

Ejemplo 5

Actividades

21

Orientación didáctica

- Para este tipo de ecuaciones logarítmicas, los estudiantes deben tener a mano las propiedades de funciones exponenciales y de funciones logarítmicas.

Solucionario

1.

a) $x = 1$

b) $x_1 = 4$; $x_2 = -4$

c) $x = 1$

d) $x = 24$

e) $x_1 = 2$; $x_2 = -1$

h) $h = 8192$

Prohibida su reproducción

Solucionario

1.

a) -2,

b) -1

c) -2

d) No existe

e) 0

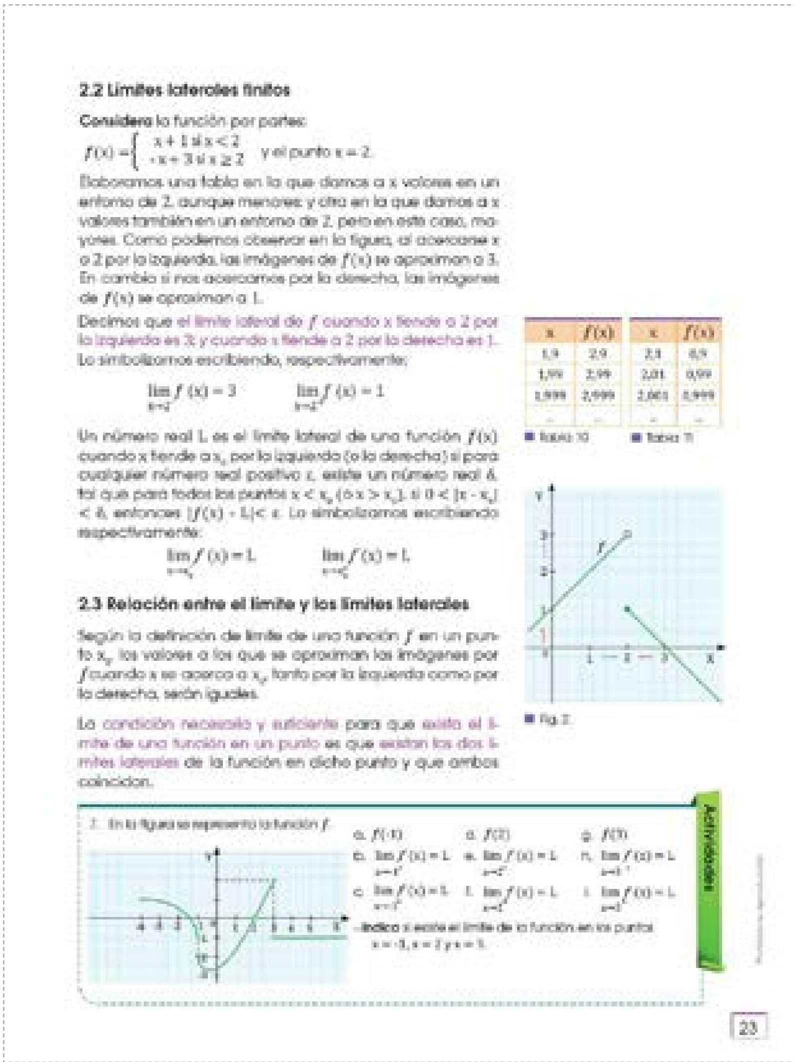
f) 0

g) 2

h) 2

i) -1

Página 23



2.2 Límites laterales finitos

Considera la función por partes:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ si } x < 2 \\ -x + 3 \text{ si } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{y el punto } x = 2.$$

Elaboramos una tabla en la que damos a x valores en un entorno de 2, aunque menores; y otra en la que damos a x valores también en un entorno de 2, pero en este caso, mayores. Como podemos observar en la figura, al acercarse x a 2 por la izquierda, las imágenes de $f(x)$ se aproximan a 3. En cambio si nos acercamos por la derecha, las imágenes de $f(x)$ se aproximan a 1.

Decimos que el límite lateral de f cuando x tiende a 2 por la izquierda es 3; y cuando x tiende a 2 por la derecha es 1. Lo simbolizamos escribiendo, respectivamente:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 3 \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = 1$$

x	$f(x)$
1,9	2,9
1,99	2,99
1,999	2,999
...	...

Tabla 10

x	$f(x)$
2,1	0,9
2,01	0,99
2,001	0,999
...	...

Tabla 11

Un número real L es el límite lateral de una función $f(x)$ cuando x tiende a x_0 por la izquierda (o la derecha) si para cualquier número real positivo ε, existe un número real δ, tal que para todos los puntos $x < x_0$ (ó $x > x_0$), si $0 < |x - x_0| < δ$, entonces $|f(x) - L| < ε$. Lo simbolizamos escribiendo respectivamente:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

Fig. 2

2.3 Relación entre el límite y los límites laterales

Según la definición de límite de una función f en un punto x_0, los valores a los que se aproximan las imágenes por f cuando x se acerca a x_0, tanto por la izquierda como por la derecha, serán iguales.

La condición necesaria y suficiente para que exista el límite de una función en un punto es que existan los dos límites laterales de la función en dicho punto y que ambos coincidan.

Actividades

2. En la figura se representa la función f.

a. $f(-1)$ d. $f(2)$ g. $f(3)$

b. $\lim_{x \to -1^-} f(x) = L$ e. $\lim_{x \to 2^-} f(x) = L$ h. $\lim_{x \to 3^-} f(x) = L$

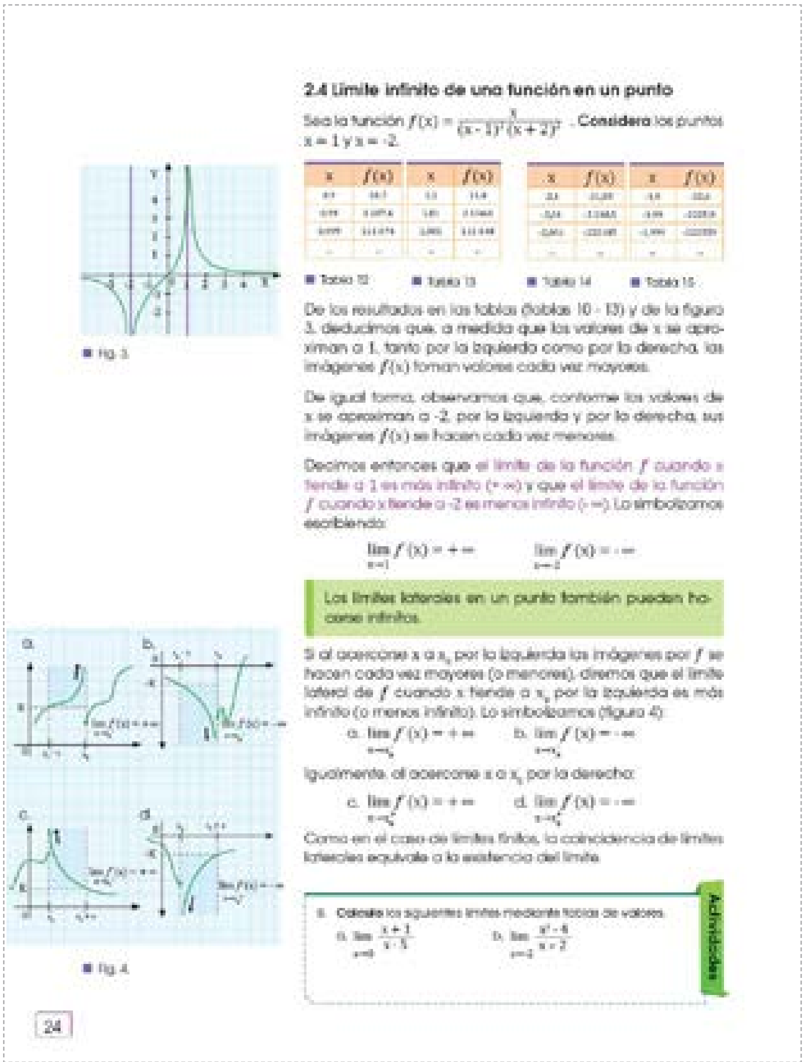
c. $\lim_{x \to -1^+} f(x) = L$ f. $\lim_{x \to 2^+} f(x) = L$ i. $\lim_{x \to 3^+} f(x) = L$

— **Indica** si existe el límite de la función en los puntos $x = -1$, $x = 2$ y $x = 3$.

23

Prohibida su reproducción

Página 24



2.4 Límite infinito de una función en un punto

Sea la función $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2 (x+2)^2}$. **Considera** los puntos $x = 1$ y $x = -2$.

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
...	...	...	...	...	...	...	...

■ Tabla 12 ■ Tabla 13 ■ Tabla 14 ■ Tabla 15

■ Fig. 3

De los resultados en las tablas (tablas 10 - 13) y de la figura 3, deducimos que, a medida que los valores de x se aproximan a 1, tanto por la izquierda como por la derecha, las imágenes $f(x)$ toman valores cada vez mayores.

De igual forma, observamos que, conforme los valores de x se aproximan a -2, por la izquierda y por la derecha, sus imágenes $f(x)$ se hacen cada vez menores.

Decimos entonces que el límite de la función f cuando x tiende a 1 es más infinito ($+\infty$) y que el límite de la función f cuando x tiende a -2 es menos infinito ($-\infty$). Lo simbolizamos escribiendo:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -2} f(x) = -\infty$$

Los límites laterales en un punto también pueden hacerse infinitos.

Si al acercarse x a x_0 por la izquierda las imágenes por f se hacen cada vez mayores (o menores), diremos que el límite lateral de f cuando x tiende a x_0 por la izquierda es más infinito (o menos infinito). Lo simbolizamos (figura 4):

a. $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ b. $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$

Igualmente, al acercarse x a x_0 por la derecha:

c. $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ d. $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$

Como en el caso de límites finitos, la coincidencia de límites laterales equivale a la existencia del límite.

■ Fig. 4

Actividades

8. **Calcula** los siguientes límites mediante tablas de valores.

a. $\lim_{x \to 0} \frac{x+1}{x-1}$ b. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

24

Orientación didáctica

- Es importante que recuerde el profesor, que cuando el resultado de un límite es igual a infinito, en realidad no es un límite real, sino una tendencia. Ya que para que sea considerado un límite, la respuesta debe ser un solo número real..

Solucionario

1. __

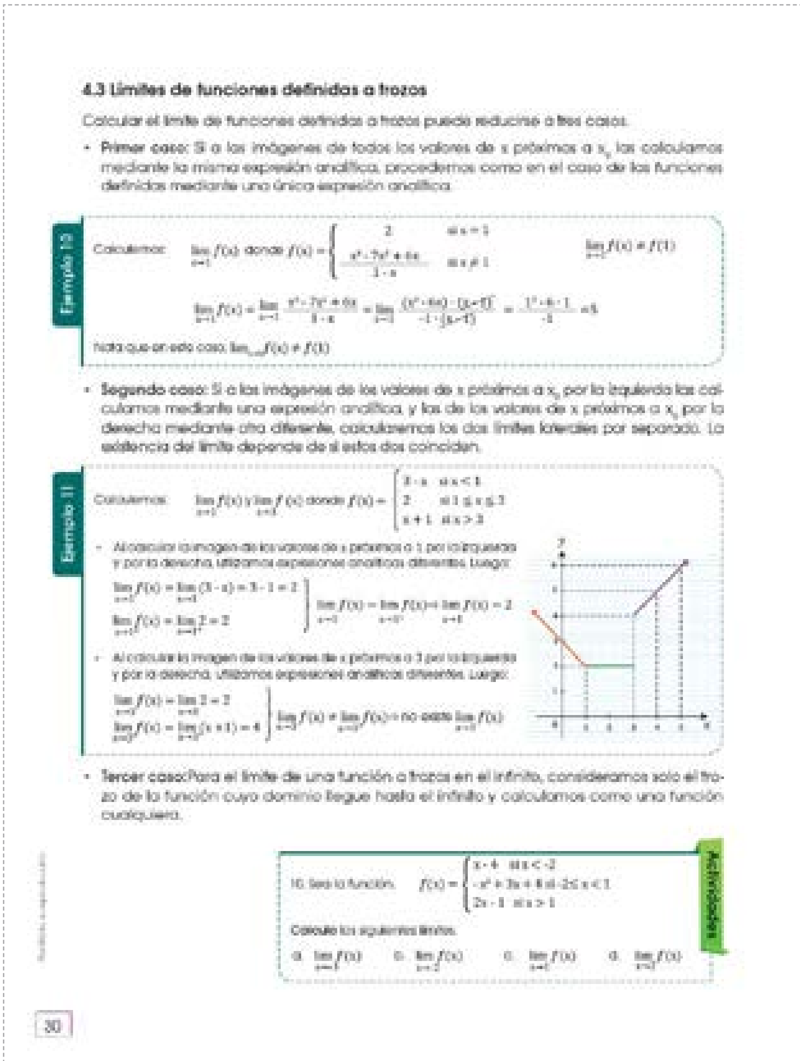
a) 1

5

b) - 4

Prohibida su reproducción

Página 30



4.3 Límites de funciones definidas a trozos

Calcular el límite de funciones definidas a trozos puede reducirse a tres casos.

- **Primer caso:** Si a las imágenes de todos los valores de x próximos a x_0 las calculamos mediante la misma expresión analítica, procedemos como en el caso de las funciones definidas mediante una única expresión analítica.

Ejemplo 10

Calculemos $\lim_{x \to 1} f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x = 1 \\ \frac{x^3 - 7x^2 + 6x}{1 - x} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$

Nota que en este caso, $\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$

- **Segundo caso:** Si a las imágenes de los valores de x próximos a x_0 por la izquierda las calculamos mediante una expresión analítica, y las de los valores de x próximos a x_0 por la derecha mediante otra diferente, calcularemos los dos límites laterales por separado. La existencia del límite depende de si estos dos coinciden.

Ejemplo 11

Calculemos $\lim_{x \to 1} f(x)$ y $\lim_{x \to 3} f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ x + 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

- Al calcular la imagen de los valores de x próximos a 1 por la izquierda y por la derecha, utilizamos expresiones analíticas diferentes. Luego:

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} (3 - x) = 3 - 1 = 2$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2 = 2$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} f(x) = 2$

- Al calcular la imagen de los valores de x próximos a 3 por la izquierda y por la derecha, utilizamos expresiones analíticas diferentes. Luego:

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3} 2 = 2$

$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (x + 1) = 4$

$\lim_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim_{x \to 3^+} f(x) \rightarrow$ no existe $\lim_{x \to 3} f(x)$

- **Tercer caso:** Para el límite de una función a trozos en el infinito, consideramos solo el trozo de la función cuyo dominio llegue hasta el infinito y calculamos como una función cualquiera.

Actividades

10. Sea la función $f(x) = \begin{cases} x - 4 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 3x + 4 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Calcula los siguientes límites.

a. $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ b. $\lim_{x \to -2} f(x)$ c. $\lim_{x \to 1} f(x)$ d. $\lim_{x \to 2} f(x)$

30

Orientación didáctica

- En este tema es mejor antes de desarrollar los ejercicios correspondientes, graficar primero unicamente los intervalos del dominio de la función definida a trozos, así podremos apreciar mejor el esquema general.

Solucionario

1. a) -7;

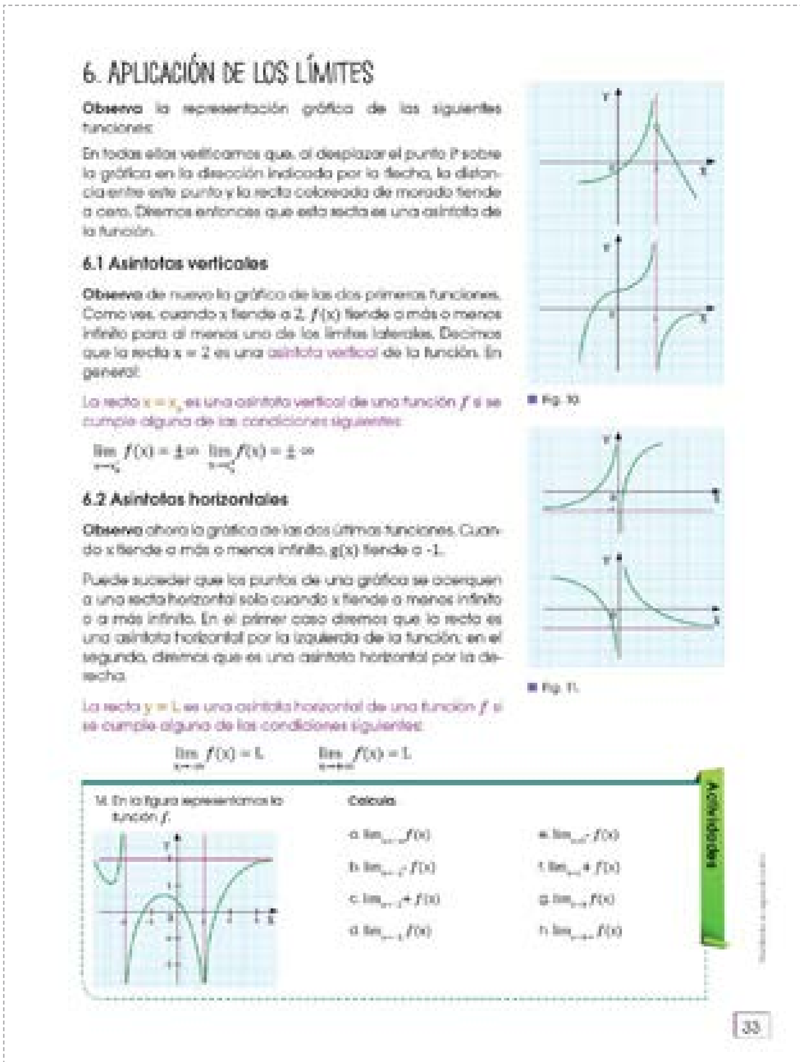
b) -6;

c) No existe;

d) 3

Prohibida su reproducción

Página 33



6. APLICACIÓN DE LOS LÍMITES

Observa la representación gráfica de las siguientes funciones:

En todas ellas verificamos que, al desplazar el punto P sobre la gráfica en la dirección indicada por la flecha, la distancia entre este punto y la recta coloreada de morado tiende a cero. Diremos entonces que esta recta es una asíntota de la función.

6.1 Asíntotas verticales

Observa de nuevo la gráfica de las dos primeras funciones. Como ves, cuando x tiende a 2, $f(x)$ tiende a más o menos infinito para al menos uno de los límites laterales. Decimos que la recta $x = 2$ es una asíntota vertical de la función. En general:

La recta $x = x_0$ es una asíntota vertical de una función f si se cumple alguna de las condiciones siguientes:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

■ Fig. 10.

6.2 Asíntotas horizontales

Observa ahora la gráfica de las dos últimas funciones. Cuando x tiende a más o menos infinito, g(x) tiende a -1.

Puede suceder que los puntos de una gráfica se acerquen a una recta horizontal solo cuando x tiende a menos infinito o a más infinito. En el primer caso diremos que la recta es una asíntota horizontal por la izquierda de la función; en el segundo, diremos que es una asíntota horizontal por la derecha.

■ Fig. 11.

La recta $y = L$ es una asíntota horizontal de una función f si se cumple alguna de las condiciones siguientes:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = L \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = L$$

Actividades

14. En la figura representamos la función f.

Calcula

a. lim f(x)
b. lim f(x)
c. lim f(x)
d. lim f(x)
e. lim f(x)
f. lim f(x)
g. lim f(x)
h. lim f(x)

33

Solucionario

1.

a) +∞;

b) +∞;

c) -∞;

d) No existe;

e) -∞;

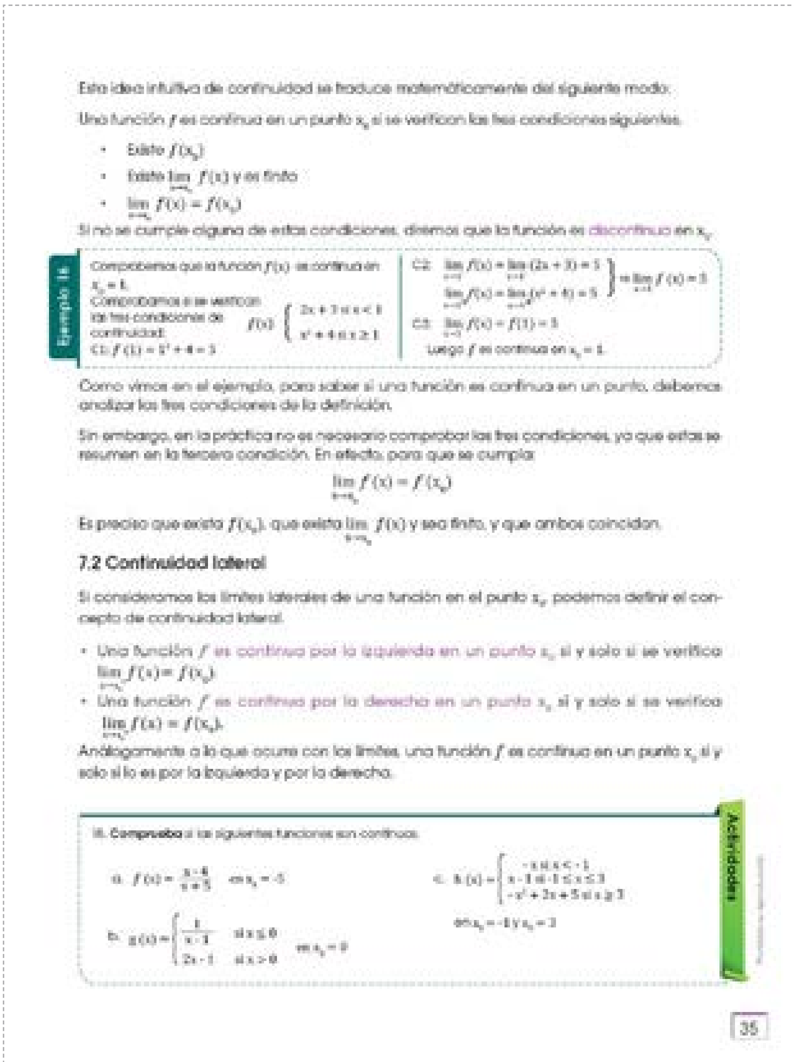
f) -∞;

g) -∞;

h) 2

Prohibida su reproducción

Página 35


Esta idea intuitiva de continuidad se traduce matemáticamente del siguiente modo:

Una función f es continua en un punto x_0 si se verifican las tres condiciones siguientes:

- Existe $f(x_0)$
- Existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$ y es finito
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Si no se cumple alguna de estas condiciones, diremos que la función es discontinua en x_0.

Ejemplo 16

Comprobemos que la función $f(x)$ es continua en $x_0 = 1$.

Comprobamos si se verifican las tres condiciones de continuidad:

$f(x) \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + 4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

C1: $f(1) = 1^2 + 4 = 5$

C2: $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} (2x + 3) = 5 \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} (x^2 + 4) = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 5$

C3: $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 5$

Luego f es continua en $x_0 = 1$.

Como vimos en el ejemplo, para saber si una función es continua en un punto, debemos analizar las tres condiciones de la definición.

Sin embargo, en la práctica no es necesario comprobar las tres condiciones, ya que estas se resumen en la tercera condición. En efecto, para que se cumpla:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Es preciso que exista $f(x_0)$, que exista $\lim_{x \to x_0} f(x)$ y sea finito, y que ambos coincidan.

7.2 Continuidad lateral

Si consideramos los límites laterales de una función en el punto x_0, podemos definir el concepto de continuidad lateral.

- Una función f es continua por la izquierda en un punto x_0 si y solo si se verifica $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
- Una función f es continua por la derecha en un punto x_0 si y solo si se verifica $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Análogamente a lo que ocurre con los límites, una función f es continua en un punto x_0 si y solo si lo es por la izquierda y por la derecha.

Actividades

15. **Comprueba** si las siguientes funciones son continuas.

35

Orientación didáctica

- Se le recomienda la docente consultar, acerca de cuando una función discontinua es evitable o no evitable, ya que estos conseptos les serán de utilidad a los alumnos en cursos superiores.

Solucionario

15.

a) No es continua,

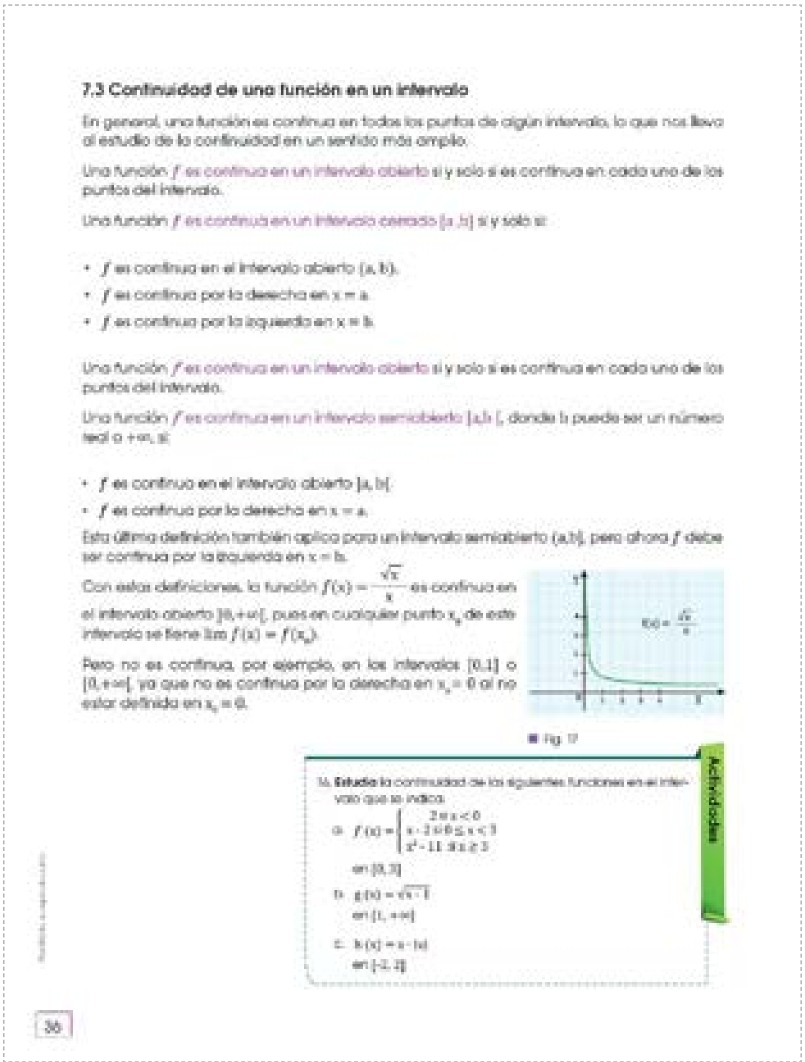
b) Es continua,

c) No continua en -1,

continua en 3

Prohibida su reproducción

Página 36



7.3 Continuidad de una función en un intervalo

En general, una función es continua en todos los puntos de algún intervalo, lo que nos lleva al estudio de la continuidad en un sentido más amplio.

Una función f es continua en un intervalo abierto si y solo si es continua en cada uno de los puntos del intervalo.

Una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ si y solo si:

- f es continua en el intervalo abierto (a, b).
- f es continua por la derecha en $x = a$.
- f es continua por la izquierda en $x = b$.

Una función f es continua en un intervalo abierto si y solo si es continua en cada uno de los puntos del intervalo.

Una función f es continua en un intervalo semiabierto $[a, b[$, donde b puede ser un número real o $+\infty$, si:

- f es continua en el intervalo abierto $]a, b[$.
- f es continua por la derecha en $x = a$.

Esta última definición también aplica para un intervalo semiabierto $(a, b]$, pero ahora f debe ser continua por la izquierda en $x = b$.

Con estas definiciones, la función $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$ es continua en el intervalo abierto $]0, +\infty[$, pues en cualquier punto x_0 de este intervalo se tiene $\lim f(x) = f(x_0)$.

Pero no es continua, por ejemplo, en los intervalos $[0, 1]$ o $[0, +\infty[$, ya que no es continua por la derecha en $x_0 = 0$ al no estar definida en $x_0 = 0$.

Fig. 17

Actividades

16. **Estudia** la continuidad de las siguientes funciones en el intervalo que se indica.

a. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ x - 2 & \text{si } 0 \le x < 3 \\ x^2 - 11 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$ en $[0, 3]$

b. $g(x) = \sqrt{x - 1}$ en $[1, +\infty[$

c. $h(x) = x - |x|$ en $[-2, 2]$

36

Orientación didáctica

- Le recordamos al docente hacer enfasis en este tipo de funciones, ya que el consepto de continuidad es de importancia central en el calculo diferencial.

Solucionario

16.

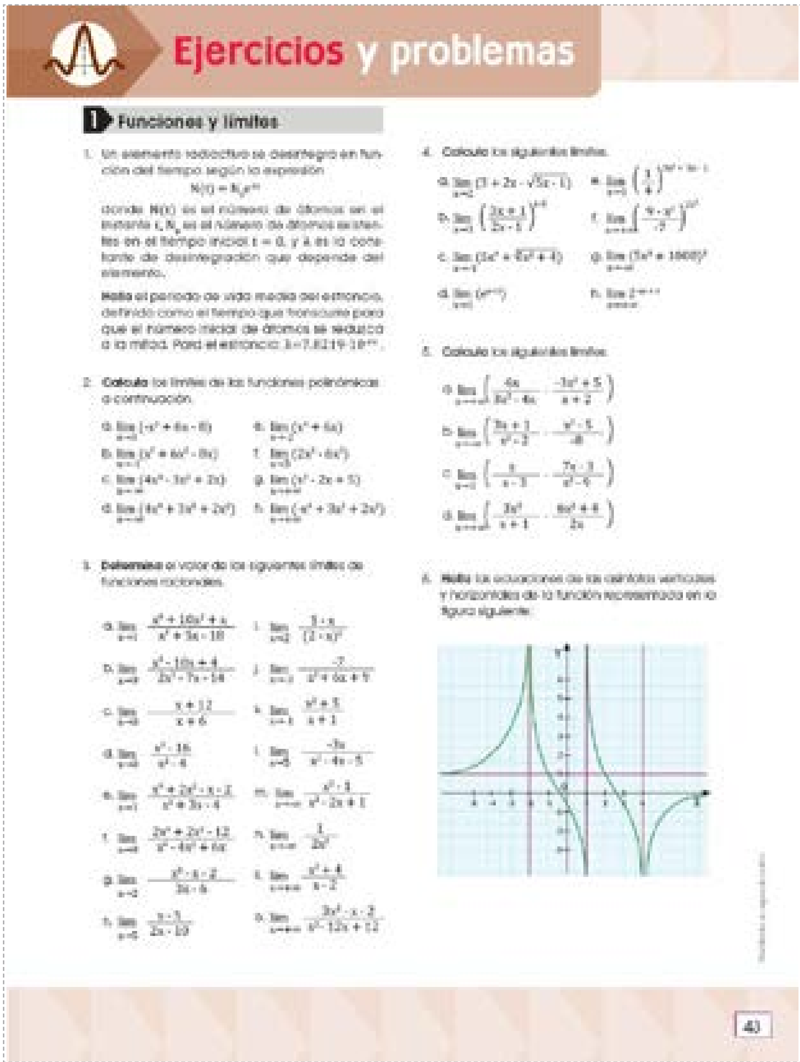
a) Continua en el intervalo. Discontinua en el punto x=3

b) Continua

c) Continua

Prohibida su reproducción

Página 43



Solucionario

1. 28.2 Años

2. a) -8; b) 4; c) 13; d) 0;
e) $-\infty$; f) $+\infty$; g) $+\infty$; h) $-\infty$

3. a) -1; b) - 1/17 ; c) 2; d) 4;
e) 6/5; f) -2; g) 1; h) 1/2 ;
i) $-\infty$; j) $-\infty$; k) ∞; l) ∞;
ll) $+\infty$; m) 1; n) 0; o) 3

4. a) 4; b) 1/8 c) $-5\sqrt[3]{5}$;
d) e^2; e)0; f) $+\infty$; g) $-\infty$; h) 0

5. a) -6; b) $+\infty$; c) 1/3; d) -3

Prohibida su reproducción

Página 44

Solucionario

7. $-\infty$

8.

9. a=8; 7

10. a= - 30

11. m = 4; el valor del límite es 6.

12. a= 12; b= - 3

13. a = 3/2 ; b = - 3/2

14. m = 1; n= 12

15.

16.

17.

18. 3

19.

20. a) M = (-1; 11) Y m = (1, 3);

d) M = (1, 4) y m = (-3, -12)

Prohibida su reproducción

Página 45

Orientación didáctica

- Las tablas adjuntas 23, 24 y 25, serán de gran utilidad, en la operatividad de los ejercicios, es recomendable que el estudiante las tenga siempre a mano al realizar los ejercicios, tanto en clase como en deberes.

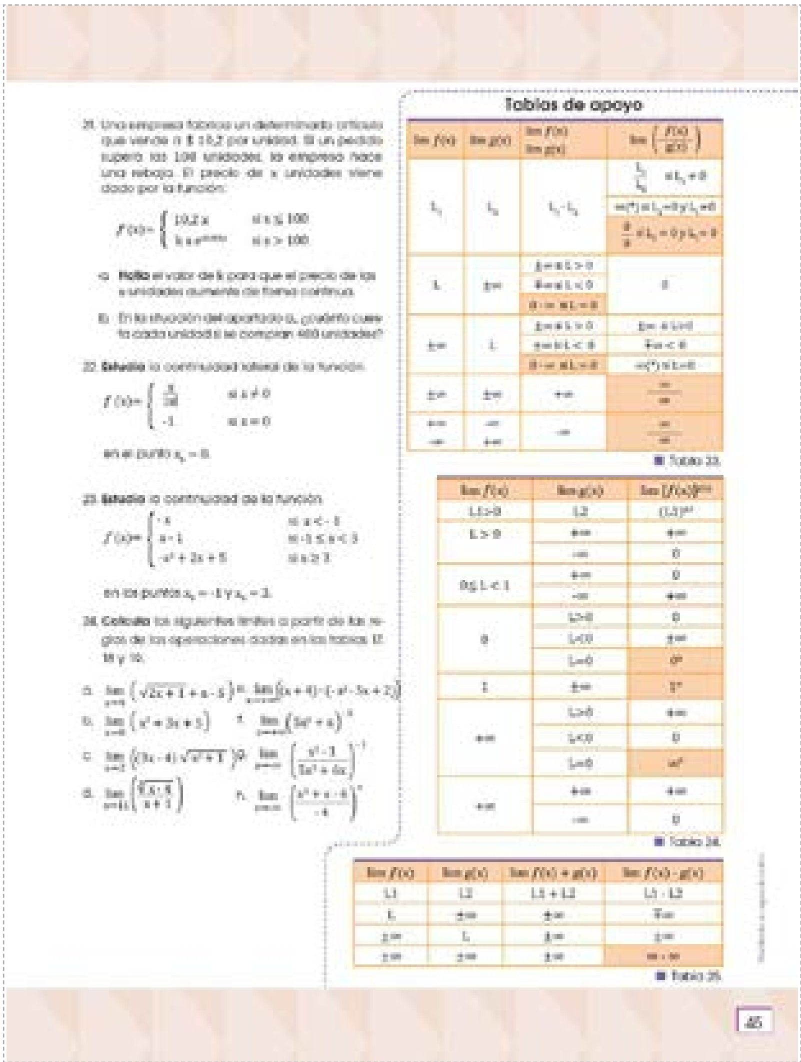
Solucionario

21. a) k=11, 27 b) cada unidad cuesta 7,55 euros.

22. Continua en (-∞, 0), y en (0, ∞)

Discontinua en el punto 0

23. Discontinua en x = -1, continua en x = 3



Prohibida su reproducción

Página 46

Para finalizar

1. Para describir los efectos de un terremoto se utiliza la escala de Richter. Según esta escala, la magnitud M de un terremoto viene dada por la expresión:

$$M = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

Donde E es la energía del terremoto y E_0 es una constante igual a $2.5 \cdot 10^4$ J.

Calcula la energía liberada en el terremoto de San Francisco del año 1906 si su magnitud fue de 8.25 en la escala de Richter.

2. **Calcula** los siguientes límites.

a. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 10x + 4}{2x^2 - 7x - 14}$

b. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x - 2}{3x - 6}$

c. $\lim_{x \to 5} \frac{x - 5}{\sqrt{2x + 6} - 4}$

d. $\lim_{x \to 2} \frac{1 - x}{(2 - x)^2}$

e. $\lim_{x \to +\infty} \frac{7x^2 - 5x + 3}{2x^2 - 9}$

3. **Grafica** la función $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$ y **halla** las asíntotas verticales y horizontales.

4. **Determina** los valores de a y b para que la siguiente función sea continua en ℝ.

$$f(x) = \begin{cases} 5 \operatorname{sen} x \text{ si } x < -\frac{\pi}{2} \\ a \operatorname{sen}(x) + b \text{ si } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 2\cos(x) + 3 \text{ si } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

5. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x - 4 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 3x + 4 & \text{si } -2 \le x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

– **Calcula** los siguientes límites mediante las técnicas de cálculo sistemático.

a. $\lim_{x \to -3} f(x)$ c. $\lim_{x \to 1} f(x)$

b. $\lim_{x \to -2} f(x)$ d. $\lim_{x \to 2} f(x)$

6. **Calcula** las asíntotas de la siguiente función.

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 5}{x^2 - 1}$$

7. La población de un Estado, en millones de habitantes, se rige por la función siguiente:

$$P(t) = \frac{5(t-2)^2}{50 + (t-2)^2} + 30$$

a. **Calcula** la población actual (t = 0).

b. **Calcula** la población dentro de diez años.

c. ¿Qué sucede a medida que pasan los años?

AUTOEVALUACIÓN

Reflexiona y **autoevalúate** en tu cuaderno:

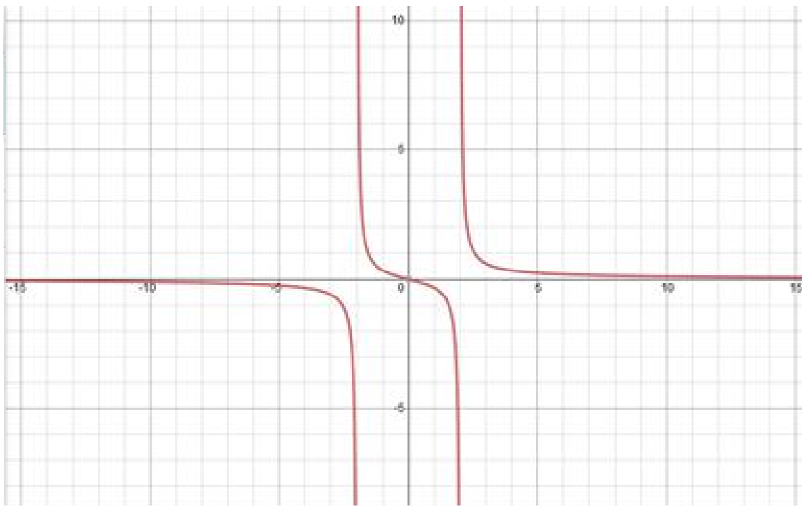
• Trabajo personal

• Trabajo en equipo

• **Escribe** la opinión de tu familia.

• **Pide** a tu profesor o profesora sugerencias para mejorar y **escríbelas**.

46



Gráficoderespuesta3

Orientación didáctica

- En el ejercicio 6 es recomendable hallar los puntos del dominio de la función, teniendo en cuenta que el denominador no puede ser 0. Además se debe hallar el residuo de la dicisión planteada, para ver si hay asíntotas oblicuas.

Solucionario

1. 5.9×10^{16} J

2. a) 1, b) 1 c) 2/3 d) $-\infty$ e) 7/2

3. Asíntota vertical: x=-2,x=2. Asíntota horizontal: x=0

4. a=4; b=-1

5.

a) -7

b) -6

c) No existe el límite, ya que los límites laterales no son iguales.

d) 5

7.

a) 30

b) 52 456 140 habitantes aproximadamente

c) La población crece rápidamente

Prohibida su reproducción

Una de las funciones más usadas en casi todas las ciencias es la función de distribución Gaussiana como por ejemplo:

Pruebas de normalidad

Como ya sabemos, para ajustar una tabla de frecuencias de tamaño *n* a la distribución normal, comparamos las frecuencias relativas de la tabla con las correspondientes probabilidades obtenidas con una distribución normal con la misma media y la misma desviación típica. De esta comparación podemos deducir, *grosso modo,* si los resultados obtenidos se parecen o no.

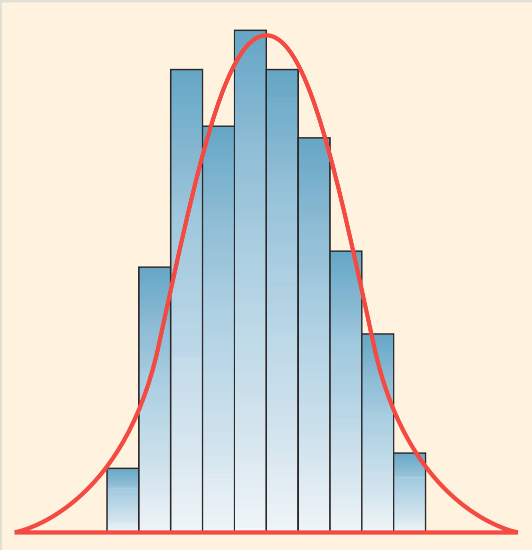
Si deseamos realizar la comparación con mayor precisión, podemos acudir a una prueba de normalidad, como por ejemplo la de Kolmogorov-Smirnov. Esta prueba consiste en:

— Calcular las frecuencias relativas acumuladas de la tabla.

— Hallar los valores que da la distribución normal.

— Obtener las diferencias en valor absoluto entre ambos resultados y tomar la mayor de ellas, d_m.

Entonces, si $d_m \leq \frac{136}{\sqrt{m}}$, podremos asegurar, con un riesgo del 5 %, que el ajuste es bueno y que, por lo tanto, la población se comporta según una distribución normal.



Prohibida su reproducción

Orientación didáctica

Otro tópico para usar como sentido crítico es el siguiente:

- Las paradojas de Zenón son una serie de paradojas o aporías ideadas por Zenón de Elea. Dedicado principalmente al problema del continuo y a las relaciones entre espacio, tiempo y movimiento

El grupo más difundido se conoce como «paradojas del movimiento», que se dedica al problema de la imposibilidad del mismo y está integrado por varias paradojas, entre ellas está la de Aquiles y la tortuga

La paradoja de Aquiles y la tortuga

Aquiles, llamado "el de los pies ligeros" y el más hábil guerrero de los aqueos, quien mató a Héctor, decide salir a competir en una carrera contra una tortuga. Ya que corre mucho más rápido que ella, y seguro de sus posibilidades, le da una gran ventaja inicial. Al darse la salida, Aquiles recorre en poco tiempo la distancia que los separaba inicialmente, pero al llegar allí descubre que la tortuga ya no está, sino que ha avanzado, más lentamente, un pequeño trecho. Sin desanimarse, sigue corriendo, pero al llegar de nuevo donde estaba la tortuga, ésta ha avanzado un poco más. De este modo, Aquiles no ganará la carrera, ya que la tortuga estará siempre por delante de él.

Aunque parezca lógico, es una paradoja porque la situación planteada contradice cualquier experiencia cotidiana: todo el mundo sabe que un corredor veloz alcanzará a uno lento aunque le dé ventaja.

En este tema podrás aplicar la teoría de los límites para poner a prueba las destrezas adquiridas.

Más información en: https://goo.gl/wj9QDN


ZONA

UD. 1

El hotel infinito

La siguiente historia fue contada por el matemático David Hilbert, para intentar explicar el concepto de infinito.
Imagina un hotel con infinitas habitaciones. Un día, un viajero llega al hotel y pide una habitación, pero se encuentra con que todas están ocupadas. La recepcionista le dice que no se preocupe, y pide al huésped en la habitación 1 que se mude a la habitación 2, al de la habitación 2 a la habitación 3, y así sucesivamente. Ahora, todos los huéspedes seguían teniendo una habitación, y el viajero pudo tomar la habitación 1.
Otro día en que el hotel estaba lleno, un bus infinito llegó al hotel, con un número infinito de turistas. La recepcionista entonces pidió al huésped en la habitación 1 que se cambie a la habitación 2, al huésped de la habitación 2 a la habitación 4, y así el huésped en la habitación n se mudó a la habitación 2n. Así solo las habitaciones pares estaban ocupadas, y los turistas pudieron ocupar las habitaciones impares sin ningún problema.

La ley de Fechner-Weber

La psicología estudia la relación existente entre los estímulos recibidos (intensidad de la luz, volumen sonoro, peso sostenido...) y las sensaciones que dichos estímulos nos producen.
La ley de Fechner-Weber establece que las sensaciones, S(x), crecen según el logaritmo neperiano de los estímulos, x:

$$S(x) = k \cdot \ln(x)$$

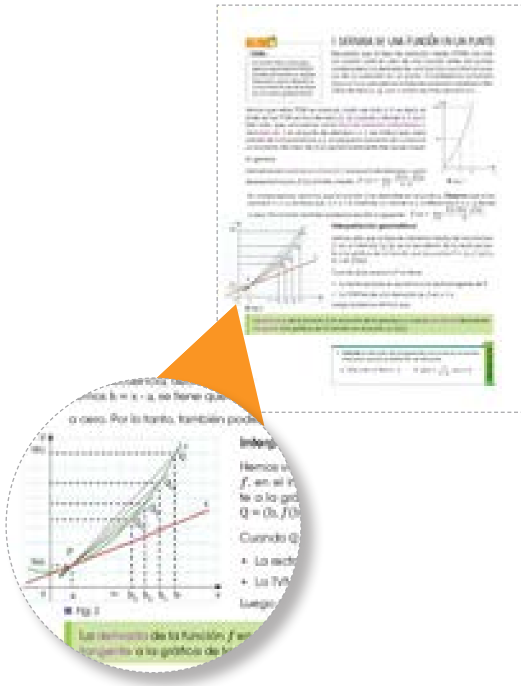
Imagina, por ejemplo, que estás escuchando música. Según esta ley, cuanto más alto esté el volumen de la música, más deberás elevarlo para que tu oído aprecie el incremento del sonido.

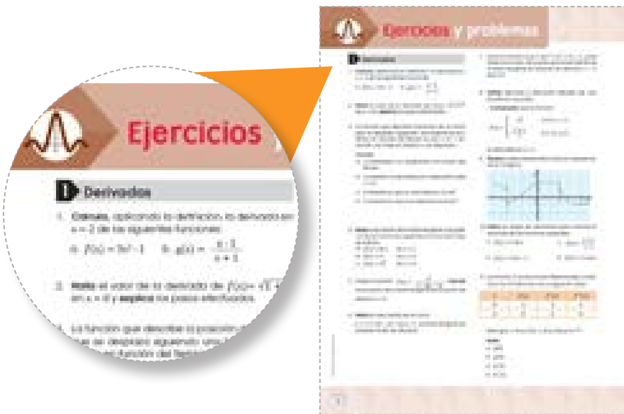
Ingeniero civil

Utilizaría los límites para entender el comportamiento de una función. Dado que el peso y la distribución de carga estructural en una construcción pueden ser modelados mediante funciones, los ingenieros civiles deben poder mantener un equilibrio entre la cantidad de carga posible y su distribución para mantener una estructura sólida y segura. Los límites juegan un papel importante en estos cálculos.

47

Derivadas e integrales





Prohibida su reproducción

UNIDAD 2

Ejes temáticos	Contenidos	
Derivadas e Integrales (48 - 83)	1. Derivada de una función en un punto	
	2. Función derivada	
	3. Función derivada y operaciones	
	4. Diferencial de una función	
	5. Aplicaciones de las derivadas	5.1. Crecimiento de una función en un punto 5.2. Extremos relativos 5.3. Curvatura y punto de inflexión
	6. Área bajo una curva	
	7. Integral definida	**7.1. Concepto** **7.2. Propiedades** **7.3. Teorema fundamental del cálculo** **7.4 Segundo teorema fundamental del cálculo** **7.5 Métodos numéricos de integración**
	8. Primitivas e integrales indefinidas	8.1. Primitivas 8.2. Integrales indefinidas 8.3. Propiedades de las integrales indefinidas 8.4. Integrales indefinidas inmediatas
	9. Métodos básicos de integración	**9.1. Integración por descomposición** **9.2. Integración por cambio de variable** **9.3. Integración por partes**
	Aplicaciones de la integral definida	**10.1.Área de figuras planas** **10.2.Área limitada por dos funciones continua y las rectas x = a y x = b** **10.3.Aplicaciones en física**

Prohibida su reproducción

Objetivo del área por subnivel

O.M.5.2. Producir, comunicar y generalizar información, de manera escrita, verbal, simbólica, gráfica y/o tecnológica, mediante la aplicación de conocimientos matemáticos y el manejo organizado, responsable y honesto de las fuentes de datos, para así comprender otras disciplinas, entender las necesidades y potencialidades de nuestro país, y tomar decisiones con responsabilidad social.

Objetivo integrador del área por subnivel

OI.5.2. Aplicar conocimientos de diferentes disciplinas para la toma de decisiones asertivas
Y socialmente responsables, a partir de un proceso de análisis que justifique la validez de sus hallazgos, poniendo especial cuidado en el uso técnico y ético de diversas fuentes y demostrando honestidad académica.
OI.5.11. Reflexionar y tomar decisiones respecto a una sexualidad responsable y a su participación sistemática en prácticas corporales y estéticas, considerando su repercusión en una vida saludable y la influencia de las modas en la construcción de los hábitos y de las etiquetas sociales en la concepción de la imagen corporal.

<table>
<tr><th>Logo Institucional</th><th colspan="4">Nombre de la institución</th><th colspan="3">Año lectivo</th></tr>
<tr><td colspan="8">PLAN DE UNIDAD TEMÁTICA</td></tr>
<tr><td colspan="8">1. DATOS INFORMATIVOS:</td></tr>
<tr><td>Docente:</td><td>Nombre del docente que ingresa la información</td><td>Área/asignatura:</td><td>MATEMÁTICA</td><td>Grado/Curso:</td><td>2° BACHILLERATO</td><td>Paralelo:</td><td></td></tr>
<tr><td>.º de unidad de planificación:</td><td>2</td><td>Título de unidad de planificación:</td><td>DERIVADAS E INTEGRALES</td><td colspan="2">Objetivos específicos de la unidad de planificación:</td><td colspan="2">Proponer soluciones creativas a situaciones concretas de la realidad nacional y mundial mediante la aplicación de las operaciones básicas de los diferentes conjuntos numéricos, el uso de modelos funcionales, algoritmos apropiados, estrategias y métodos formales y no formales de razonamiento matemático que lleven a juzgar con responsabilidad la validez de procedimientos y los resultados en un contexto.

Desarrollar estrategias individuales y grupales que permitan un cálculo mental, escrito, exacto o estimado y la capacidad de interpretación y solución de situaciones problémicas del medio.</td></tr>
<tr><td>PERÍODOS</td><td colspan="2">18</td><td colspan="2"></td><td>SEMANA DE INICIO:</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="8">2. PLANIFICACIÓN</td></tr>
</table>

DESTREZAS CON CRITERIOS DE DESEMPEÑO A SER DESARROLLADAS:	CRITERIOS DE EVALUACIÓN
• Conocer y aplicar el álgebra de límites de sucesiones convergentes en la resolución de aplicaciones o problemas con sucesiones reales en matemática financiera (interés compuesto) e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas. • Reconocer y graficar las funciones escalonadas para calcular el área encerrada entre la curva y el eje X. • Realizar las operaciones de suma y multiplicación de funciones escalonadas y de multiplicación de números reales por funciones escalonadas aplicando las propiedades de los números reales. • Calcular la integral definida de una función escalonada, identificar sus propiedades cuando los límites de integración son iguales y cuando se intercambian los límites de integración. • Aplicar la interpretación geométrica de la integral de una función escalonada no negativa como la superficie limitada por la curva y el eje x. • Calcular la integral definida de una función polinomial de grado =4 aproximando el cálculo como una sucesión de funciones escalonadas. • Reconocer la derivación y la integración como procesos inversos. • Aplicar el segundo teorema del cálculo diferencial e integral para el cálculo de la integral definida de una función polinomial de grado =4 (primitiva). • Resolver y plantear aplicaciones geométricas (cálculo de áreas) y físicas (velocidad media, espacio recorrido) de la integral definida e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas.	CE.M.5.5. Aplica el álgebra de límites como base para el cálculo diferencial e integral, interpreta las derivadas de forma geométrica y física, y resuelve ejercicios de áreas y problemas de optimización.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	RECURSOS	INDICADORES DE LOGRO	TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN
• Aplicar el principio de incrementos, como introducción al tema de derivada de una función. • Debatir en clase los fenómenos de velocidad y aceleración, estudiados en física, para poner en contexto el tema de derivadas de una función. Diferenciar los conceptos entre incrementos grandes e infinitecimales en una función, por medio del concepto de límite de una función. • Reflexionar acerca de la importancia de estos modelos matemáticos en ciencias como física, química, economía, etc. • Reconocer los elementos (variables) involucradas en los gráfico y sus respectivas ecuaciones.	- Texto - Calculadora - Enlaces web - Pizarra	I.M.5.5.1. Emplea el concepto de límites en sucesiones convergentes y sucesiones reales; opera con funciones escalonadas; halla de manera intuitiva derivadas de funciones polinomiales; diferencia funciones mediante las respectivas reglas para resolver problemas de optimización; concibe la integración como proceso inverso, y realiza conexiones geométricas y físicas. (I.2.)	Comprobar el desarrollo de las destrezas necesarias para la interpretación, el cálculo y la aplicación de la primera y segunda derivadas (interpretación geométrica y física). Resolver problemas de aplicación y operar con las funciones escalonadas. Calcular la integral definida de una función y aplicar la interpretación geométrica de la integral de una función, relacionando la derivación y la integración como procesos inversos.

ELEMENTOS DEL PERFIL DE SALIDA
I.2. Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos e información posibles.

ELABORADO	REVISADO	APROBADO
Docente:	Director del área :	Vicerrector:
Firma:	Firma:	Firma:
Fecha:	Fecha:	Fecha:

Objetivos generales del área que se evalúan

- Proponer soluciones creativas a situaciones concretas de la realidad nacional y mundial mediante la aplicación de las operaciones básicas de los diferentes conjuntos numéricos, el uso de modelos funcionales, algoritmos apropiados, estrategias y métodos formales y no formales de razonamiento matemático que lleven a juzgar con responsabilidad la validez de procedimientos y los resultados en un contexto.

Desarrollar estrategias individuales y grupales que permitan un cálculo mental, escrito, exacto o estimado y la capacidad de interpretación y solución de situaciones problémicas del medio.

Objetivos integradores de subnivel

- OI.5.2. Aplicar conocimientos de diferentes disciplinas para la toma de decisiones asertivas y socialmente responsables, a partir de un proceso de análisis que justifique la validez de sus hallazgos, poniendo especial cuidado en el uso técnico y ético de diversas fuentes y demostrando honestidad académica.
- OI.5.11. Reflexionar y tomar decisiones respecto a una sexualidad responsable y a su participación sistemática en prácticas corporales y estéticas, considerando su repercusión en una vida saludable y la influencia de las modas en la construcción de los hábitos y de las etiquetas sociales en la concepción de la imagen corporal.

Criterio de evaluación

- CE.M.5.5. Aplica el álgebra de límites como base para el cálculo diferencial e integral, interpreta las derivadas de forma geométrica y física, y resuelve ejercicios de áreas y problemas de optimización.

Elementos del perfil de salida a los que se contribuye

- I.2. Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos e información posibles.

Prohibida su reproducción

Objetivos del área por subnivel

- O.M.5.2. Producir, comunicar y generalizar información, de manera escrita, verbal, simbólica, gráfica y/o tecnológica, mediante la aplicación de conocimientos matemáticos y el manejo organizado, responsable y honesto de las fuentes de datos, para así comprender otras disciplinas, entender las necesidades y potencialidades de nuestro país, y tomar decisiones con responsabilidad social.

Indicadores para la evaluación del criterio

- I.M.5.5.1. Emplea el concepto de límites en sucesiones convergentes y sucesiones reales; opera con funciones escalonadas; halla de manera intuitiva derivadas de funciones polinomiales; diferencia funciones mediante las respectivas reglas para resolver problemas de optimización; concibe la integración como proceso inverso, y realiza conexiones geométricas y físicas. (I.2.)

Básicos imprescindibles | Básicos deseables

Eje temático	Destrezas con criterio de desempeño
DERIVADAS E INTEGRALES	Conocer y aplicar el álgebra de límites de sucesiones convergentes en la resolución de aplicaciones o problemas con sucesiones reales en matemática financiera (interés compuesto) e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas.
	Reconocer y graficar las funciones escalonadas para calcular el área encerrada entre la curva y el eje X.
	Realizar las operaciones de suma y multiplicación de funciones escalonadas y de multiplicación de números reales por funciones escalonadas aplicando las propiedades de los números reales.
	Calcular la integral definida de una función escalonada, identificar sus propiedades cuando los límites de integración son iguales y cuando se intercambian los límites de integración.
	Aplicar la interpretación geométrica de la integral de una función escalonada no negativa como la superficie limitada por la curva y el eje x.
	Calcular la integral definida de una función polinomial de grado =4 aproximando el cálculo como una sucesión de funciones escalonadas.
	Reconocer la derivación y la integración como procesos inversos.
	Aplicar el segundo teorema del cálculo diferencial e integral para el cálculo de la integral definida de una función polinomial de grado =4 (primitiva).
	Resolver y plantear aplicaciones geométricas (cálculo de áreas) y físicas (velocidad media, espacio recorrido) de la integral definida e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas.
	Determinar las causas de la crisis de la comunidad matriarcal y la irrupción del dominio patriarcal en el desarrollo de la humanidad (machismo). (Pág. 66-68)

Prohibida su reproducción

Nota histórica

La célebre regla de L'Hôpital, llamada así en honor del marqués Guillaume François Antoine de L'Hôpital (1661-1704), muy posiblemente fue descubierta por el que durante un tiempo fuera su maestro, el matemático suizo Jean Bernoulli (1667-1748), y a quien el marqués compró los derechos de autor sobre todos los descubrimientos que hiciera en matemáticas.

Por este motivo, en ocasiones, esta regla se suele citar como regla de Bernoulli-L'Hôpital.

Regla de L'Hôpital

La regla de L'Hôpital permite resolver mediante derivadas diferentes tipos de indeterminaciones que se presentan en el cálculo de límites.

Sean f y g dos funciones derivables en un entorno del punto a tales que $\lim\limits_{x \to a} = 0$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x)$
Entonces:

si existe $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, existirá también $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ y además:

Este resultado es conocido como regla de L'Hôpital.

Demostración

Sin recurrir a las herramientas matemáticas que nos darían una demostración rigurosa, podemos comprobar este resultado de forma aproximada.

Al ser f y g dos funciones derivables en un entorno de a, significa que serán continuas en este entorno. Supongamos que f (a) = g (a) = 0 entonces para $x \neq a$ tenemos:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

Prohibida su reproducción

Si tomamos el límite cuando , obtenemos:

$$\lim_{x \to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

El segundo miembro de la expresión coincide con el cociente de las derivadas de f y g en el punto a, es decir:

$$\lim_{x \to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Luego, en un entorno del punto a si existe $\lim\limits_{x \to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ entonces

$$\lim_{x \to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ejemplo:

Calcula $\lim\limits_{x \to 0}\frac{x}{e^x-1}$

Al calcular este límite obtenemos la indeterminación $\frac{0}{0}$

Como ambas funciones son derivables en un entorno x = 0, aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0}\frac{x}{e^x-1}=\lim\frac{(x)}{(e^x-1)}=\lim_{x \to 0}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{1}=1$$

Prohibida su reproducción

Nombre: ____________________ Fecha: ____________

1. **Calcula** la pendiente de la recta secante a la gráfica de la función f (x) = $x^2 + 4x + 4$ en los puntos de abscisa $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$.

2. **Halla** el valor de a sabiendo que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f (x) = $x^2 - ax + 2$ en x = 1 vale 2.

3. Considera la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x < 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Estudia la continuidad y la derivabilidad.

4. **Utiliza** las reglas de derivación para derivar las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 6x + 3$

b) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^4 - 7x}$

c) $f(x) = \text{In}\,(x^3 - 4x)$

d) $f(x) = \cos^2(\text{sen}\, x^2)$

5. Deriva las siguientes funciones implícitas:

a) $x^2 + y^2 = 4$

b) $x^2 - 4y^2 - 6x + 2y - 4 = 0$

c) $x^2 + 4xy - y^2 = 0$

5. Deriva las siguientes funciones implícitas:

$$f(x) = |x^3 - 1| \qquad g(x) = |x^3| - 1 \qquad h(x) = |(x-1)^3|$$

- Determina la expresión analítica de la función derivada de cada una de ellas.

Prohibida su reproducción

6. **Considera** la función definida por $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$

a) Calcula la pendiente de la recta tangente a su gráfica por el punto de abscisa x = 0.

b) Halla, si hay, otros puntos en los cuales la pendiente de la tangente sea igual a la que se ha obtenido.

7. ¿Para qué valor de x, la recta tangente a la curva

y = ln (x 2 + 1) es paralela a la recta y = x?

- Escribe la ecuación de esta tangente.

8. **Utiliza** la integración por partes para calcular las primitivas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3xe^x$

b) $f(x) = (x + 1)\cos x$

c) $f(x) = x^2 \ln x$

9. **Halla** la primitiva de la función $f(x) = 2x\sqrt{x^2 + 1}$ que se anula en x = 0.

10. **Halla** el área del recinto delimitado por las siguientes curvas:

$$y = x^2; \qquad y = \frac{x^2}{4}; \qquad y = x$$

Prohibida su reproducción

1. $$\text{TVM}\left[0,1\right] = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{9 - 4}{1} = 5$$

La pendiente de la recta secante es 5.

2. Calculamos la derivada: f' (x) = 2x – a
Calculamos f' (1) = 2 – a, y sabemos que f' (1) = 2. Igualamos y obtenemos que a = 0.

3. Los límites laterales coinciden con el valor de la función en x = 1, luego es continua en x = 1.
Las derivadas laterales no coinciden, por tanto la función no es derivable en x = 1

a) $f(x) = 3x^2 - 4x - 6$

b) $$f(x) = \frac{-3x^4 - 12x^3 + 21}{x^2(x^3 - 7)^2}$$

c) $$f(x) = \frac{3x^2 - 4}{x^3 - 4x}$$

d) $f(x) = -4x\cos x^2 \cos(\operatorname{sen} x^2)\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x^2)$

4. . a) $\dfrac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} = 0$ b) $\dfrac{3 - x}{1 - 4y} = 0$ c) $\dfrac{-4y - 3x^2}{2(2x - y)} = 0$

5. La función f(x) = x3 – 1 se puede expresar:

$$f'(x) = \begin{cases} -(x^3 - 1) & \text{si } x < 1 \\ x^3 - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

6. Las soluciones son x = -2 y x = 0

7. La ecuación de la recta tangente es y = x – 1 + In(2).

8. a) $3e^x(x - 1) + C$ b) $(x + 1)\operatorname{sen} x + \cos x + C$ c) $\frac{1}{3} X^3 \ln X - \frac{1}{3}$

9. La primitiva que buscamos es:

$$f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{X^2 + 1} - \frac{2}{3}$$

10. $$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{4} + \frac{27}{12} = \frac{30}{12} = \frac{5}{2}\,u^2$$

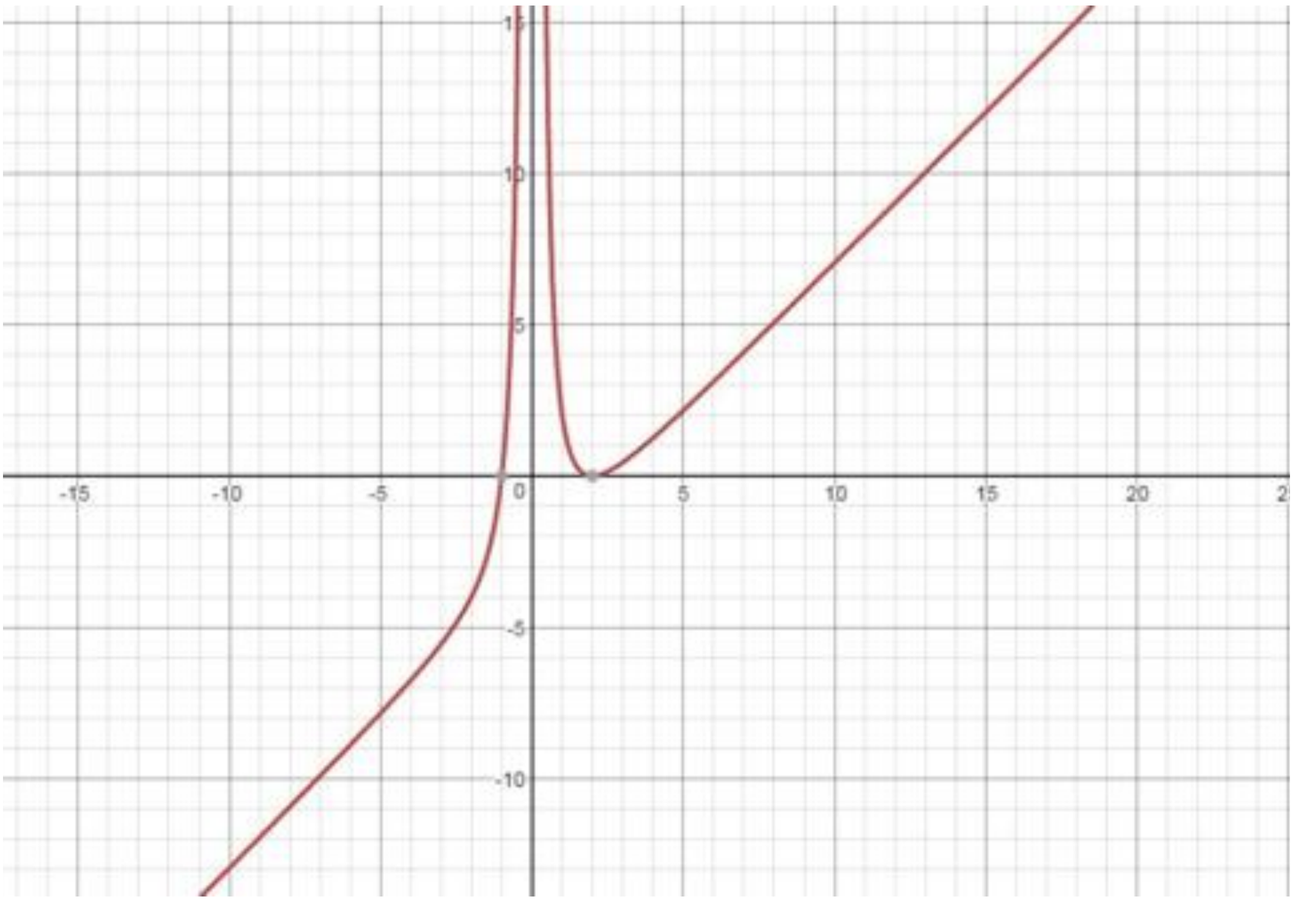
Prohibida su reproducción

Nombre: ______________________ Fecha: ______________

1. **Represente** gráficamente la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2}$$

Tabule varios puntos del dominio con el estudiante, haciendo un esquema y luego compruebe la respuesta usando el programa DESMOS como TIC.



Prohibida su reproducción

AMPLIACIÓN DE CONTENIDOS

La resolución de problemas permite poner en práctica los conocimientos adquiridos en la materia de Matemáticas. Pero también es un fin en sí misma, al permitir afrontar y resolver múltiples situaciones tanto de otras materias (Física, Economía…) como de la realidad cotidiana.

Cada problema puede considerarse un reto y un medio eficaz para aprender a pensar. Las personas, dentro y fuera del ámbito escolar, utilizamos diversos procedimientos para resolver los problemas. Existe, sin embargo, un *método general de resolución de problemas* que puede servirte de pauta para resolver otros muchos. Sus fases son:

— *Comprensión del enunciado:* nos aproximamos al problema, identificamos todos sus términos, organizamos los datos que aparecen y dibujamos los que son susceptibles de representación.

— *Planificación de la resolución:* elaboramos conjeturas y seleccionamos la estrategia de resolución, así como las técnicas matemáticas que vamos a utilizar.

— *Ejecución del plan de resolución:* realizamos lo preparado en la fase anterior.

— *Revisión del resultado y del proceso seguido:* interpretamos las posibles soluciones, contextualizamos los resultados, reflexionamos sobre el proceso, revisamos y/o modificamos el plan si es necesario, y estudiamos otras posibles soluciones y planes alternativos.

Además de la pauta general, ten en cuenta los siguientes consejos que te ayudarán a comprender el enunciado:

- Léelo con atención para evitar saltarte información y observar posibles ambigüedades.
- Repasa los conceptos matemáticos que intervienen en el enunciado.
- Apunta los datos de que dispones. Puede ser útil disponerlos en forma de tabla o elaborar un dibujo y anotarlos en él.
- Analiza si existe información superflua. En caso afirmativo, elimínala.

A continuación te presentamos algunas de las **estrategias de resolución de problemas** más comunes. En las páginas 344 a 348 de tu libro de 1.º de Bachillerato tienes un ejemplo resuelto de cada una de ellas.

1 RESOLUCIÓN GRÁFICA

Muchas veces, la construcción de un gráfico que refleje las condiciones y los datos del enunciado conduce directamente a la solución del problema.

2 ENSAYO-ERROR

Esta estrategia consiste en experimentar con posibles soluciones hasta dar con la correcta. Para ello seguimos estos pasos:

— Escogemos una posible solución.

— Probamos si esta solución satisface las condiciones del problema.

— Modificamos la solución escogida en función del resultado obtenido y repetimos el proceso hasta obtener la solución correcta.

3 RAZONAMIENTO INVERSO

Esta estrategia se aplica en la resolución de problemas en los que conocemos el resultado final y queremos determinar un valor inicial o una serie de operaciones que nos conduzcan hasta él.

El método consiste en tomar el resultado como punto de partida e ir retrocediendo hasta llegar a la situación inicial.

4 ORGANIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN

En muchos problemas, la confección de un esquema o tabla sobre los que disponer las condiciones y los datos del enunciado puede abrirte el camino para abordar su resolución.

Prohibida su reproducción

5 DESCOMPOSICIÓN DEL PROBLEMA

En ocasiones, es difícil ver la relación existente entre los datos y las incógnitas del problema. En estos casos, una de las estrategias que ofrece más posibilidades de éxito es la descomposición del problema en problemas más sencillos. Para aplicarla, debes seguir estos pasos:

— Descomponer el problema inicial en subproblemas, sin perder de vista las relaciones existentes entre ellos.

— Resolver cada uno de los subproblemas.

— Resolver el problema inicial.

A veces, la solución del problema global coincidirá con la del último subproblema. Otras veces, será necesario combinar los resultados de los diferentes subproblemas para hallarla.

6 SIMPLIFICACIÓN Y BÚSQUEDA DE REGULARIDADES

En ocasiones, la simplificación de los datos o de las condiciones del problema proporciona un nuevo punto de vista para su resolución. Muchas veces, ese nuevo punto de vista surge de la existencia de regularidades que permanecían ocultas antes de proceder a la simplificación.

7 PARTICULARIZACIÓN DEL PROBLEMA

En casos complejos puede resultar de gran utilidad resolver primero el problema para situaciones particulares más sencillas.

8 EXPERIMENTACIÓN CON LA POSIBLE SOLUCIÓN

Este método, muy útil en geometría, consiste en suponer una posible solución del problema que se nos plantea y verificar que ésta satisface las condiciones del enunciado.

Si es así, ya hemos resuelto el problema. Si no es así, es posible que hayamos encontrado una pista que nos conduzca a la solución correcta.

9 BÚSQUEDA DE UN PROBLEMA SIMILAR RESUELTO

Esta estrategia consiste en la búsqueda de semejanzas entre el problema que se pretende resolver, o una parte de él, y otro resuelto con anterioridad.

Lógicamente, cuantos más problemas hayas resuelto anteriormente, más útil te será esta estrategia, puesto que aumenta la probabilidad de encontrar un problema similar.

10 MODIFICACIÓN DEL ENUNCIADO

A veces puede modificarse el enunciado de un problema de manera que obtengamos otro equivalente cuya resolución resulte más fácil.

11 BÚSQUEDA DE UN CONTRAEJEMPLO

Esta estrategia se utiliza para demostrar la falsedad de un enunciado matemático. Puesto que un enunciado expresado de manera general ha de cumplirse siempre, si en un caso particular *(contraejemplo)* no se cumple, el enunciado ya no es válido.

12 REDUCCIÓN AL ABSURDO

Esta estrategia se utiliza para demostrar afirmaciones. Consiste en suponer la falsedad de lo que se quiere demostrar y llegar así a una contradicción.

La resolución de cualquier problema conlleva un proceso de razonamiento más o menos consciente. Además, para comprender y utilizar los desarrollos teóricos, participar en su construcción, obtener conclusiones, justificarlas y, si es preciso, demostrarlas, se utiliza el **razonamiento lógico.** Este tipo de razonamiento, dentro del cual se engloban algunas de las estrategias vistas, forma parte de la *lógica* y facilita, además, las deducciones y el descubrimiento de falacias.

Prohibida su reproducción

AMPLIACIÓN DE CONTENIDOS

Resumenes que te serán de utilidad

Derivadas

La **derivada, $f'(a)$,** de la función f en $x = a$ es el límite, si existe:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ecuación de la **recta tangente** a la gráfica de f en $(a, f(a))$:

$$y - f(a) = f'(a)\,(x - a)$$

Función derivada y operaciones

- $(f + g)' = f' + g'$
- $(k \cdot f)' = k \cdot f'$
- $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g}{g^2}$
- $(g \circ f)' = g'(f) \cdot f'$ (regla de la cadena)

Regla de L'Hôpital

Sean f y g dos funciones con $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ *y* $\lim_{x \to a} g(x) = 0$

si $\exists \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, $\exists \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ y además: $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Esta regla también se aplica a indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Integración

- Una función F es una primitiva de $f \Leftrightarrow F' = f$.
- Si F es una primitiva de f, también son primitivas de f todas las funciones de la forma $F + C$, $\forall\, C \in \mathbb{R}$.

  Si F es una primitiva de f, todas las primitivas de f son de la forma $F + C$, $\forall\, C \in \mathbb{R}$.

Propiedades

$\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$; $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

Métodos básicos de integración

Integración por descomposición: se aplican las propiedades de la integración.

Integración por cambio de variable: se identifica una parte del integrando con una nueva variable para obtener una integral más sencilla.

Integración por partes: $\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$

Integración de funciones racionales: se descompone el integrando en sumas de fracciones simples, que se integran.

Integral definida:

Integral definida de f entre a y b: $\int_a^b f(x)\,dx$

Si $f(x) \geq 0\ \forall\ x \in [a,b]$ y $\int_a^b f(x)\,dx = A$, A es el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje OX, y las rectas $x = a$ y $x = b$.

Regla de Barrow

$\int_a^b f(x)\,dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a)$, donde G es cualquier primitiva de f.

Prohibida su reproducción

FÍJATE

Todo razonamiento o inferencia consta de:

— **Premisas:** conjunto de enunciados que expresan los datos de partida.

— **Conclusión:** enunciado final que expresa la nueva información obtenida a partir de las premisas.

Inducción completa

Si deseamos demostrar que la suma de los n primeros números naturales es:

$$1 + 2 + 3... + n = n \cdot \frac{n+1}{2}$$

utilizaremos un método de razonamiento inductivo, el *principio de inducción completa,* enunciado por el matemático italiano G. Peano en 1900. El mencionado principio dice:

«Para toda propiedad $P(n)$ de los números naturales que dependa de n y que verifique los requisitos siguientes:

- $P(n)$ se cumple para $n = 1$, es decir, se cumple $P(1)$.
- Si suponemos que se cumple $P(n-1)$, se cumple $P(n)$.

podemos asegurar que $P(n)$ se cumple para todos los números naturales.»

Así, la igualdad se cumple para $n = 1$:

$$P(1) = 1 \cdot \frac{1+1}{2} = 1$$

Y si suponemos que se cumple $P(n-1)$, veamos qué sucede para $P(n)$. Tendremos:

$$1 + ... + n - 1 + n = P(n-1) + n =$$
$$= \frac{(n-1) \cdot n}{2} + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Así pues, podemos garantizar que la expresión es correcta.

Si bien es cierto que para solucionar los problemas matemáticos hemos de razonar, ¿es tan importante el razonamiento en las matemáticas en general? Para responder a esta cuestión podemos partir de la definición de matemática que hallamos en el diccionario:

> *La* ***matemática*** *es la parte de la ciencia que, a partir de determinadas nociones básicas, desarrolla sus teorías sin más apoyo que el* ***razonamiento lógico.***

Así pues, el razonamiento es básico en la matemática. La disciplina que estudia su validez en general recibe el nombre de **lógica.** Para empezar el análisis de los razonamientos hemos de diferenciar los dos tipos que existen: *deductivos* e *inductivos*.

— La **deducción** consiste en pasar de premisas generales a una conclusión menos general. Cuando este tipo de inferencia es correcta, la conclusión se sigue necesariamente de las premisas: es imposible que siendo éstas verdaderas, la conclusión sea falsa.

Observa, por ejemplo, el siguiente razonamiento deductivo:

Todos los números naturales son enteros. El 2,5 no es un número entero. Por tanto, el 2,5 no es un número natural.

— La **inducción** consiste en llegar a una conclusión general a partir de informaciones menos generales que vienen dadas en las premisas.

Excepto en el caso de la inducción completa descrito en el margen, sólo puede hablarse de cierta *probabilidad,* pues, aunque las premisas sean verdaderas, esto no asegura que la conclusión también lo sea.

Por ejemplo, si tenemos las siguientes premisas:

- El número 121 es divisible entre 11.
- El número 363 es divisible entre 11.
- El número 1 331 es divisible entre 11.

Podemos llegar a la conclusión de que:

Los números capicúas son divisibles entre 11.

Sin embargo, hemos de estar dispuestos a revisar la veracidad de esta conclusión.

Las premisas y la conclusión son enunciados que afirman algo o lo niegan y por tanto pueden ser verdaderas o falsas. En cambio, los razonamientos no pueden ser verdaderos ni falsos, pues no afirman ni niegan nada. Así, no hablaremos de razonamientos verdaderos, sino de **razonamientos correctos** o válidos.

La parte de la lógica que se ocupa únicamente de la validez de los razonamientos sin tener en cuenta el contenido de los enunciados es la *lógica formal.* Dentro de ésta, la *lógica proposicional* o *de enunciados* toma los enunciados en bloque, sin analizarlos.

Prohibida su reproducción

CICLO DEL APRENDIZAJE

¿Cómo dinamizo el aula?

Experiencia

- Aplicar el principio de incrementos, como introducción al tema de derivada de una función.
- Debatir en clase los fenómenos de velocidad y aceleración, estudiados en física, para poner en contexto el tema de derivadas de una función.

Analizar una imagen de la noción geométrica de secante y tangente a una curva, evidenciando las características principales de estos conceptos.

Conceptualización

- Diferenciar los conceptos entre incrementos grandes e infinitecimales en una función, por medio del concepto de límite de una función.
- Comparar las relaciones entre derivada de una función y la integral indefinida.

Reflexión

- Reflexionar acerca de la importancia de estos modelos matemáticos en ciencias como física, química, economía, etc.
- Identificar los métodos básicos de derivación e integración de funciones elementales.

Aplicación

- Atravez de un gráfico evidenciar con un ejemplos la utilidad de los temas tratados en esta unidad, en problemas físicos, químicos, etc.
- Reconocer los elementos (variables) involucradas en los gráfico y sus respectivas ecuaciones.
- Producir predicciones usando los modelos matemáticos estudiados.

Prohibida su reproducción

BANCO DE PREGUNTAS

1. 1. ¿Cuálesladerivadadelafunciónseno?

   Es la función coseno.

2. 2. ¿Qué son las derivadas de orden superior?

   Son las derivadas de otras funciones que ya han sido derivadas.

3. ¿Cómo sabemos si en cierto intervalo de una función existen máximos o mínimos?

   Cuando en los puntos críticos analizados, la derivada es cero.

4. 4. ¿Cuándo en un cierto intervalo la función es convexa?

   Cuando su segunda derivada en un punto perteneciente a dicho intervalo es mayor que cero.

5. 5. ¿Qué es un punto de inflexión para una función, en un cierto intervalo?

   Es el punto perteneciente al dominio de una función, en ese intervalo, en dónde existe un cambio de convadidad.

6. 6. Escriba una aplicación geométrica de la integral definida

   Hallar el área bajo la curva de una función, en un cierto intervalo..

7. ¿Con qué otro nombre se le conoce al Teorema Fundamental del Cálculo?

   Se le conoce también con el nombre de Regla de Barrow.

8. ¿Cómo se puede comprobar que una integral indefinida está bien calculada?

   Se deriva la función resultante y vemos si coincide con el término del integrando.

9. 9. ¿Cuáles son los métodos básicos para la integración indefinida?

   Integración por descomposición

   Integración por cambio de variable

   Integración por partes

10. 10. Escriba tres aplicaciones del Cálculo Integral en Física

    Variación del espacio recorrido

    Variación de la velocidad

    Trabajo realizado por una fuerza

Prohibida su reproducción

RECURSOS PROPIOS DEL ÁREA

Un recurso moderno para graficar, es el uso de algunas páginas en internet como DESMOS, esta TIC es de uso intuitivo y no requiere de códigos de programación. Con esta herramienta informática podrás comparar las características de varias funciones en un solo gráfico, así como obtener directamente las derivadas de funciones elementales.

Nos apoyamos también en tablas de derivadas e integrales inmediatas, ya demostradas, para facilitar al estudiante en adquirir las destrezas necesarias para complementar sus estudios en el campo del cálculo diferencial e integral.

Exponemos varios enlaces web en el apartado TICS, para que el docente pueda visualizar de manera interactiva los diferentes procedimientos en los temas presentados. Como por ejemplo:

Podemos usar el programa geogebra, cuyo enlace se encuentra descrito en la página 50 del libro del estudiante, allí puedes encontrar una plataforma interactiva que le será de mucha utilidad al desarrollo de los temas tratados y exponerlos en el aula de una manera diferente, con el uso de un proyector y una Laptop.

El docente puede apoyarse en videos explicativos, sobre las aplicaciones en el campo de la Física, la química, la economía y la Biología.

Es recomendado ampliamente, en este nivel el uso de calculadoras científicas

Prohibida su reproducción

Orientación didáctica

- Para anticipar posibles dificultades en los contenidos de la unidad, el profesor o profesora puede utilizar las siguientes propuestas: repasar los conceptos y las y propiedades de la teoría de límites de funciones.

Se recomienda que el profesor o profesora resuelva varios ejemplos en la pizarra y solucione todas las dudas de los estudiantes.

Es importante repasar los conceptos geométricos de rectas secantes y tangentes, así como también las funciones trigonométricas básicas, en especial la función tangente.

Propuestas:

- Dedicar el tiempo suficiente a explicar adecuadamente el concepto de derivada como incrementos infinitesimales.

Preguntar a menudo a los estudiantes si tienen dudas en el momento de explicar las diferentes variaciones en los gráficos de las funciones presentadas. Es conveniente tabular algunos valores, para adquirir las destrezas deseadas

Prohibida su reproducción

UNIDAD 2

Página 50

Orientación didáctica

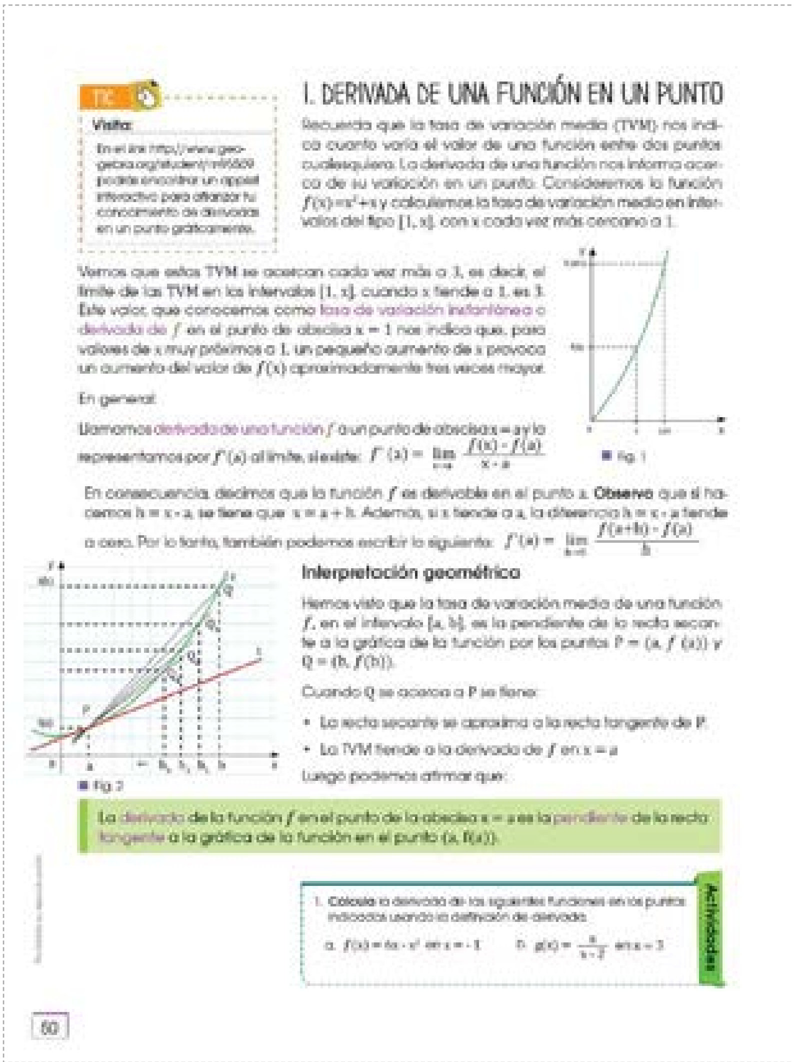
- Antes de presentar este tema el profesor debe repasar los conceptos de la función trigonométrica tangente, asi los estudiantes comprenderán mejor el cociente de los límites planteados.

Solucionario

1.

a) 8

b) - 2



TIC

Visita:

En el link http://www.geogebra.org/student/m95609 podrás encontrar un applet interactivo para afianzar tu conocimiento de derivadas en un punto gráficamente.

1. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Recuerda que la tasa de variación media (TVM) nos indica cuanto varía el valor de una función entre dos puntos cualesquiera. La derivada de una función nos informa acerca de su variación en un punto. Consideremos la función $f(x)=x^2+x$ y calculemos la tasa de variación media en intervalos del tipo $[1, x]$, con x cada vez más cercano a 1.

Vemos que estas TVM se acercan cada vez más a 3, es decir, el límite de las TVM en los intervalos $[1, x]$, cuando x tiende a 1, es 3. Este valor, que conocemos como tasa de variación instantánea o derivada de f en el punto de abscisa $x = 1$ nos indica que, para valores de x muy próximos a 1, un pequeño aumento de x provoca un aumento del valor de $f(x)$ aproximadamente tres veces mayor.

Fig. 1

En general:

Llamamos derivada de una función f a un punto de abscisas $x = a$ y lo representamos por $f'(a)$ al límite, si existe: $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

En consecuencia, decimos que la función f es derivable en el punto a. **Observa** que si hacemos $h = x - a$, se tiene que $x = a + h$. Además, si x tiende a a, la diferencia $h = x - a$ tiende a cero. Por lo tanto, también podemos escribir lo siguiente: $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Interpretación geométrica

Hemos visto que la tasa de variación media de una función f, en el intervalo $[a, b]$, es la pendiente de la recta secante a la gráfica de la función por los puntos $P = (a, f(a))$ y $Q = (b, f(b))$.

Cuando Q se acerca a P se tiene:

- La recta secante se aproxima a la recta tangente de P.
- La TVM tiende a la derivada de f en $x = a$

Luego podemos afirmar que:

Fig. 2

La derivada de la función f en el punto de la abscisa $x = a$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $(a, f(a))$.

Actividades

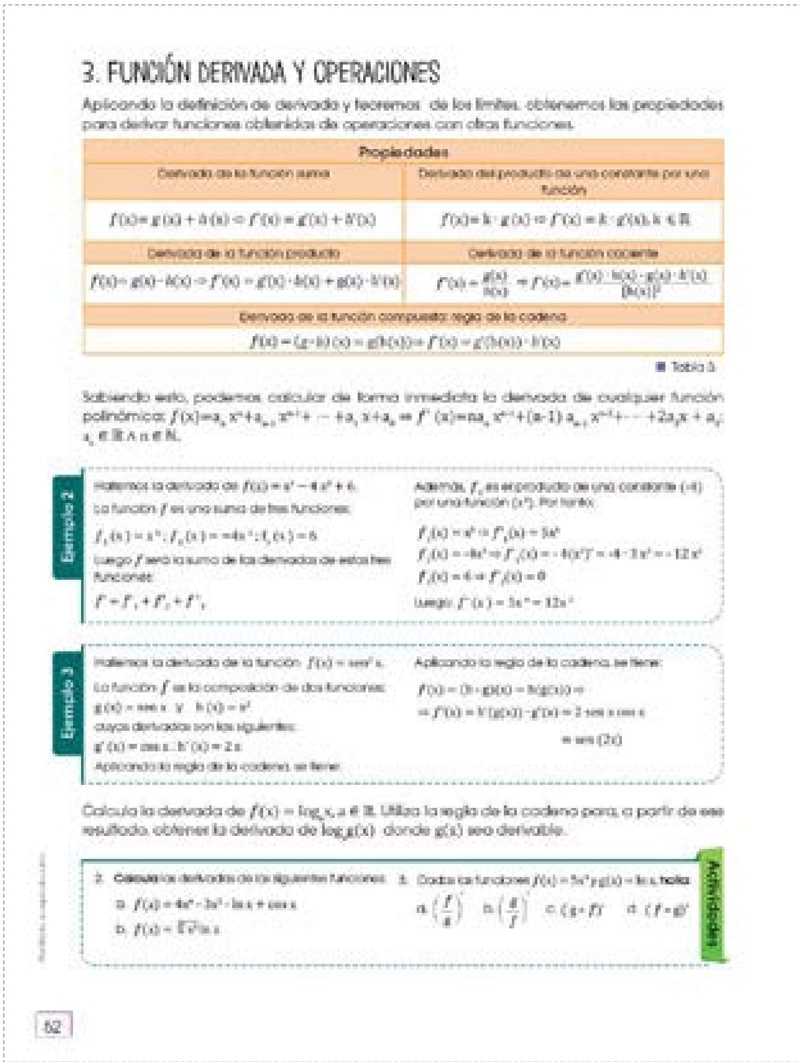
1. **Calcula** la derivada de las siguientes funciones en los puntos indicados usando la definición de derivada.

a. $f(x) = 6x - x^2$ en $x = -1$ b. $g(x) = \frac{x}{x-2}$ en $x = 3$

50

Prohibida su reproducción

Página 52


3. FUNCIÓN DERIVADA Y OPERACIONES

Aplicando la definición de derivada y teoremas de los límites, obtenemos las propiedades para derivar funciones obtenidas de operaciones con otras funciones.

Tabla 3

Solucionario

2.

a)

b)

3.

a)

b)

c)

Actividades complementarias

1. Sabiendo que

$$\int e^x dx = e^x + C \text{ y } \int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C,$$

aplica las propiedades de las integrales indefinidas para encontrar las integrales de las funciones siguientes:

a) $f(x) = e^x - \cos x$ b) $f(x) = 3 \cos x + e^x$ c) $f(x) = 5e^x + \cos x$ d) $f(x) = \dfrac{e^x}{12} - \cos x$

Soluciones:

2. *a)* $\int f(x)\,dx = \int (e^x - \cos x)\,dx =$

$= \int e^x dx - \int \cos x\,dx = e^x + C_1 - (\operatorname{sen} x + C_2) =$

$= e^x - \operatorname{sen} x + C$

b) $\int f(x)\,dx = \int (3\cos x + e^x)\,dx =$

$= \int 3\cos x\,dx + \int e^x dx =$

$= 3\int \cos x\,dx + \int e^x dx =$

$= 3 \cdot (\operatorname{sen} x + C_1) + e^x + C_2 = 3 \operatorname{sen} x + e^x + C$

c) $\int f(x)\,dx = \int (5e^x + \cos x)\,dx =$

$= \int 5e^x dx + \int \cos x\,dx =$

$= 5\int e^x dx + \int \cos x\,dx =$

$= 5(e^x + C_1) + \operatorname{sen} x + C_2 = 5e^x + \operatorname{sen} x + C$

d) $\int f(x)\,dx = \int \left(\dfrac{e^x}{12} - \cos x\right) dx =$

$= \int \dfrac{e^x}{12} dx - \int \cos x\,dx = \dfrac{1}{12}\int e^x dx - \int \cos x\,dx =$

$= \dfrac{1}{12}(e^x + C_1) - (\operatorname{sen} x + C_2) = \dfrac{e^x}{12} - \operatorname{sen} x + C$

Prohibida su reproducción

Orientación didáctica

- El profesor debe dedicar el tiempo suficiente en clase, para explicar a los estudiantes los procesos y métodos para encontrar la función a la cual se va a derivar, en los ejercicios de aplicación de este tema.

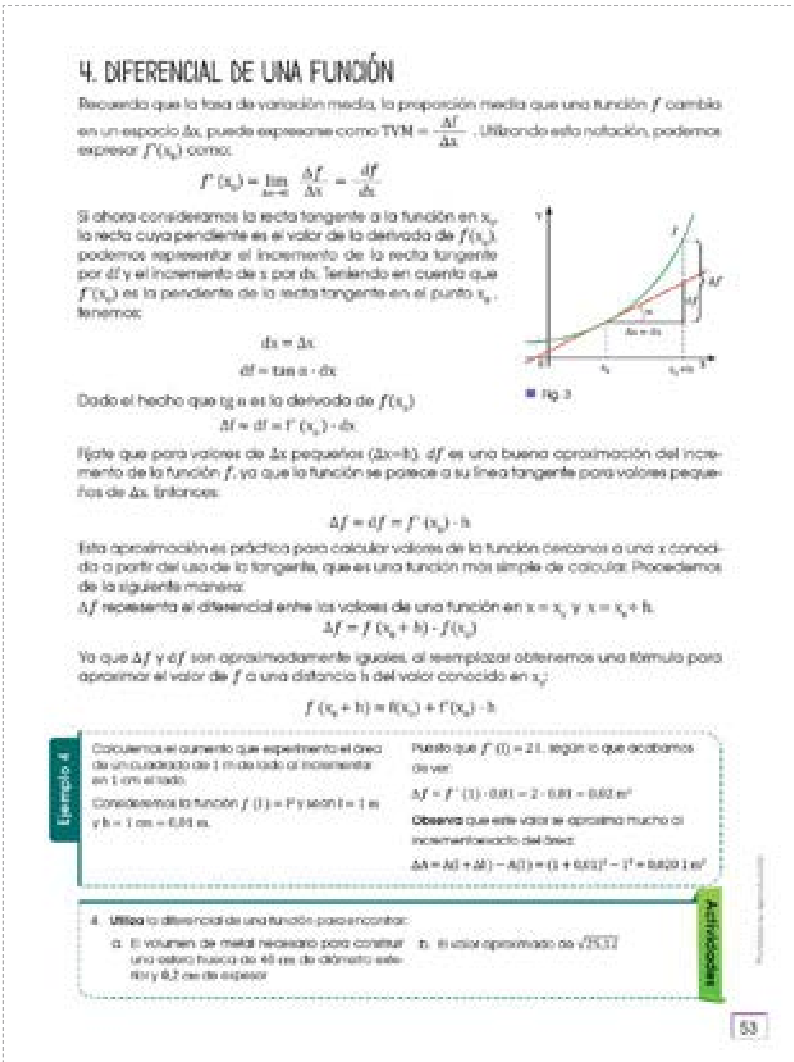
Solucionario

4.

a) 1 005, 3 cm^2

b) 5,012

Página 53



4. DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN

Recuerda que la tasa de variación media, la proporción media que una función f cambia en un espacio Δx, puede expresarse como $TVM = \frac{\Delta f}{\Delta x}$. Utilizando esta notación, podemos expresar $f'(x_0)$ como:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx}$$

Si ahora consideramos la recta tangente a la función en x_0, la recta cuya pendiente es el valor de la derivada de $f(x_0)$, podemos representar el incremento de la recta tangente por df y el incremento de x por dx. Teniendo en cuenta que $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente en el punto x_0, tenemos:

$$dx = \Delta x$$

$$df = \tan \alpha \cdot dx$$

Fig. 3

Dado el hecho que $\operatorname{tg} \alpha$ es la derivada de $f(x_0)$

$$\Delta f \approx df = f'(x_0) \cdot dx$$

Fíjate que para valores de Δx pequeños ($\Delta x = h$), df es una buena aproximación del incremento de la función f, ya que la función se parece a su línea tangente para valores pequeños de Δx. Entonces:

$$\Delta f \approx df = f'(x_0) \cdot h$$

Esta aproximación es práctica para calcular valores de la función cercanos a una x conocida a partir del uso de la tangente, que es una función más simple de calcular. Procedemos de la siguiente manera:

Δf representa el diferencial entre los valores de una función en $x = x_0$ y $x = x_0 + h$.

$$\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

Ya que Δf y df son aproximadamente iguales, al reemplazar obtenemos una fórmula para aproximar el valor de f a una distancia h del valor conocido en x_0:

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$$

Ejemplo 4

Calculemos el aumento que experimenta el área de un cuadrado de 1 m de lado al incrementar en 1 cm el lado.

Consideremos la función $f(l) = l^2$ y sean $l = 1$ m y $h = 1$ cm $= 0{,}01$ m.

Puesto que $f'(l) = 2l$, según lo que acabamos de ver:

$\Delta f = f'(1) \cdot 0{,}01 = 2 \cdot 0{,}01 = 0{,}02$ m^2

Observa que este valor se aproxima mucho al incremento exacto del área:

$\Delta A = A(1 + \Delta l) - A(1) = (1 + 0{,}01)^2 - 1^2 = 0{,}0201$ m^2

Actividades

4. **Utiliza** la diferencial de una función para encontrar:

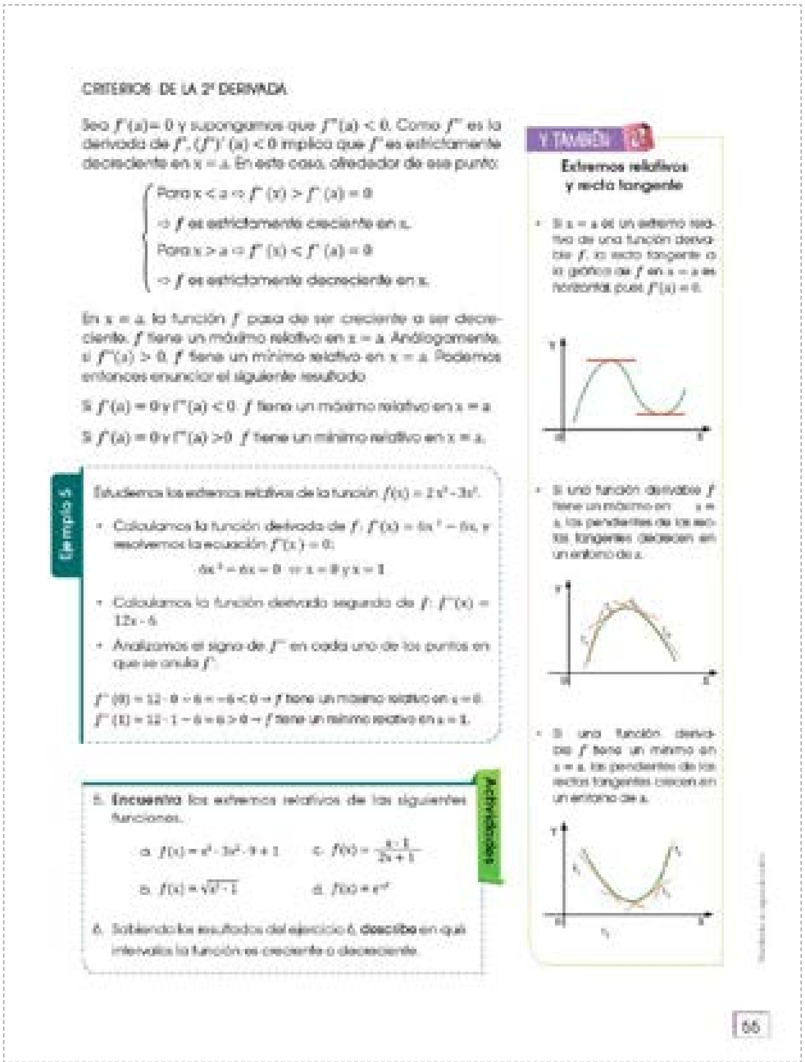
a. El volumen de metal necesario para construir una esfera hueca de 40 cm de diámetro exterior y 0,2 cm de espesor.

b. El valor aproximado de $\sqrt{25{,}12}$

53

Prohibida su reproducción

Página 55



CRITERIOS DE LA 2ª DERIVADA

Sea $f'(a)=0$ y supongamos que $f''(a)<0$. Como f'' es la derivada de f', $(f')'(a)<0$ implica que f' es estrictamente decreciente en $x=a$. En este caso, alrededor de ese punto:

Para $x<a \Rightarrow f'(x)>f'(a)=0$
$\Rightarrow f$ es estrictamente creciente en x.
Para $x>a \Rightarrow f'(x)<f'(a)=0$
$\Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en x.

En $x=a$, la función f pasa de ser creciente a ser decreciente. f tiene un máximo relativo en $x=a$. Análogamente, si $f''(a)>0$, f tiene un mínimo relativo en $x=a$. Podemos entonces enunciar el siguiente resultado:

Si $f'(a)=0$ y $f''(a)<0$, f tiene un máximo relativo en $x=a$.

Si $f'(a)=0$ y $f''(a)>0$, f tiene un mínimo relativo en $x=a$.

Ejemplo 5

Estudiemos los extremos relativos de la función $f(x)=2x^3-3x^2$.

- Calculamos la función derivada de f: $f'(x)=6x^2-6x$, y resolvemos la ecuación $f'(x)=0$:

$$6x^2-6x=0 \Rightarrow x=0 \text{ y } x=1$$

- Calculamos la función derivada segunda de f: $f''(x)=12x-6$.
- Analizamos el signo de f'' en cada uno de los puntos en que se anula f':

$f''(0)=12\cdot 0-6=-6<0 \rightarrow f$ tiene un máximo relativo en $x=0$.
$f''(1)=12\cdot 1-6=6>0 \rightarrow f$ tiene un mínimo relativo en $x=1$.

Actividades

5. **Encuentra** los extremos relativos de las siguientes funciones.

a. $f(x)=x^3-3x^2-9x+1$
b. $f(x)=\sqrt{x^2-1}$
c. $f(x)=\frac{x-1}{2x+1}$
d. $f(x)=e^{-x^2}$

6. Sabiendo los resultados del ejercicio 6, **describe** en qué intervalos la función es creciente o decreciente.

Y TAMBIÉN

Extremos relativos y recta tangente

- Si $x=a$ es un extremo relativo de una función derivable f, la recta tangente a la gráfica de f en $x=a$ es horizontal, pues $f'(a)=0$.
- Si una función derivable f tiene un máximo en $x=a$, las pendientes de las rectas tangentes decrecen en un entorno de a.
- Si una función derivable f tiene un mínimo en $x=a$, las pendientes de las rectas tangentes crecen en un entorno de a.

55

Solucionario

5.

a) x=-1,x=3

b) No existen

c) No existen

d) x=0

6.

a) creciente: (-∞,-1),(3,∞), decreciente: (-1,3) b) creciente: (-∞,-0,5), decreciente: (-0,5,∞)

c) creciente (1,∞), decreciente: (-∞,-1)

d) creciente: (-∞,0), decreciente: (0,∞)

Prohibida su reproducción

Solucionario

7.

a) Cóncava: $(-\infty, \frac{1}{3})$,

convexa: $(\frac{1}{3}, \infty)$

b) Cóncava: $(-\infty, \frac{1}{2})$,

convexa: $(\frac{1}{2}, \infty)$

c) Cóncava: $(-\infty, 1)$,

convexa: $(1, \infty)$

d) Cóncava: $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$

e) Cóncava: $(-\infty, 0)$,

convexa: $(0, \infty)$

f) Cóncava: $(-\infty, 0)$,

convexa: $(0, \infty)$

Página 56

5.3 Curvatura y punto de inflexión

Observa la figura. Vemos que alrededor de $x = 1$ la función es mayor que su tangente en el mismo punto. En este caso, decimos que f es convexa en $x = 1$. Además vemos que alrededor de $x = 4$ la ordenada de la función es menor que la de la recta tangente. Entonces diremos que f es cóncava en $x = 4$.

Si f es dos veces derivable en un punto $x = a$, podemos determinar su curvatura en ese punto de esta forma:

Si $f''(a) > 0 \rightarrow f$ es convexa en $x = a$.

Si $f''(a) < 0 \rightarrow f$ es cóncava en $x = a$.

En la figura también vemos que en $x = 3$ la recta tangente atraviesa la gráfica. Decimos entonces que $x = 3$ es un punto de inflexión de la función. Observa que es en el punto de inflexión donde la función pasa de ser convexa a ser cóncava: por lo tanto, en este punto, la segunda derivada no puede ser ni positiva ni negativa, consecuentemente debe ser cero. Se puede afirmar que:

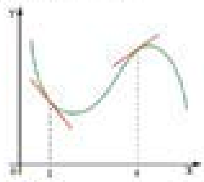


Fig. 6

Si una función f dos veces derivable tiene un punto de inflexión en $x = a$, entonces $f''(a) = 0$.

Ten en cuenta que el recíproco no es cierto. Por ejemplo si $f(x) = x^4$, a pesar de que verificamos que $f''(0) = 0$, $x = 0$ no es un punto de inflexión.

Si existe $f'''(a)$ podemos demostrar el siguiente resultado:

Si $f''(a) = 0$ y $f'''(a) \neq 0 \rightarrow f$ tiene un punto de inflexión en $x = a$.

En ocasiones, puede suceder que en un punto $x = a$ se anulen las derivadas segunda, tercera y, así sucesivamente. Entonces, debemos seguir derivando la función hasta hallar una derivada que no se anule en ese punto. Si el orden de esta derivada es par y además $f'(a) = 0$, f tiene un extremo en $x = a$; si es impar, f tiene un punto de inflexión en $x = a$.

Actividades

7. **Determino** los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad o convexidad de las siguientes funciones y grafique.

a. $f(x) = x^3 - x^2$

b. $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

c. $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$

d. $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

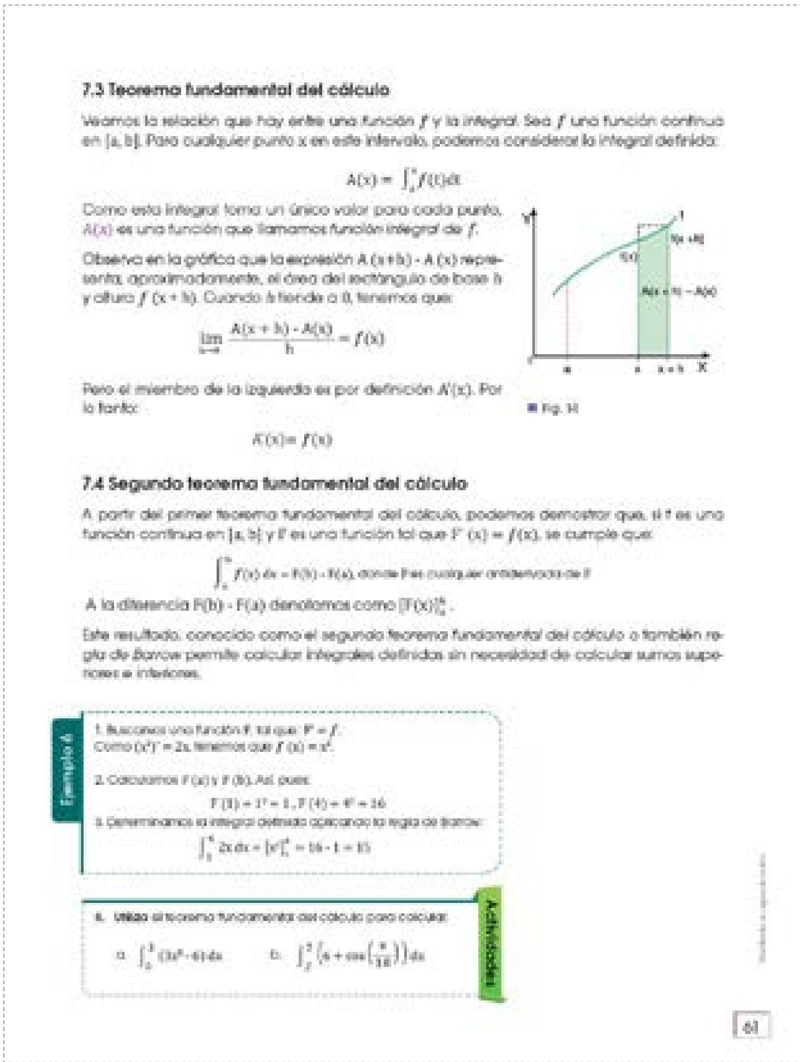
e. $f(x) = \sqrt{(2-x^2)}$

f. $f(x) = \tan x$ entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$

56

Prohibida su reproducción

Página 61



7.3 Teorema fundamental del cálculo

Veamos la relación que hay entre una función f y la integral. Sea f una función continua en $[a, b]$. Para cualquier punto x en este intervalo, podemos considerar la integral definida:

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Como esta integral toma un único valor para cada punto, $A(x)$ es una función que llamamos función integral de f.

Observa en la gráfica que la expresión $A(x+h) - A(x)$ representa, aproximadamente, el área del rectángulo de base h y altura $f(x+h)$. Cuando h tiende a 0, tenemos que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{A(x+h)-A(x)}{h} = f(x)$$

Pero el miembro de la izquierda es por definición $A'(x)$. Por lo tanto:

$$A'(x) = f(x)$$

Fig. 14

7.4 Segundo teorema fundamental del cálculo

A partir del primer teorema fundamental del cálculo, podemos demostrar que, si f es una función continua en $[a, b]$ y F es una función tal que $F'(x) = f(x)$, se cumple que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$, donde F es cualquier antiderivada de f

A la diferencia $F(b) - F(a)$ denotamos como $[F(x)]_a^b$.

Este resultado, conocido como el segundo teorema fundamental del cálculo o también regla de Barrow permite calcular integrales definidas sin necesidad de calcular sumas superiores e inferiores.

Ejemplo 6

1. Buscamos una función F, tal que: $F' = f$.
Como $(x^2)' = 2x$, tenemos que $f(x) = x^2$.

2. Calculamos $F(a)$ y $F(b)$. Así pues:

$$F(1) = 1^2 = 1, F(4) = 4^2 = 16$$

3. Determinamos la integral definida aplicando la regla de Barrow:

$$\int_1^4 2x\,dx = [x^2]_1^4 = 16 - 1 = 15$$

Actividades

6. **Utiliza** el teorema fundamental del cálculo para calcular:

a. $\int_0^3 (3x^2-6)\,dx$ b. $\int \left(6+\cos\left(\frac{x}{18}\right)\right)dx$

61

Orientación didáctica

- En los ejercicios propuestos del segundo teorema fundamental del cálculo, se debe tener extremo cuidado en el uso de signos de agrupación, para evitar errores en los signos, que se presentan comúnmente con los estudiantes.

Los alumnos deben tener muy claro la diferencia entre una integral definida y una integral indefinida. El docente puede usar cuadros comparativos para la aclaración respectiva.

Solucionario

1.

a) 9

b) 20 808

Prohibida su reproducción

Orientación didáctica

- Para el tema de métodos numéricos de integración, para una integral definida, el docente puede apoyarse a manera introductoria del concepto de sumas de Riemann. A continuación encontrará un enlace para la ampliación de sus conocimientos.

https://goo.gl/M7PvKL

Suma de Riemann

En matemáticas, la suma de Riemann sirve para calcular el valor de una integral definida, es decir, el área bajo una curva.

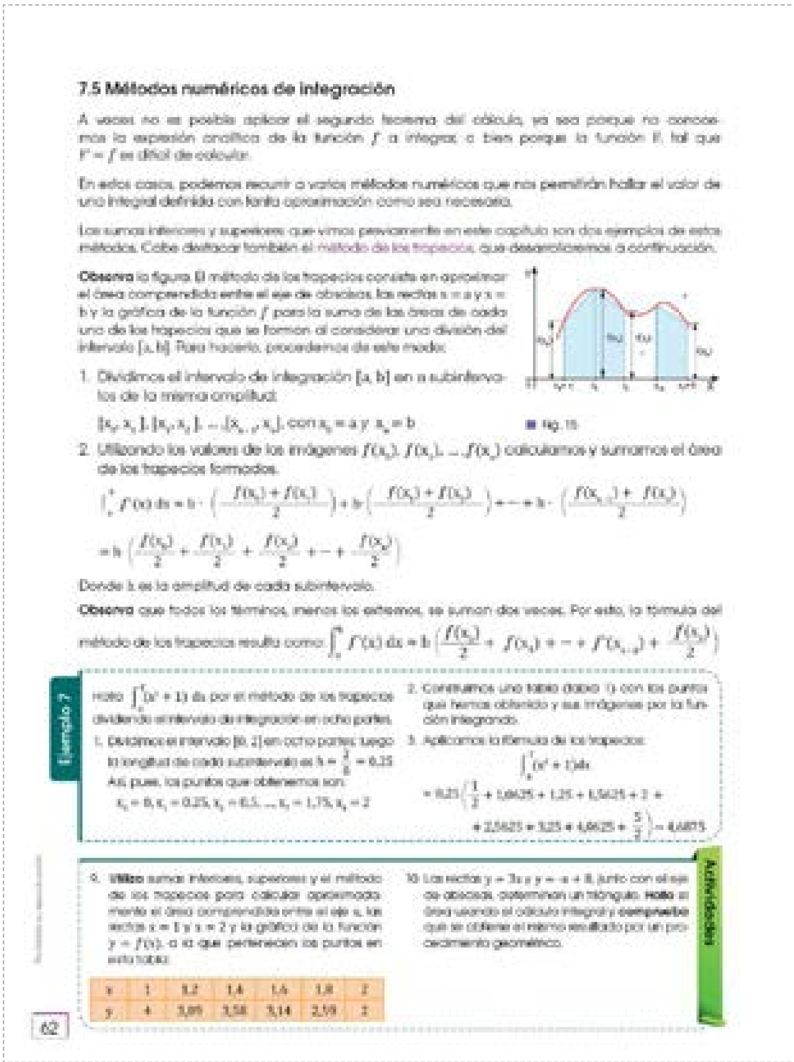
Este método es muy útil cuando no es posible utilizar el Teorema fundamental del cálculo. Estas sumas toman su nombre del matemático alemán Bernhard Riemann.

Solucionario

9. 3,24

10. 24

Página 62



7.5 Métodos numéricos de integración

A veces no es posible aplicar el segundo teorema del cálculo, ya sea porque no conocemos la expresión analítica de la función f a integrar, o bien porque la función F, tal que $F' = f$ es difícil de calcular.

En estos casos, podemos recurrir a varios métodos numéricos que nos permitirán hallar el valor de una integral definida con tanta aproximación como sea necesaria.

Las sumas inferiores y superiores que vimos previamente en este capítulo son dos ejemplos de estos métodos. Cabe destacar también el método de los trapecios, que desarrollaremos a continuación.

Observa la figura. El método de los trapecios consiste en aproximar el área comprendida entre el eje de abscisas, las rectas $x = a$ y $x = b$ y la gráfica de la función f por la suma de las áreas de cada uno de los trapecios que se forman al considerar una división del intervalo $[a, b]$. Para hacerlo, procedemos de este modo:

1. Dividimos el intervalo de integración $[a, b]$ en n subintervalos de la misma amplitud: $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$, con $x_0 = a$ y $x_n = b$

Fig. 15

2. Utilizando los valores de las imágenes $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ calculamos y sumamos el área de los trapecios formados.

$$\int_a^b f(x)\,dx = h \cdot \left(\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}\right) + h\left(\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right) + \cdots + h \cdot \left(\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right)$$

$$= h\left(\frac{f(x_0)}{2} + \frac{f(x_1)}{2} + \frac{f(x_2)}{2} + \cdots + \frac{f(x_n)}{2}\right)$$

Donde h es la amplitud de cada subintervalo.

Observa que todos los términos, menos los extremos, se suman dos veces. Por esto, la fórmula del método de los trapecios resulta como $\int_a^b f(x)\,dx = h\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right)$

Ejemplo 7

Halla $\int_0^2 (x^2 + 1)\,dx$ por el método de los trapecios dividiendo el intervalo de integración en ocho partes.

1. Dividimos el intervalo $[0, 2]$ en ocho partes. Luego la longitud de cada subintervalo es $h = \frac{2}{8} = 0{,}25$. Así pues, los puntos que obtenemos son: $x_0 = 0, x_1 = 0{,}25, x_2 = 0{,}5, \ldots, x_7 = 1{,}75, x_8 = 2$
2. Construimos una tabla (tabla 1) con los puntos que hemos obtenido y sus imágenes por la función integrando.
3. Aplicamos la fórmula de los trapecios:

$$\int_0^2 (x^2 + 1)dx = 0{,}25\left(\frac{1}{2} + 1{,}0625 + 1{,}25 + 1{,}5625 + 2 + 2{,}5625 + 3{,}25 + 4{,}0625 + \frac{5}{2}\right) = 4{,}6875$$

Actividades

9. **Utiliza** sumas inferiores, superiores y el método de los trapecios para calcular aproximadamente el área comprendida entre el eje x, las rectas $x = 1$ y $x = 2$ y la gráfica de la función $y = f(x)$, a la que pertenecen los puntos en esta tabla:

x	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
y	4	3,89	3,58	3,14	2,59	2

10. Las rectas $y = 3x$ y $y = -x + 8$, junto con el eje de abscisas, determinan un triángulo. **Halla** el área usando el cálculo integral y **comprueba** que se obtiene el mismo resultado por un procedimiento geométrico.

62

Prohibida su reproducción

Solucionario

1.

a) $=\frac{x^3}{3}+\frac{16}{5}x^2\sqrt{x}+12x^2+\frac{64}{3}x\sqrt{x}+16x+C$

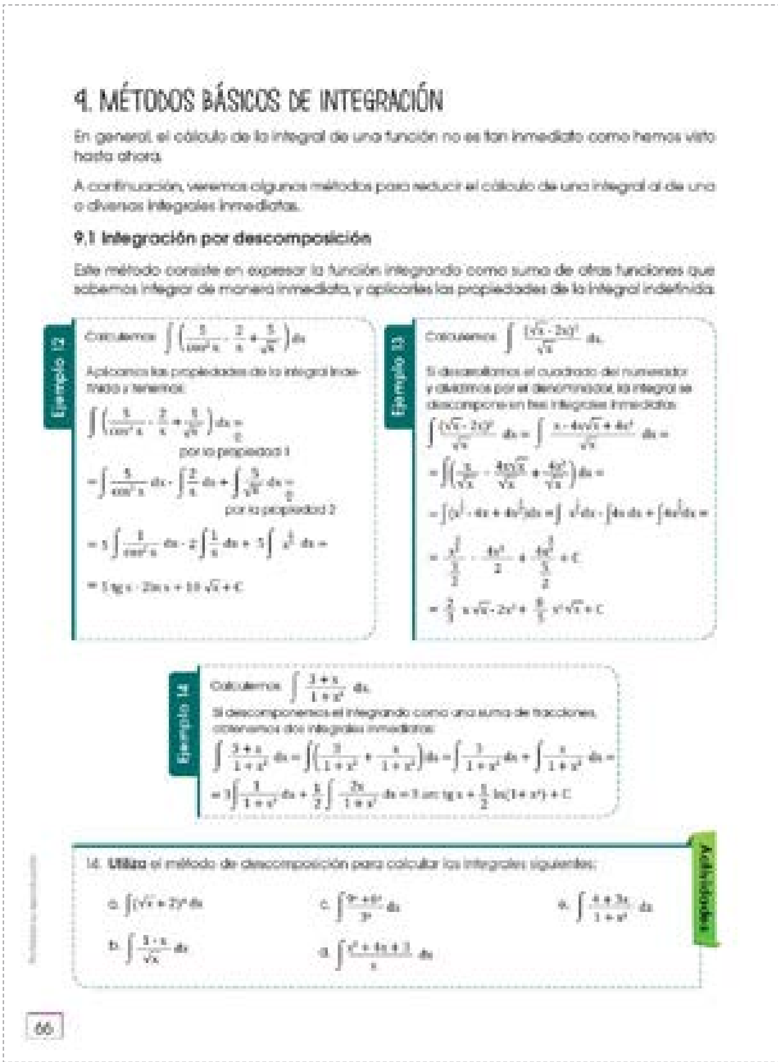
b) $=2\sqrt{x}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$

c) $=\int 3^x dx+\int 2^x dx=\frac{3^x}{\mathrm{In}3}+\frac{2^x}{\mathrm{In}2}+C$

d) $=\frac{X^3}{3}+4x+3\,\mathrm{In}|x|+C$

e) $=4\,\mathrm{arc\,tg}\,x+\frac{3}{2}\mathrm{In}\left(1+x^2\right)+C$

Página 66



4. MÉTODOS BÁSICOS DE INTEGRACIÓN

En general, el cálculo de la integral de una función no es tan inmediato como hemos visto hasta ahora.

A continuación, veremos algunos métodos para reducir el cálculo de una integral al de una o diversas integrales inmediatas.

9.1 Integración por descomposición

Este método consiste en expresar la función integrando como suma de otras funciones que sabemos integrar de manera inmediata, y aplicarles las propiedades de la integral indefinida.

Ejemplo 12

Ejemplo 13

Ejemplo 14

14. Utiliza el método de descomposición para calcular las integrales siguientes:

Actividades

66

Prohibida su reproducción

Solucionario

1.

a) $f(2) = 12$ b) $g'(2) = \frac{2}{9}$

2. $f'(0) = 0$

3.

a) $v = 9t^2 - 12t,\ a = 18t - 12$

b) $x = 27m;\ v = 45ms^{-1}\ ;\ a = 42ms^{-2}$

c) $t = 2$ s

d) $t = \frac{10}{9}$ s

4.

a) $y = \frac{10}{9}$; b) $y = e^2 x - e^2$; c) $y = \frac{10}{9} + 1$

5. $y = 0$

6. $(1, -4), (-1, 12). (-3, -4)$

7. $m = 4$

8.

9.

10.

a) $x\ (4 \ln x + 1)$ b) $\ln x$

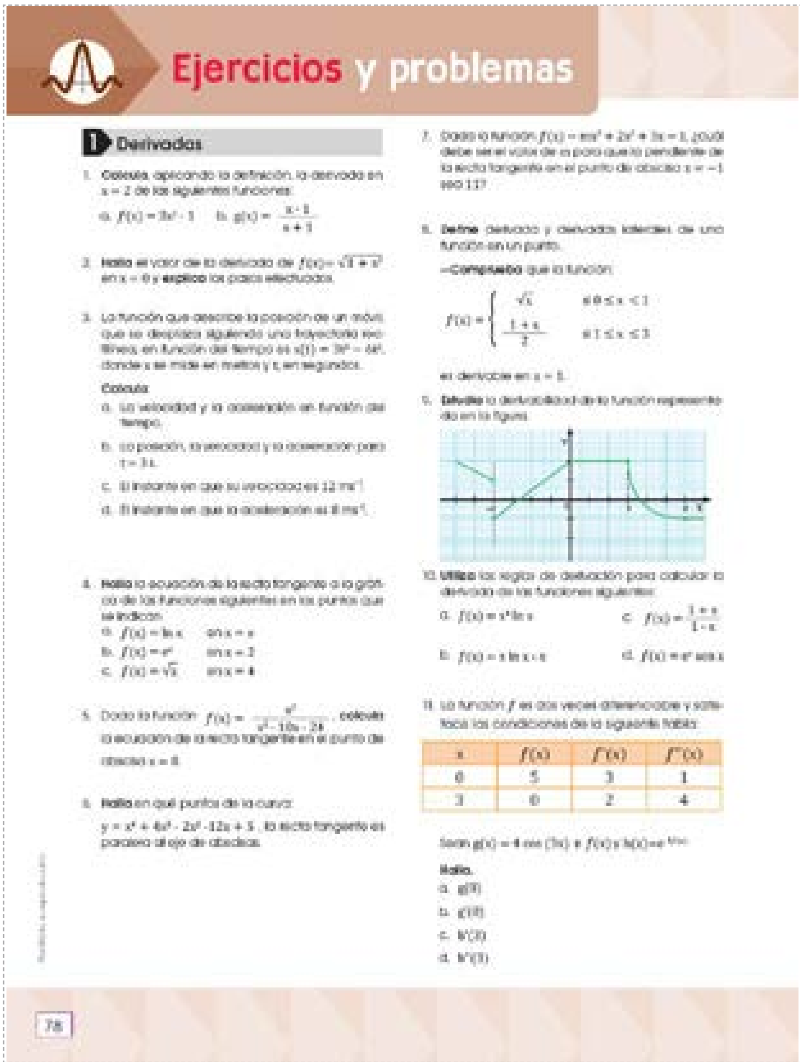
c) $\frac{2}{(1-x)^2}$ d) $e^x (\operatorname{sen} x + \cos x)$

11.

a) 9 b) 3 c) 5

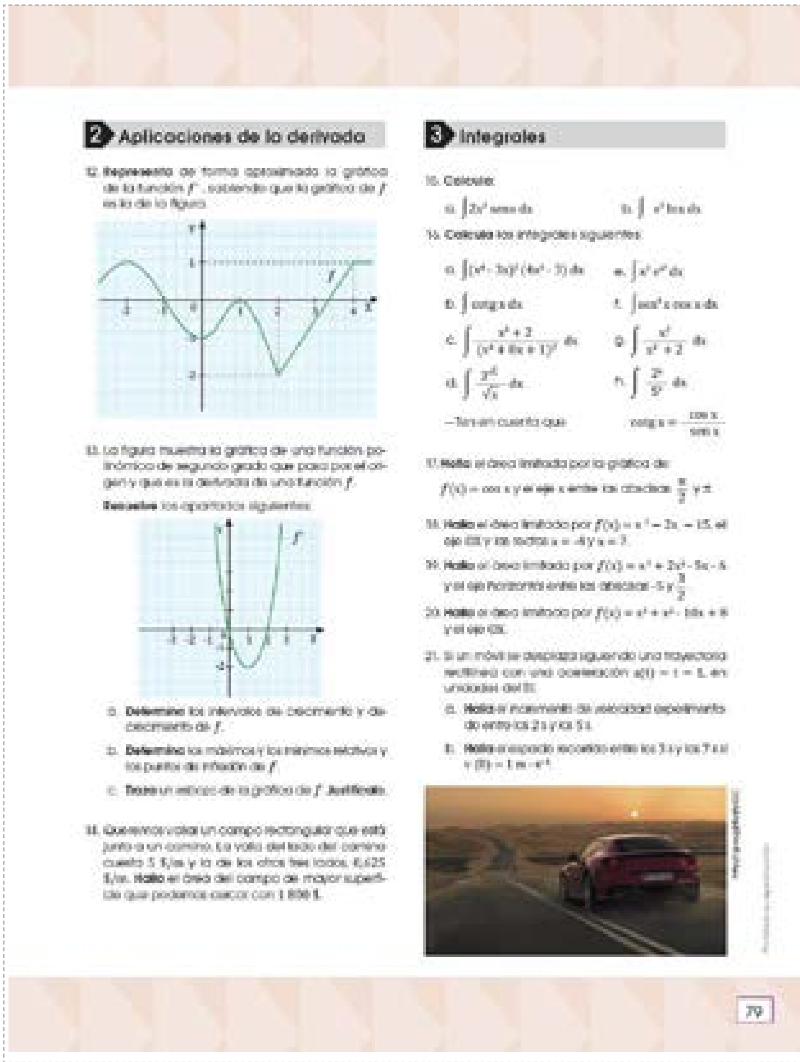
d) $25e^{20} \approx 1.2129 \times 10^{10}$

Página 78



Prohibida su reproducción

Página 79



Solucionario

13.

a) f est. crec. en (-∞,0) ∪ (2,+∞), y est. decrec. en (0, 2)

b) M, en x = 0; en x = 2; PI, en x = 1

14. 115 200 m^2

15.

a) $4x \operatorname{sen}(x) - 2(x^2-2)\cos(x) + C$

b) $\frac{1}{9}x^2(3\ln(x) - 1) + C$

Prohibida su reproducción

Solucionario

16.

a) $\frac{243x^6}{2}-243x^9+\frac{405x^{12}}{2}-90x^{15}+\frac{45x^18}{2}-3x^{21}+\frac{x^{24}}{6}+C$

b) $\ln(\operatorname{sen} x)+C$

c) $-\frac{1}{4\left(x^4+8x+1\right)}+C$

d) $\frac{2\times 3^{\sqrt{x}}}{\operatorname{In} 3}+C$

e) $\frac{e^{x^3}}{3}+C$

f) $\frac{\operatorname{sen}^5(5)}{5}+C$

g) $\frac{1}{3}\operatorname{In}\left(x^3+2\right)+C$

h) $-\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\operatorname{In}\left(\frac{5}{2}\right)}+C$

17. 1 unidad cuadrada

18. $\frac{325}{3}$ unidad cuadrada

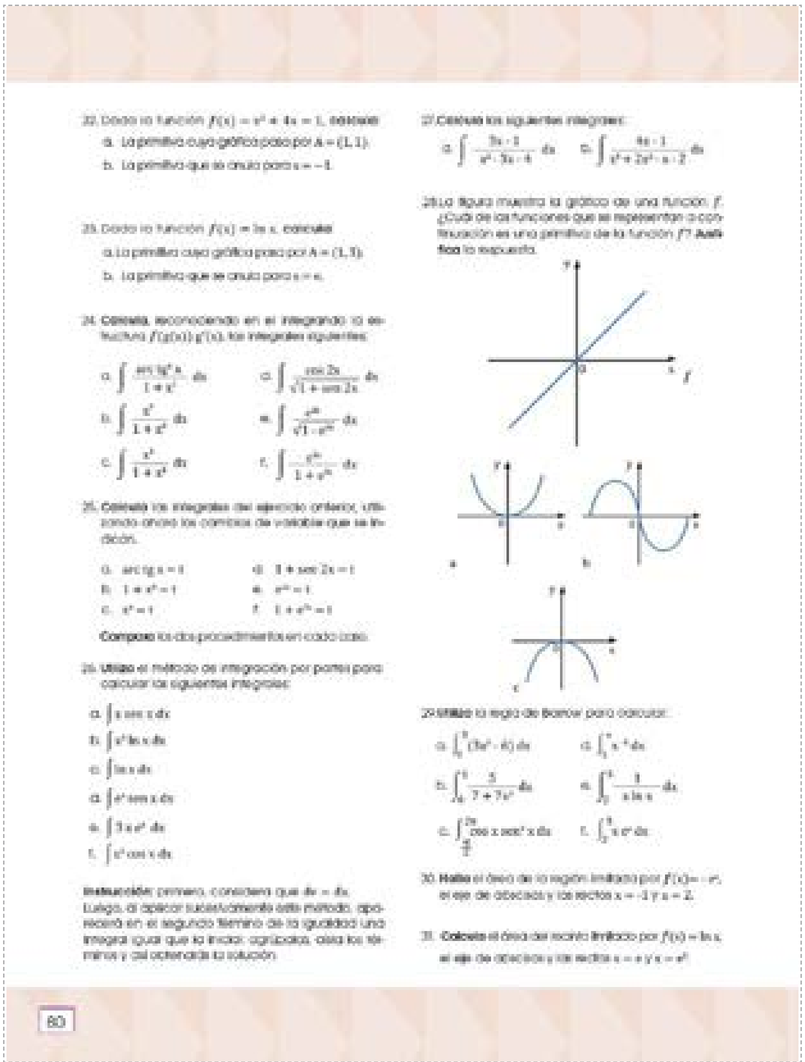
19. $\frac{11941}{192}$

20. $\frac{875}{12}$

21. a) 7,5 $\frac{m}{s}$ b) $\frac{268}{3}$ m

Prohibida su reproducción

Página 80



Orientación didáctica

- Para resolver el ejercicio 27, el método adecuado es el llamado de fracciones parciales. En donde se deberá factorar el denominador y encontrar las fracciones de la cual se origina el término racional del Integrando. En el siguiente enlace, puedes encontrar ejercicios resueltos, para ilustrar el procedimiento adecuado.

http://goo.gl/wzSLe7

Solucionario

22.

a) $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2x - x - \frac{1}{3}$

b) $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2x - x - \frac{1}{3}$

23.

a) F(x)=x ln x-x+4

b) F(x)=x ln x-x

Prohibida su reproducción

Solucionario

24.

$$\frac{1}{5}\left(\tan^{-1}x\right)^{5}+C;$$

$$\frac{1}{8}\ln\left(1+x^{8}\right)+C$$

$$\frac{1}{4}\tan^{-1}x^{4}+C$$

$$\sqrt{1+\operatorname{sen}2x}+C$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(e^{2x}\right)+C$$

$$\frac{1}{3}\ln\left(1+e^{3x}\right)+C$$

25.

$$\frac{1}{5}\left(\tan^{-1}x\right)^{5}+C;$$

$$\frac{1}{8}\ln\left(1+x^{8}\right)+C$$

$$\frac{1}{4}\tan^{-1}x^{4}+C$$

$$\sqrt{1+\operatorname{sen}2x}+C$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(e^{2x}\right)+C$$

$$\frac{1}{3}\ln\left(1+e^{3x}\right)+C$$

26.

$$-x\cos x+\operatorname{sen}x+C$$

$$\frac{X^{6}}{6}\left(\ln x-1\right)+C$$

$$\frac{e^{x}}{2}\left(\operatorname{sen}x-\cos x\right)+C$$

$$3e^{x}\left(x-1\right)+C$$

$$\left(x^{2}-2\right)\operatorname{sen}x+2x\cos x+C$$

27.

$$\frac{4}{5}\ln|x+1|+\frac{11}{5}\ln|x-4|+C$$

$$\frac{5}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x-1|-3\ln|x+2|+C$$

28.

a) Figura a

29.

a) 9; b) $\frac{5\pi}{28}$ c) $-\frac{1}{6}$ d) 1 e) $\ln\left(\frac{\ln 3}{\ln 2}\right)$ f) $4e^{5}-e^{2}$

30.

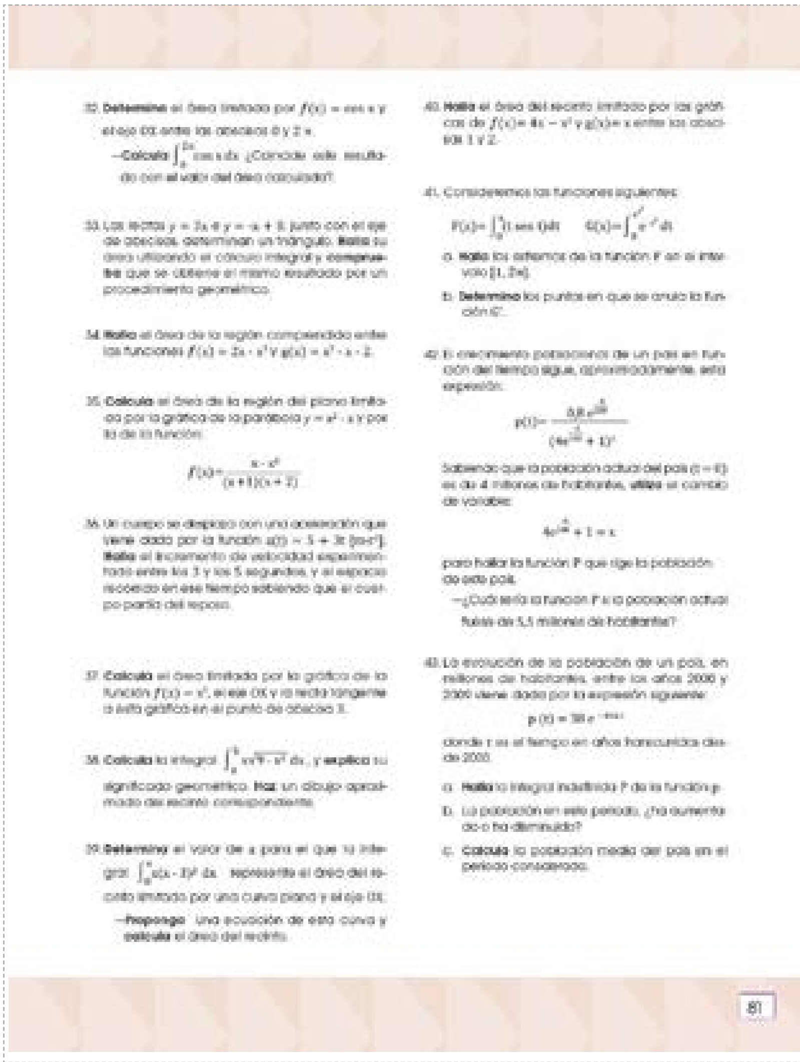
a) Figura a $\frac{e^{3}-1}{e}$

31.

a) e2 unidades cuadradas

Prohibida su reproducción

Página 81



Solucionario

32. 4; 0; no

33. 24 u^2

34. $\dfrac{125}{24}$

35. 0,21 u^2

36. 34m e^{-1}, 89m

37. 9/4 u^2

39. a = 3; y = x^3-6x^2 + 9x, 27/ u^2

40. 13/6 u^2

41. a) M= (   ), m = (   ); b) x=0

42.

43.

a) P (t)= - 1900 e -0,021+ C

b) ha aumentado

c) 34776289 habitantes

Prohibida su reproducción

Orientación didáctica

- Para los ejercicios 1 y 2, se debe tener en cuenta la regla de la cadena en la derivación.

Para el ejercicio 3 se debe encontrar un cambio apropiado de variable, al principio con los estudiantes, se puede realizar este cambio, simplemente por prueba y error, hasta obtener más experiencia.

Solucionario

1.

2.

3.

4.

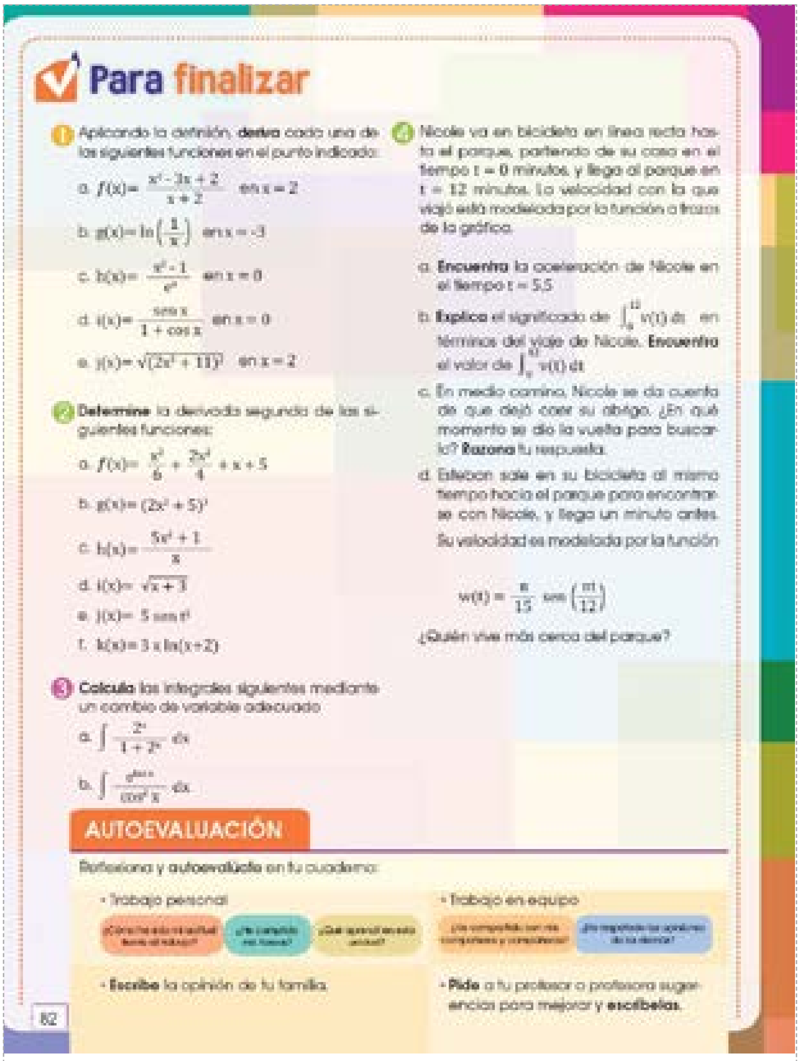
a) -0.2

b) Desplazamiento total. 1.4

c) t= 6

d) Nicole

Página 82



Para finalizar

1. Aplicando la definición, **deriva** cada una de las siguientes funciones en el punto indicado:

a. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x+2}$ en $x=2$

b. $g(x)=\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en $x=-3$

c. $h(x)=\dfrac{x^2-1}{e^x}$ en $x=0$

d. $i(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$ en $x=0$

e. $j(x)=\sqrt{(2x^2+11)^3}$ en $x=2$

2. **Determina** la derivada segunda de las siguientes funciones:

a. $f(x)=\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{2x^2}{4}+x+5$

b. $g(x)=(2x^2+5)^3$

c. $h(x)=\dfrac{5x^2+1}{x}$

d. $i(x)=\sqrt{x+3}$

e. $j(x)=5\operatorname{sen} x^2$

f. $k(x)=3x\ln(x+2)$

3. **Calcula** las integrales siguientes mediante un cambio de variable adecuado

a. $\displaystyle\int \frac{2^x}{1+2^x}\,dx$

b. $\displaystyle\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx$

4. Nicole va en bicicleta en línea recta hasta el parque, partiendo de su casa en el tiempo $t=0$ minutos, y llega al parque en $t=12$ minutos. La velocidad con la que viajó está modelada por la función a trazos de la gráfica.

a. **Encuentra** la aceleración de Nicole en el tiempo $t=5.5$

b. **Explica** el significado de $\int_0^{12} v(t)\,dt$ en términos del viaje de Nicole. **Encuentra** el valor de $\int_0^{12} v(t)\,dt$

c. En medio camino, Nicole se da cuenta de que dejó caer su abrigo. ¿En qué momento se dio la vuelta para buscarlo? **Razona** tu respuesta.

d. Esteban sale en su bicicleta al mismo tiempo hacia el parque para encontrarse con Nicole, y llega un minuto antes. Su velocidad es modelada por la función

$$w(t)=\frac{\pi}{15}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{12}\right)$$

¿Quién vive más cerca del parque?

AUTOEVALUACIÓN

Reflexiona y **autoevalúate** en tu cuaderno:

- Trabajo personal
- Trabajo en equipo
- **Escribe** la opinión de tu familia.
- **Pide** a tu profesor o profesora sugerencias para mejorar y **escríbelas**.

Prohibida su reproducción

Página 83


ZONA

UD. 2

El puente matemático

Elasticidad de la demanda

Economista

83

Orientación didáctica

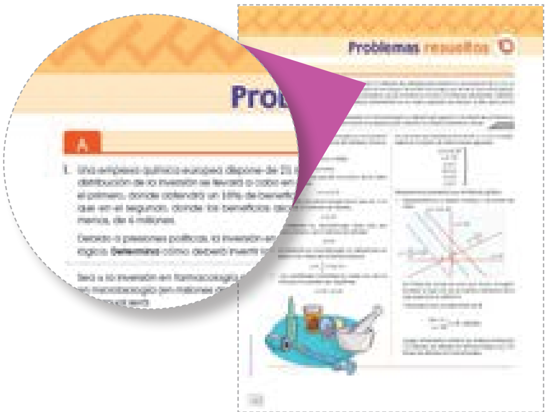
- En el tema de puente matemático, se puede extener la idea a modelos usados tambien en la ingenieria de la construcción de puentes, como es el caso del modelo generado por una figura conocida en la geometría llamada " La Catenaria", que se modela con el uso de ecuadiones diferenciales ordinarias.

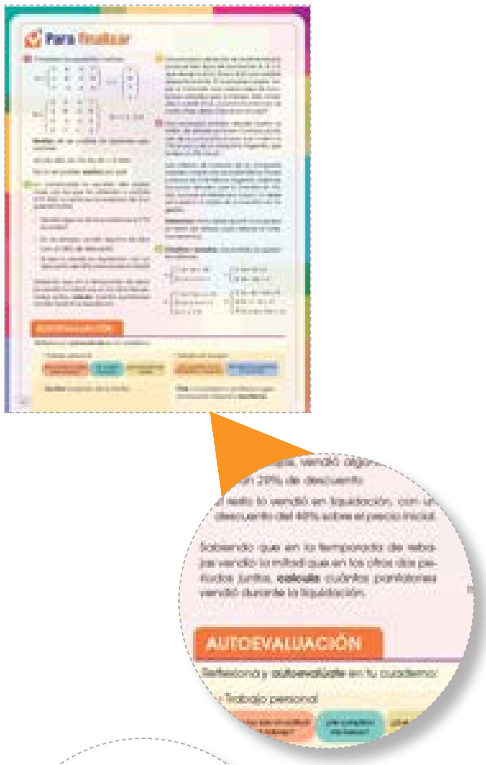
- En el tema de la elasticidad de la demanda se usa la integracion de las funciones oferta y demanda, para modelar de mejor manera y predecir resultados en la economía.

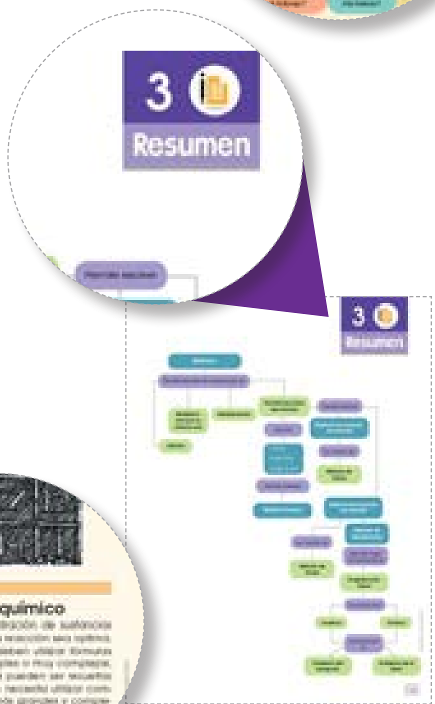
- Las derivadas en economía son conocidas como "Marginales", como por ejemplo el Marginal del Costo, informa cómo varia la función del costo, cuando varían las unidades producidas de un producto.

Prohibida su reproducción

Álgebra lineal

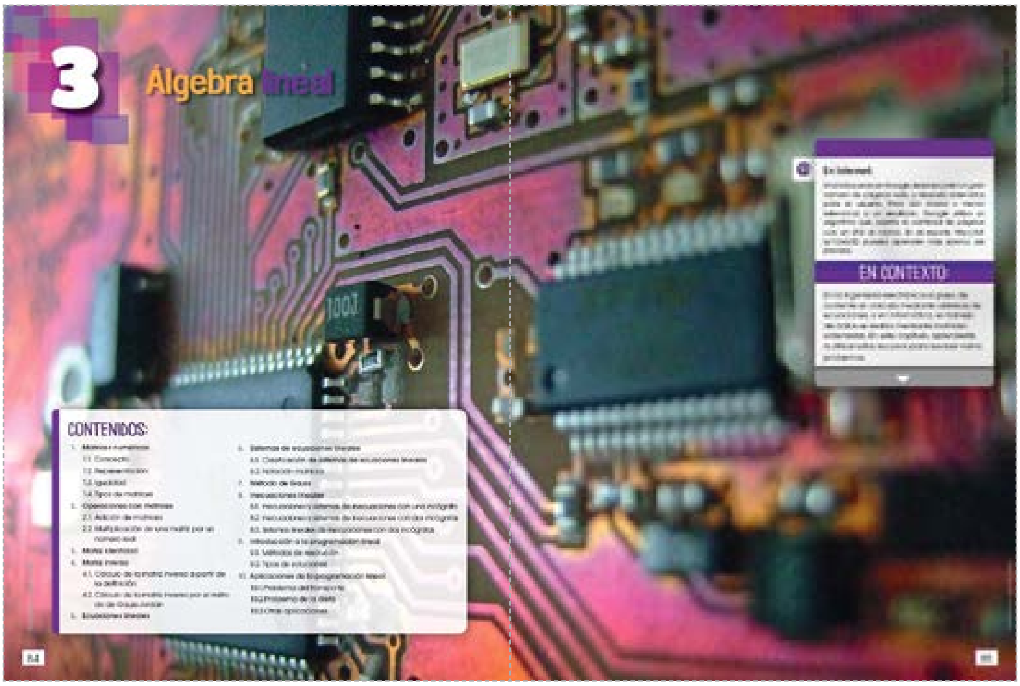






Prohibida su reproducción

UNIDAD 3



Ejes temáticos	Contenidos	
Álgebra lineal (84-119)	1. Matrices numéricas	1.1. Concepto 1.2. Representación 1.3. Igualdad 1.4. Tipos de matrices
	2. Operaciones con matrices	2.1. Adición de matrices 2.2. Multiplicación de una matriz por un número real
	3. Matriz identidad	
	4. Matriz inversa	4.1. Cálculo de la matriz inversa a partir de la definición 4.2. Cálculo de la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan
	5. Ecuaciones lineales	
	6. Sistemas de ecuaciones lineales	6.1. Clasificación de sistemas de ecuaciones lineales 6.2. Notación matricial
	7. Método de Gauss	
	8. Inecuaciones lineales	8.1. Inecuaciones y sistemas de inecuaciones con una incógnita 8.2. Inecuaciones y sistemas de inecuaciones con dos incógnitas 8.3. Sistemas lineales de inecuaciones con dos incógnitas
	9. Introducción a la programación lineal	9.1. Métodos de resolución 9.2. Tipos de soluciones
	10. Aplicaciones de la programación lineal	10.1.Problema del transporte 10.2.Problema de la dieta 10.3.Otras aplicaciones

Prohibida su reproducción

Prohibida su reproducción

<table>
<tr><td colspan="8">OBJETIVO DEL ÁREA POR SUBNIVEL: O.M.5.3. Desarrollar estrategias individuales y grupales que permitan un cálculo mental y escrito, exacto o estimado; y la capacidad de interpretación y solución de situaciones problémicas del medio.</td></tr>
<tr><td colspan="8">OBJETIVO INTEGRADOR DEL ÁREA POR SUBNIVEL: OI.5.3. Tomar decisiones considerando la relación entre individuo y sociedad en la era digital y sus influencias en las distintas producciones científicas y culturales, en un marco de reconocimiento y respeto a los derechos.
OI.5.10. Desarrollar mecanismos de participación a partir de la comprensión de los procesos de lucha social y política de diversos grupos, movimientos y culturas y su contribución a la construcción de la identidad nacional en el marco de una sociedad intercultural y multicultural de convivencia armónica.</td></tr>
<tr><td>LOGO INSTITUCIONAL</td><td colspan="4">NOMBRE DE LA INSTITUCIÓN</td><td colspan="3">AÑO LECTIVO</td></tr>
<tr><td colspan="8">PLAN DE UNIDAD TEMÁTICA</td></tr>
<tr><td colspan="8">1. DATOS INFORMATIVOS:</td></tr>
<tr><td>Docente:</td><td>Nombre del docente que ingresa la información</td><td>Área/asignatura:</td><td>MATEMÁTICA</td><td>Grado/Curso:</td><td>3° BACHILLERATO</td><td>Paralelo:</td><td></td></tr>
<tr><td>N.º de unidad de planificación:</td><td>4</td><td>Título de unidad de planificación:</td><td>VECTORES EN EL ESPACIO</td><td colspan="2">Objetivos específicos de la unidad de planificación:</td><td colspan="2">Proponer soluciones creativas a situaciones concretas de la realidad nacional y mundial mediante la aplicación de las operaciones básicas de los diferentes conjuntos numéricos, el uso de modelos funcionales, algoritmos apropiados, estrategias y métodos formales y no formales de razonamiento matemático que lleven a juzgar con responsabilidad la validez de procedimientos y los resultados en un contexto.

Desarrollar estrategias individuales y grupales que permitan un cálculo mental, escrito, exacto o estimado y la capacidad de interpretación y solución de situaciones problémicas del medio.</td></tr>
<tr><td>PERÍODOS</td><td colspan="2">18</td><td colspan="2"></td><td>SEMANA DE INICIO:</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="8">2. PLANIFICACIÓN</td></tr>
<tr><td colspan="6">DESTREZAS CON CRITERIOS DE DESEMPEÑO A SER DESARROLLADAS:</td><td colspan="2">CRITERIOS DE EVALUACIÓN</td></tr>
</table>

• Reconocer el conjunto de matrices M (R) y sus elementos, así como las matrices especiales: nula e identidad. • Realizar las operaciones de adición y producto entre matrices M2×2 (R), producto de escalares por matrices M2×2 (R), potencias de matrices M2×2 (R) aplicando las propiedades de números reales. • Calcular el producto de una matriz de M (R) por un vector en el plano y analizar su resultado (vector y no matriz). • Reconocer matrices reales de m×n e identificar las operaciones que son posibles realizar entre ellas según sus dimensiones. • Calcular determinantes de matrices reales cuadradas de orden 2 y 3 para resolver sistemas de ecuaciones. • Calcular la matriz inversa A de una matriz cuadrada A cuyo determinante sea diferente a 0 por el método de Gauss (matriz ampliada) para resolver sistemas de ecuaciones lineales. • Aplicar la divisibilidad de números enteros, el cálculo del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo 3 de un conjunto de números enteros y la resolución de ecuaciones lineales con dos incógnitas (con soluciones enteras no negativas) en la solución de problemas. • Reconocer un subconjunto convexo en R y determinar el conjunto de soluciones factibles de forma gráfica y analítica para resolver problemas de programación lineal simple (minimización en un conjunto de soluciones factibles de un funcional lineal definido en R). • Realizar un proceso de solución gráfica y analítica del problema de programación lineal graficando las 2→inecuaciones lineales, determinando los puntos extremos del conjunto de soluciones factibles y encontrar la solución óptima. • Resolver y plantear aplicaciones (un modelo simple de línea de producción, un modelo en la industria química, un problema de transporte simplificado), interpretando y juzgando la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.	CE.M.5.2. Emplea sistemas de ecuaciones 3x3 aplicando diferentes métodos, incluida la eliminación gaussiana; opera con matrices cuadradas y de orden mxn.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	RECURSOS	INDICADORES DE LOGRO	TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN
EXPERIENCIA CONCRETA Debatir en clase el fenómeno de la caida libre de los cuerpos, cerca de la superficie terrestre, para poner en contexto el concepto de incrementos o variaciones de velocidad, que luego serán aplicados en el dema de derivadas de funciones. Analizar un grafico en dónde se relacione la velocidad versus el tiempo transcurrido en la caida de los cuerpos. CONCEPTUALIZACIÓN Diferenciar los eventos constantes de los eventos donde existan variabilidades Comparar las definiciones de velocidad constante y aceleración, compararla con graficos de otras funciones constantes y otra con variaciones. REFLEXIÓN Reflexionar acerca de la importancia de predecir eventos a partir de funciones, como modelos mátematicos. Identificar las relaciones entre las variables tratadas. APLICACIÓN Atravez de un gráfico la velocidad en función del tiempo, de cuerpo en caida libre. Reconocer los elementos (variables) involucradas en el gráfico y sus respectivas ecuaciones. Producir predicciones usando los modelos matemáticos estudiados.	- Texto - Cuaderno - Videos (sitios web) - Pizarra - Calculadora	IM.5.2.1. Resuelve sistemas de ecuaciones mxn con diferentes tipos de soluciones y empleando varios métodos, y los aplica en funciones racionales y en problemas de aplicación; juzga la validez de sus hallazgos. (I.2.) M.5.2.2. Opera con matrices de hasta tercer orden, calcula el determinante, la matriz inversa y las aplica en sistemas de ecuaciones. (I.3.)	Comprobar la capacidad del estudiante para aplicar las propiedades y procedimientos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales (con dos incógnitas y con tres incógnitas) a través de varios métodos, y para graficar e interpretar dichas gráficas, apoyándose en la utilización de TIC (software, calculadoras, etc.) y su aplicación en problemas. Además, para reconocer los elementos de las matrices y operar (suma y producto) entre ellas, multiplicar un escalar por una matriz y un vector por una matriz. Y para calcular el determinante asociado a matrices de orden dos y tres, y hallar la inversa de una matriz cuadrada.

ELEMENTOS DEL PERFIL DE SALIDA

I.2. Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos e información posibles.

I.3. Sabemos comunicarnos de manera clara en nuestra lengua y en otras, utilizamos varios lenguajes como el numérico, el digital, el artístico y el corporal; asumimos con responsabilidad nuestros discursos.

Prohibida su reproducción

Objetivos generales del área que se evalúan

- Proponer soluciones creativas a situaciones concretas de la realidad nacional y mundial mediante la aplicación de las operaciones básicas de los diferentes conjuntos numéricos, el uso de modelos funcionales, algoritmos apropiados, estrategias y métodos formales y no formales de razonamiento matemático que lleven a juzgar con responsabilidad la validez de procedimientos y los resultados en un contexto.
- Desarrollar estrategias individuales y grupales que permitan un cálculo mental, escrito, exacto o estimado y la capacidad de interpretación y solución de situaciones problémicas del medio.

Objetivos del área por subnivel

- Proponer soluciones creativas a situaciones concretas de la realidad nacional y mundial mediante la aplicación de las operaciones básicas de los diferentes conjuntos numéricos, y el uso de modelos funcionales, algoritmos apropiados, estrategias y métodos formales y no formales de razonamiento matemático, que lleven a juzgar con responsabilidad la validez de procedimientos y los resultados en un contexto.
- Desarrollar estrategias individuales y grupales que permitan un cálculo mental y escrito, exacto o estimado; y la capacidad de interpretación y solución de situaciones problémicas del medio.

Objetivos integradores de subnivel

- Tomar decisiones considerando la relación entre individuo y sociedad en la era digital y sus influencias en las distintas producciones científicas y culturales, en un marco de reconocimiento y respeto a los derechos.
- Desarrollar mecanismos de participación a partir de la comprensión de los procesos de lucha social y política de diversos grupos, movimientos y culturas y su contribución a la construcción de la identidad nacional en el marco de una sociedad intercultural y multicultural de convivencia armónica.

Criterio de evaluación

- Emplea sistemas de ecuaciones 3x3 aplicando diferentes métodos, incluida la eliminación gaussiana; opera con matrices cuadradas y de orden mxn.

Prohibida su reproducción

Indicadores para la evaluación del criterio

- Resuelve sistemas de ecuaciones mxn con diferentes tipos de soluciones y empleando varios métodos, y los aplica en funciones racionales y en problemas de aplicación; juzga la validez de sus hallazgos. (I.2.)
- Opera con matrices de hasta tercer orden, calcula el determinante, la matriz inversa y las aplica en sistemas de ecuaciones. (I.3.)

Elementos del perfil de salida a los que se contribuye

- Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos e información posibles.
- Sabemos comunicarnos de manera clara en nuestra lengua y en otras, utilizamos varios lenguajes como el numérico, el digital, el artístico y el corporal; asumimos con responsabilidad nuestros discursos.

Eje temático	Destrezas con criterio de desempeño
Álgebra lineal	Reconocer el conjunto de matrices M (R) y sus elementos, así como las matrices especiales: nula e identidad.
	Realizar las operaciones de adición y producto entre matrices M2×2 (R), producto de escalares por matrices M2×2 (R), potencias de matrices M2×2 (R) aplicando las propiedades de números reales.
	Calcular el producto de una matriz de M (R) por un vector en el plano y analizar su resultado (vector y no matriz).
	Reconocer matrices reales de m×n e identificar las operaciones que son posibles realizar entre ellas según sus dimensiones.
	Calcular determinantes de matrices reales cuadradas de orden 2 y 3 para resolver sistemas de ecuaciones.
	Calcular la matriz inversa A de una matriz cuadrada A cuyo determinante sea diferente a 0 por el método de Gauss (matriz ampliada) para resolver sistemas de ecuaciones lineales.
	Aplicar la divisibilidad de números enteros, el cálculo del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo 3 de un conjunto de números enteros y la resolución de ecuaciones lineales con dos incógnitas (con soluciones enteras no negativas) en la solución de problemas.
	Reconocer un subconjunto convexo en R y determinar el conjunto de soluciones factibles de forma gráfica y analítica para resolver problemas de programación lineal simple (minimización en un conjunto de soluciones factibles de un funcional lineal definido en R).
	Realizar un proceso de solución gráfica y analítica del problema de programación lineal graficando las 2→inecuaciones lineales, determinando los puntos extremos del conjunto de soluciones factibles y encontrar la solución óptima.
	Resolver y plantear aplicaciones (un modelo simple de línea de producción, un modelo en la industria química, un problema de transporte simplificado), interpretando y juzgando la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.

Prohibida su reproducción

Un precedente del trabajo con matrices lo llevó a cabo el matemático y físico irlandés W. R. Hamilton (1805-1865) al desarrollar su trabajo con cuaterniones. El abandono de la conmutatividad en la multiplicación de estos números le llevó a concebir un álgebra diferente, que fue además un precedente del cálculo vectorial.

La primera vez que aparece la notación matricial es hacia 1843, en los trabajos sobre la composición de las transformaciones homográficas emprendidos por A. Cayley.

Al investigar en esta dirección, Cayley estableció la definición de matriz y sus propiedades. Además, en 1857, desarrolló el álgebra de matrices, es decir, las reglas que indican cómo se suman y multiplican las matrices.

Había nacido lo que hoy se conoce como álgebra lineal. El nombre de matriz fue acuñado por el matemático inglés J. J. Sylvester para darle el significado de madre de los determinantes.

SISTEMAS DE ECUACIONES

La teoría de matrices es, históricamente, una extensión de la teoría desarrollada para los determinantes. Su origen, por tanto, es el mismo: la necesidad de resolver ecuaciones lineales simultáneas y tratar las transformaciones lineales de un conjunto de variables.

Fue A. Cayley quien, en 1858, observó que era posible considerar la matriz de los coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales como un operador que actúa sobre las variables de manera similar a como un número a lo hace sobre la incógnita x para obtener ax.

En el libro An Elementary Theory of Determinants (1867) se dan las condiciones, escritas en términos de determinantes, bajo las que los sistemas de ecuaciones tienen soluciones no triviales.

El álgebra actual abarca tanto la llamada álgebra clásica, que se ocupa de la resolución de las ecuaciones algebraicas mediante fórmulas explícitas, como todas las tendencias nacidas desde entonces.

Retrato de Sophus Lie.

Prohibida su reproducción

LAS OTRAS ÁLGEBRAS

Las investigaciones de matemáticos de la talla del alemán F. Klein (1849-1925) y del noruego S. Lie (1842-1899), así como los trabajos del también alemán D. Hilbert (1862-1943), hicieron evolucionar el álgebra con una rapidez asombrosa, hasta el punto de cambiar su objetivo principal, que era el de la teoría de ecuaciones, por el de las estructuras algebraicas.

Con todo ello se asentaron, además, las bases de partida para los trabajos de los algebristas del siglo XX.

El álgebra moderna tiene como base la teoría de conjuntos y se prolonga en las llamadas álgebras lineal, multilineal y topológica. Existe además el álgebra de la lógica, creada por los matemáticos ingleses G. Boole (1815-1864) y A. de Morgan (1806- 1871) y desarrollada por el alemán E. Schröder (1841-1902).

También se debe a G. Boole una definición más amplia de matemática.

En la introducción de su libro Mathematical Analysis of Logic, publicado en 1847, protestaba contra su definición, admitida entonces, como la ciencia del número y la magnitud. Y expresaba claramente la idea de que la característica esencial de la matemática es su forma. Así, puede estudiar cualquier tema capaz de expresarse únicamente mediante símbolos, con reglas precisas para operarlos, y sujeto sólo a su propia consistencia interna.

Retrato de Georges Boole.

Prohibida su reproducción

Matrices

Matriz de dimensión $m \times n$: conjunto de $m \times n$ elementos dispuestos en m filas y n columnas. Se representa:

$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$, o bien, $A = (a_{ij})$; a_{ij}, elemento de la fila i y la columna j

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij} \quad \forall\, i, j$$

Matriz cuadrada: dimensión $n \times n$. Elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$: diagonal principal.

Matriz fila o vector fila: dimensión $1 \times n$.

Matriz columna o vector columna: dimensión $m \times 1$.

Matriz diagonal: matriz cuadrada en la que todos los elementos situados fuera de la diagonal principal son 0.

Matriz escalonada: las filas nulas están en la parte inferior de la matriz; y en las filas no nulas, el primer elemento diferente de cero de una fila está situado más a la derecha que el primer elemento diferente de cero de la fila inmediatamente superior.

Matriz identidad, I: matriz $n \times n \mid a_{ij} = 0$, si $i \neq j$, y $a_{ij} = 1$, si $i = j$.

Matriz nula: $a_{ij} = 0,\ \forall\, i, j$.

Rango de una matriz A, rang (A): número de filas no nulas de una matriz escalonada equivalente a A.

Dos matrices son equivalentes si una de ellas se obtiene a partir de la otra mediante transformaciones elementales.

Suma: $A_{mn} + B_{mn} = C_{mn}$ con $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Producto por un número real: $k \cdot A_{mn} = C_{mn}$ con $c_{ij} = k \cdot a_{ij}$

Producto: $A_{mp} \cdot B_{pn} = C_{mn}$ con $c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} \cdot b_{jk}$

Matriz inversa, A^{-1}, de una matriz A: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Matriz traspuesta, A^t, de una matriz A: la que se obtiene intercambiando sus filas por sus columnas.

Determinantes

Determinante de una matriz cuadrada A, $|A|$, número asociado a A, definido de la siguiente manera:

Determinantes de orden uno: $|A| = |a_{11}| = a_{11}$

Determinantes de orden dos:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$$

Determinantes de orden tres:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{21}\,a_{32}\,a_{13} + a_{31}\,a_{12}\,a_{23} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{23}\,a_{32}\,a_{11} - a_{33}\,a_{12}\,a_{21}$$

Determinante de orden n: $|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} M_{ij}$, donde M_{ij} (menor complementario de a_{ij}) es el determinante de la matriz de orden $n - 1$ que se obtiene al suprimir la fila y la columna correspondientes a a_{ij}.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}\,(A^t)}{|A|}, \text{ donde } A_{ij} \text{ (adjunto del elemento } a_{ij}) = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Sistemas de ecuaciones lineales

Sistema de ecuaciones lineales: conjunto de ecuaciones lineales que deben verificarse simultáneamente.

Sistema de m ecuaciones con n incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

Solución: n-upla de números reales, $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, tal que verifican simultáneamente las ecuaciones.

Clasificación de sistemas según sus soluciones:

- Incompatible (sin solución)
- Compatible (con solución)
  - Determinado (solución única)
  - Indeterminado (infinitas soluciones)

Resolución por el **método de Gauss:** se halla un sistema escalonado equivalente al inicial y se resuelve mediante sustitución regresiva.

Notación matricial de un sistema: $A \cdot X = B$, donde $A = (a_{ij})$, $X = (x_j)$, $B = (b_i)$. Solución: $X = A^{-1} \cdot B$

Teorema de Rouché-Frobenius:

rang (A) $\neq$ rang (A′) $\iff$ sistema incompatible

rang (A) = rang (A′) = n $\iff$ sistema compatible determinado

rang (A) = rang (A′) < n $\iff$ sistema compatible indeterminado

Regla de Cramer:

$s_i = \dfrac{\Delta_i}{|A|}$ $\quad \Delta_i$: determinante de la matriz obtenida al sustituir la columna de la matriz A correspondiente a la incógnita i-ésima, por la columna de los términos independientes

Prohibida su reproducción

Introduccion a la lógica Matemática

FÍJATE

Todo razonamiento o inferencia consta de:

— **Premisas:** conjunto de enunciados que expresan los datos de partida.

— **Conclusión:** enunciado final que expresa la nueva información obtenida a partir de las premisas.

Funciones monótonas

Si deseamos demostrar que la suma de los n primeros números naturales es:

$$1 + 2 + 3 + ... + n = n \cdot \frac{n+1}{2}$$

utilizaremos un método de razonamiento inductivo, el *principio de inducción completa,* enunciado por el matemático italiano G. Peano en 1900. El mencionado principio dice:

«Para toda propiedad $P(n)$ de los números naturales que dependa de n y que verifique los requisitos siguientes:

- $P(n)$ se cumple para $n = 1$, es decir, se cumple $P(1)$.
- Si suponemos que se cumple $P(n-1)$, se cumple $P(n)$.

podemos asegurar que $P(n)$ se cumple para todos los números naturales.»

Así, la igualdad se cumple para $n=1$:

$$P(1) = 1 \cdot \frac{1+1}{2} = 1$$

Y si suponemos que se cumple $P(n-1)$, veamos qué sucede para $P(n)$. Tendremos:

$$1 + ... + n - 1 + n = P(n-1) + n =$$
$$= \frac{(n-1) \cdot n}{2} + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Así pues, podemos garantizar que la expresión es correcta.

Si bien es cierto que para solucionar los problemas matemáticos hemos de razonar, ¿es tan importante el razonamiento en las matemáticas en general? Para responder a esta cuestión, podemos partir de la definición de matemática que hallamos en el diccionario:

> *La **matemática** es la parte de la ciencia que, a partir de determinadas nociones básicas, desarrolla sus teorías sin más apoyo que el **razonamiento lógico.***

Así pues, el razonamiento es básico en la matemática. La disciplina que estudia su validez en general recibe el nombre de **lógica.** Para empezar el análisis de los razonamientos, hemos de diferenciar los dos tipos que existen: *deductivos* e *inductivos*.

— La **deducción** consiste en pasar de premisas generales a una conclusión menos general. Cuando este tipo de inferencia es correcta, la conclusión se sigue necesariamente de las premisas: es imposible que siendo éstas verdaderas, la conclusión sea falsa.

Observa, por ejemplo, el siguiente razonamiento deductivo:

Todos los números naturales son enteros. El 2,5 no es un número entero. Por tanto, el 2,5 no es un número natural.

— La **inducción** consiste en llegar a una conclusión general a partir de informaciones menos generales que vienen dadas en las premisas.

Excepto en el caso de la inducción completa descrito en el margen, sólo puede hablarse de cierta *probabilidad,* pues, aunque las premisas sean verdaderas, esto no asegura que la conclusión también lo sea.

Por ejemplo, si tenemos las siguientes premisas:

- El número 121 es divisible entre 11.
- El número 363 es divisible entre 11.
- El número 1 331 es divisible entre 11.

Podemos llegar a la conclusión de que:

Los números capicúas son divisibles entre 11.

Sin embargo, hemos de estar dispuestos a revisar la veracidad de esta conclusión.

Las premisas y la conclusión son enunciados que afirman algo o lo niegan y, por tanto, pueden ser verdaderos o falsos. En cambio, los razonamientos no pueden ser verdaderos ni falsos, pues no afirman ni niegan nada. Así, no hablaremos de razonamientos verdaderos, sino de **razonamientos correctos** o válidos.

La parte de la lógica que se ocupa únicamente de la validez de los razonamientos sin tener en cuenta el contenido de los enunciados es la *lógica formal.* Dentro de ésta, la *lógica proposicional* o *de enunciados* toma los enunciados en bloque, sin analizarlos.

Prohibida su reproducción

p
V
F

Tabla 1.

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Tabla 2.

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Tabla 3.

Combinación de proposiciones

Para construir proposiciones complejas, hemos de considerar todas las combinaciones posibles de los valores de verdad y falsedad de las proposiciones simples con las que vayamos a tratar. Así, para una proposición tendremos todas las combinaciones que aparecen en la tabla 1; para dos proposiciones, las que aparecen en la tabla 2; y para tres proposiciones, las que aparecen en la tabla 3.

Observa que el número total de combinaciones puede calcularse mediante combinatoria. Si tenemos *i* proposiciones, el número total de combinaciones posible es el número de variaciones con repetición de dos elementos tomados de *i* en *i*: $VR_{2,i} = 2^i$.

Operaciones lógicas fundamentales: tablas de verdad

Cuando combinamos dos proposiciones simples mediante una conectiva, el valor de verdad o falsedad de la combinación dependerá del de las proposiciones que las forman. En el caso de dos proposiciones, tenemos las siguientes características:

	Negación	Conjunción	Disyunción	Condicional	Bicondicional
Tabla	p | ¬p V | F **F** | **V**	p q | $p \wedge q$ **V V** | **V** V F | F F V | F F F | F	p q | $p \vee q$ **V V** | **V** **V F** | **V** **F V** | **V** F F | F	p q | $p \rightarrow q$ **V V** | **V** V F | F **F V** | **V** **F F** | **V**	p q | $p \leftrightarrow q$ **V V** | **V** V F | F F V | F **F F** | **V**
Características	¬*p* es falso si *p* es verdadero, y viceversa, ¬*p* es verdadero si *p* es falso.	$p \wedge q$ sólo es verdadero cuando todas las proposiciones que lo forman son verdaderas. En caso contrario, es falso.	$p \vee q$ es verdadero cuando al menos uno de sus miembros lo es. Y sólo es falso en el caso de que los dos miembros sean a la vez falsos.	$p \rightarrow q$ es verdadero siempre, excepto cuando *p*, el antecedente, es verdadero y *q*, el consecuente, falso.	La verdad o falsedad de una proposición implica la verdad o falsedad de la otra. De ahí que en la tabla aparezca el valor *V* siempre que *p* y *q* tienen el mismo valor.
Ejemplos	Si el enunciado «25 es múltiplo de 5» es verdadero, entonces el enunciado «25 no es múltiplo de 5» es falso, y viceversa.	«25 es múltiplo de 5 y de 7» sólo es verdadero si 25 es múltiplo de 5 y también es múltiplo de 7. Si una de las dos cosas, o las dos a la vez, no se cumplen, todo el enunciado complejo será falso.	La proposición «25 es múltiplo de 5 o de 7» será verdad si lo es de 5, si lo es de 7 o si lo es de ambos. Y sólo será falsa en el caso que no sea múltiplo de 5 ni de 7.	Un enunciado complejo como «si apruebo, me compran un coche» es siempre verdadero, menos cuando se da el antecedente *(he aprobado)*, pero no se cumple el consecuente *(no me han comprado un coche)*.	«Aprobaré si y solamente si estudio» es una proposición que es falsa en el caso de que no apruebe y haya estudiado, o bien apruebe sin haber estudiado.

Para determinar la validez de un razonamiento, pueden aplicarse **tablas de verdad** como las que aparecen en la tabla superior. Observa que una tabla de este tipo es una matriz que muestra los posibles valores de verdad de una proposición compleja.

Prohibida su reproducción

FÍJATE

- Todas las leyes lógicas son tautologías y todas las tautologías pueden expresarse como leyes lógicas.
- En los esquemas utilizamos letras mayúsculas *(A, B, C…)* en lugar de las propias de la lógica de enunciados *(p, q, r…)*, porque las mayúsculas simbolizan tanto proposiciones simples *(A = p)* como complejas *(A = (p ∧ q))*.

Leyes del cálculo proposicional

Otra manera de validar un razonamiento sin necesidad de construir constantemente tablas de verdad es utilizar las *reglas de inferencia.* Estas reglas se representan mediante un *esquema de inferencia* o en forma de **ley lógica** y permiten asegurar la corrección formal de una inferencia o razonamiento. Así, el resultado obtenido es siempre una tautología. Por ello la ley lógica acostumbra a expresarse $P \Rightarrow Q$, dado que siempre es formalmente correcta.

Las leyes lógicas son muchas, puesto que hay una por cada razonamiento válido. Sin embargo, cabría destacar aquellas que juegan un papel fundamental en la *inferencia lógica,* y por tanto en la matemática, como son las denominadas **leyes del cálculo proposicional.** Estas leyes son:

Nombre	Ley	Descripción
Doble negación	$A \Leftrightarrow \neg(\neg A)$	Negar dos veces algo es igual que afirmarlo. Y, al revés, afirmar algo equivale a negarlo dos veces. *Soy feliz* equivale a *no soy infeliz.*
Eliminación de la conjunción o simplificación	$A \wedge B \Rightarrow A$ $A \wedge B \Rightarrow B$	Si dos premisas *A* y *B* se dan simultáneamente, tanto se puede concluir *A* como *B.* *El Sol da luz y calor, luego el Sol da luz.* *El Sol da luz y calor, luego el Sol da calor.*
Introducción de la disyunción	$A \Rightarrow A \vee B$	Si se dispone de una proposición como premisa, puede añadirse disyuntivamente cualquier otra proposición. *La velocidad es un vector, luego la velocidad es un vector o llueve.*
Ley del bicondicional	$(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]$	A partir de un bicondicional, podemos concluir dos condicionales, y viceversa. *Aprendo si y sólo si estudio* equivale a *Si aprendo, entonces estudio y, si estudio, entonces aprendo.*
Ley del dilema	$[(A \Rightarrow B) \wedge (C \Rightarrow D) \wedge (A \vee C)] \Leftrightarrow (B \vee D)$	Si una disyunción es verdadera, y cada uno de sus miembros tiene una consecuencia, entonces es cierta la disyunción de esas consecuencias. *Si estudio, aprobaré y, si salgo, me divertiré. Estudiaré o saldré.* Todo esto equivale a *Aprobaré o me divertiré.*
Leyes de De Morgan	$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$	La negación de una conjunción es la disyunción de cada uno de sus componentes negados. La negación de una disyunción es la conjunción de cada uno de sus componentes negados. De *No es cierto que las matemáticas sean difíciles y que la pintura sea fácil* podemos concluir que *Las matemáticas son fáciles o la pintura es difícil.* *No es cierto que corra o vuele* nos permite concluir que *Ni corre ni vuela.*

Prohibida su reproducción

Nombre: ______________________ Fecha: ______________

1. **Considera** las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Calcula:

$$\text{a. } -2A + 3B \quad \text{b. } \frac{1}{3} A \cdot B \quad \text{c. } A \cdot (-B) \quad \text{d. } A^2 - B^2$$

2. Dadas las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

comprueba que:

a. $(A + B)^t = A^t + B^t$

b. $(3A)^t = 3A^t$

3. **Halla** la matriz inversa de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 7 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

4. **Determina** el rango de A en función de los valores de k:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & k^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

5. Sea. $A = \begin{pmatrix} x & -3 \\ x+1 & x-7 \end{pmatrix}$ Se pide:

a. **Determina** el valor o los valores de x para los que no existe inversa de A.

b. **Calcula** a y b para que con x = 2 se cumpla

$$A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

6. **Considera** las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

a. **Halla** la matriz M, cuadrada de orden dos, tal que M · A = B.

b. **Comprueba** que $M^2 = I$ y deduce la expresión para M^n.

7. **Resuelve** mediante el método de Gauss:

$$a)\ \left.\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x + 3y + 5z &= 3 \\ x - 5y + z &= 2 \end{aligned}\right\} \qquad b)\ \left.\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x + z &= 2 \\ y + z &= 3 \end{aligned}\right\}$$

8. **Resuelve** mediante el método de la matriz inversa:

$$a)\ \left.\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 3 \\ -x - 5y + z &= 0 \\ 3x + y - 2z &= 6 \end{aligned}\right\} \qquad b)\ \left.\begin{aligned} x + y - z &= -2 \\ 2x - y - 3z &= 3 \\ x - y - z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Prohibida su reproducción

9. **Discute** y **resuelve**, cuando sea posible, los siguientes sistemas de ecuaciones dependientes de un parámetro:

a) $$\left.\begin{array}{r} (3t+16)x+(2t-28)y+(3t-26)z=40 \\ -19x+14y-5z=-12 \\ 30x-14y+23z=44 \end{array}\right\}$$

b) $$\left.\begin{array}{r} 2x+3ty+z=t \\ 4x+6y+2tz=2t \\ 6tx+9y+3tz=3t \end{array}\right\}$$

10. ¿Para qué valores de m es indeterminado el sistema $\left\{\begin{array}{l} x-3y+2z=2 \\ 3x+y-4z=6 \\ my-5z=0 \end{array}\right.$ Resuélvelo para uno de estos valores.

11. **Estudia** en función de los valores de k el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2kx+(2k-3)y=2 \\ 4x+(k-1)y=k \end{array}\right\}$$

12. **Resuelve** mediante el método de Cramer:

a) $$\left.\begin{array}{r} x+y-2z=7 \\ 2x-y+4z=1 \\ 2x-y-6z=1 \end{array}\right\}$$

b) $$\left.\begin{array}{r} 2x-5y+3z=12 \\ -6x+2y+z=3 \\ 7x-4y+3z=1 \end{array}\right\}$$

13. **Discute** los siguientes sistemas de ecuaciones y resuélvelos cuando sea posible:

a) $$\left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ 3x-3y-2z=1 \\ x-y-z=0 \end{array}\right\}$$

b) $$\left.\begin{array}{r} 2x-3y-z=1 \\ -x+y-3z=0 \\ -x-6y+8z=1 \end{array}\right\}$$

c) $$\left.\begin{array}{r} 2x+4y+2z=0 \\ 6x+3y+6z=3 \\ 5x+7y+5z=1 \end{array}\right\}$$

d) $$\left.\begin{array}{r} x+y-z=2 \\ 2x-y-3z=3 \\ x-2y-2z=0 \end{array}\right\}$$

e) $$\left.\begin{array}{r} 2x-y+z=2 \\ 3x-y+z=1 \\ x+3y+z=1 \end{array}\right\}$$

14. **Discute**, en función del parámetro k, el siguiente sistema de ecuaciones, aplicando el teorema de Rouché-Frobenius, y resuélvelo mediante la regla de Cramer en caso de que sea compatible determinado.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+kz=k \\ kx+ky+z=1 \\ x+ky+z=k \end{array}\right\}$$

15. Una marca de coches monta en una ciudad una red de concesionarios que reparte entre tres empresas, A, B y C. Cincuenta son adjudicados a la empresa C. El resto se reparte entre las empresas A y B. Al cabo de un año las empresas B y C quiebran y una cuarta empresa D asume la gestión de sus concesionarios. También sabemos que el número de concesionarios gestionados por B era $\frac{2}{3}$ de los gestionados por A. Dos años más tarde, la empresa A cierra por falta de rentabilidad 5 concesionarios y la empresa D cierra 10, quedando operativos un total de 85 concesionarios. ¿Cuántos concesionarios ha gestionado cada empresa?

16. **Considera** el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y-(a-1)z=4 \\ x-2y+z=4 \\ 4x-(a+1)y+z=2a \end{array}\right\}$$

a. **Discute** el sistema en función del parámetro a.

b. **Resuélvelo** cuando sea compatible indeterminado.

c. En el caso del apartado anterior, **halla** una solución del sistema en que x, y y z tengan valores enteros.

Prohibida su reproducción

1. *a)* $-2A+3B=\begin{pmatrix}-4 & -7\\ 9 & -21\end{pmatrix}$

b) $\frac{1}{3}A\cdot B=\begin{pmatrix}\frac{29}{3} & \frac{-19}{3}\\ 3 & -5\end{pmatrix}$

c) $A\cdot(-B)=\begin{pmatrix}-29 & 19\\ -9 & 15\end{pmatrix}$

d) $A\cdot A-B\cdot B=\begin{pmatrix}57 & -14\\ 3 & -7\end{pmatrix}$

2. *a)* $(A+B)^t=A^t+B^t$

$$A+B=\begin{pmatrix}10 & -4 & 0\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix};$$

$$(A+B)^t=\begin{pmatrix}10 & 2\\ -4 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$A^t=\begin{pmatrix}2 & 6\\ -4 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix};\ B^t=\begin{pmatrix}8 & -4\\ 0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^t+B^t=\begin{pmatrix}10 & 2\\ -4 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}=(A+B)^t$$

b) $(3A)^t=3A^t$

$$3A=\begin{pmatrix}6 & -12 & 6\\ 18 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

$$(3A)^t=\begin{pmatrix}6 & 18\\ -12 & 0\\ 6 & 6\end{pmatrix}$$

$$3A^t=3\begin{pmatrix}2 & 6\\ -4 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 18\\ -12 & 0\\ 6 & 6\end{pmatrix}=(3A)^t$$

3. $$A^{-1}=\frac{1}{23}\begin{pmatrix}21 & -61 & -3\\ -7 & 28 & 1\\ -19 & 53 & 6\end{pmatrix}$$

4. $$A=\begin{pmatrix}1 & k & k^2\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 9\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1}\begin{pmatrix}1 & k & k^2\\ 0 & 2-k & 4-k^2\\ 0 & 3-k & 9-k^2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3-\frac{3-k}{2-k}F_2}\begin{pmatrix}1 & k & k^2\\ 0 & 2-k & 4-k^2\\ 0 & 0 & \frac{(k+1)(9-k^2)}{2-k}\end{pmatrix}$$

La matriz tendrá una fila nula, y por tanto, tendrá rango 2 si $\frac{(k+1)(9-k^2)}{2-k}=0$

$(k-3)(k+1)(k+3)=0$

- Para $k=-1$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \text{rang}(A)=2$$

- Para $k=-3$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 9\\ 0 & 5 & -5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \text{rang}(A)=2$$

- Para $k=3$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 9\\ 0 & -1 & -5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \text{rang}(A)=2$$

Si observamos la matriz con detenimiento, vemos que también hay valores de k diferentes a los ya estudiados que pueden anular la segunda fila de la matriz. Planteamos el sistema $\begin{cases}2-k=0\\ 4-k^2=0\end{cases}$. El valor de k obtenido es $k=2$. Para este valor , el término $a_{33}=15/0$. Es decir aunque para $k=2$ F_2 es nula, F_3 no lo es.

Para $k\neq 2$; $k\neq -1$; $k\neq 3$ y $k\neq -3$ el rang $(A)=3$.

5. *a)* Calculamos el determinante de la matriz A:

$$|A|=\begin{vmatrix}x & -3\\ x+1 & x-7\end{vmatrix}=x(x-7)-(-3)(x+1)=$$
$$=x^2-7x+4x+3=$$
$$=x^2-3x+3$$

Si la matriz inversa no existe, implica que este determinante ha de ser 0. Por tanto:

$$x^2-3x+3=0$$
$$x=\frac{3\pm\sqrt{9-12}}{2}$$

Prohibida su reproducción

Puesto que no hay solución real, el determinante no se anula y la matriz es invertible para todos los números reales.

b) Sustituimos x = 2 y obtenemos la expresión:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el problema usando la matriz inversa:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -10 + 9 = -1$$

$$A^t = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la solución de la ecuación:

$$A\,x = b$$

$$A^{-1}A\,x = A^{-1}\,b$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

6. *a)* Podemos calcular M utilizando la matriz inversa de la matriz A:

$$M = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

También se puede resolver como un sistema de ecuaciones, poniendo $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Entonces,

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y = 1 \\ -3x + 2y = 3 \\ z + 2t = 2 \\ -3z + 2t = -2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -1/2 \\ y = 3/4 \\ z = 1 \\ t = 1/2 \end{array}\right.$$

b) Efectivamente, $M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$. Con ello, $M^n = \begin{cases} M, & \text{si n es impar} \\ I_2, & \text{si n es par} \end{cases}$.

7. *a)* Triangulamos la matriz ampliada A′:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & -5 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Vemos que en la tercera fila de la matriz ya hay aislada una incógnita, por lo que ya podemos resolver el sistema.

$$x = \frac{7}{9},\ \ y = \frac{-1}{6}\ \ \text{y}\ \ z = \frac{7}{18}$$

b) Triangulamos la matriz ampliada A′:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Vemos que en la segunda fila de la matriz ya hay aislada una incógnita, por lo que ya podemos resolver el sistema.

$x = 2,\ \ y = -1\ \ \text{y}\ \ z = 4$

8. *a)* Escribimos el sistema matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que la matriz de coeficientes, A, es regular ($|A| \neq 0$) y escribimos su inversa.

$$|A| = 7;\ \ A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 9 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 14 & 7 & -7 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema por el método de la matriz inversa:

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 9 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 14 & 7 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 15 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema es: $x = \frac{15}{7}$, $y = -\frac{3}{7}$ y $z = 0$.

b) Escribimos el sistema matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Prohibida su reproducción

Comprobamos que la matriz de coeficientes A es regular ($|A| \neq 0$) y escribimos su inversa:

$$|A| = -2;\ A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema por el método de la matriz inversa:

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema es $x = 1$, $y = -1$ y $z = 2$.

9. *a)* Las matrices asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 3t+16 & 2t-28 & -3t-26 \\ -19 & 14 & -5 \\ 30 & -14 & 23 \end{pmatrix}$$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3t+16 & 2t-28 & -3t-26 & -40 \\ -19 & 14 & -5 & -12 \\ 30 & -14 & 23 & 44 \end{array}\right)$$

Calculamos el rango de las matrices mediante determinantes, e imponemos que el determinante de A se anule.

$$|A| = 358t = 0,\quad t = 0$$

- Para $t = 0$, $|A| = 0$ y $|A'| = 0$ Por lo que rang (A) = rang (A′) = 2. El sistema es compatible indeterminado. Lo solucionamos mediante el método de Cramer, y los resultados obtenidos son:

$$x = \frac{32}{11} - \frac{18t}{11};\ y = \frac{34}{11} - \frac{41t}{22};\ z = t$$

- Para $t \neq 0$, $|A| \neq 0$ y $|A'| \neq 0$ por lo que rang (A) = rang(A′) = 3 y coincide con el número de incógnitas, por lo tanto, el sistema es compatible determinado, con una única solución. Lo resolvemos por el método de Cramer y obtenemos que los resultados son:

$$x = \frac{208}{55};\ y = \frac{36}{11};\ z = \frac{328t+48}{55}$$

b) Las matrices asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3t & 1 \\ 4 & 6 & 2t \\ 6t & 9 & 3t \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3t & 1 & t \\ 4 & 6 & 2t & 2t \\ 6t & 9 & 3t & 3t \end{array}\right)$$

Calculamos el rango de las matrices mediante determinantes, e imponemos que el determinante de A se anule.

$$|A| = (t-1)^2(t+1) = 0,\ t_1 = 1 \text{ y } t_2 = -1$$

- Para $t_1 = 1$

  No hay ningún menor 2 × 2 de A cuyo determinante sea diferente de 0, por lo tanto el rang (A) = 1

  Tampoco hay menores 3 × 3 ni 2 × 2 de A′ que tengan un determinante no nulo, de manera que rang (A′) = 1.

  Los rangos de las dos matrices son idénticos y menores que el número de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado dependiente de dos parámetros. La solución obtenida es:

$$z = \mu;\ y = \tau,\qquad x = \frac{1-\mu-3\tau}{2}$$

- Para $t_2 = -1$

  El rang (A) = 2 ya que hay al menos un menor 2 × 2 de A cuyo determinante es no nulo.

  El rang(A′) = 3 ya que hay al menos un menor 3 × 3 de A′ cuyo determinante es no nulo.

  Podemos decir que el sistema es incompatible y, por lo tanto, que no tiene solución.

- Para $t \neq 1$ y $t \neq -1$

  rang (A) = rang (A′) = 3 y es igual al número de incógnitas del sistema, por lo que el sistema es compatible determinado, es decir, con una única solución.

  La hallamos resolviendo el sistema por Cramer. La solución obtenida es:

$$x = 0;\ y = \frac{12t}{t+1};\ z = \frac{36t}{t+1}$$

Prohibida su reproducción

10. El sistema será indeterminado cuando, siendo compatible, rang(M) < 3 (3 = número de incógnitas y M, la matriz de coeficientes). Para que ocurra esto se requiere que det(M) = 0. Calculamos, por tanto, los valores de m que anulan el determinante de M:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \\ 0 & m & -5 \end{vmatrix} = 0;\ 10m - 50 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = \frac{50}{10} = 5$$

Tal como acabamos de comprobar, sólo existe un valor de m que anula el determinante. Si el sistema es compatible para m = 5, será indeterminado.

Transformando M′ obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x - 3y + 2z = 2 \\ 3x + y - 4z = 6 \\ 5y - 5z = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Este resultado indica que rang(M) = 2 = rang(M′). Por tanto, para m = 5 tenemos un sistema compatible indeterminado (S.C.I.).

La última matriz obtenida equivale al sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x - z = 2 \\ y - z = 0 \end{array}\right\}$$

Sustituyendo z por λ obtenemos la solución general:

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

11. Lo primero que deberemos hacer es examinar los valores de k que anulan det (M), siendo M la matriz de coeficientes:

$$|M| = \begin{vmatrix} 2k & 2k - 3 \\ 4 & k - 1 \end{vmatrix} = 0,\ 2k^2 - 10k + 12 = 0$$

$$k = \frac{10 \pm \sqrt{4}}{4} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

A partir de este resultado ya podemos asegurar que para k ≠ 2 y k ≠ 3 el rango de M es 2. Como el rango de la matriz ampliada, M′, no puede ser más que 2, para k ≠ 2 y k ≠ 3 el sistema es compatible determinado (S.C.D.).

Estudiemos qué sucede para k = 2 y k = 3.

Para k = 2 la matriz M′ se puede transformar:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Observa que: $\begin{cases} \text{rang}(M) = 1 = \text{rang}(M') \\ \text{n.º de incógnitas} - \text{rang}(M) = 1 \end{cases}$

Por tanto, para k = 2 el sistema será compatible indeterminado (S.C.I.) y sus soluciones dependerán de un parámetro.

Para k = 3 la matriz M′ se puede transformar:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - \frac{2}{3}F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} \end{array}\right)$$

Observa que rang(M) = 1 ≠ 2 = rang(M′).

Por tanto, para k = 3 el sistema será incompatible.

12. *a)* Las matrices asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix} \qquad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -6 & -1 \end{array}\right)$$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & -6 \end{vmatrix} = 6 + 8 + 4 -$$

$$-(4 - 12 - 4) = 30$$

Para hallar la solución, sustituimos la columna de la matriz A correspondiente a la incógnita por la columna de los términos independientes.

$$x = \frac{\Delta_1}{|A|} = \frac{38}{15}$$

$$y = \frac{\Delta_2}{|A|} = \frac{73}{15}$$

$$z = \frac{\Delta_3}{|A|} = \frac{1}{5}$$

Prohibida su reproducción

b) Resolvemos de la misma manera que el apartado anterior.

$$|A| = -75$$

$$x = \frac{\Delta_1}{|A|} = -\frac{118}{75}$$

$$y = \frac{\Delta_2}{|A|} = -75$$

$$z = \frac{\Delta_3}{|A|} = -\frac{13}{75}$$

13. *a)* Las matrices asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Calculamos el rango de las matrices mediante determinantes y observamos que rang(A) = rang(A′) = 3 y coincide con el número de incógnitas, de manera que el sistema es compatible y determinado. Calculamos la solución mediante el método de Cramer, y obtenemos que $x = 0$, $y = -1$, $z = 1$.

b) Las matrices asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ -1 & -6 & 8 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & -6 & 8 & 1 \end{array}\right)$$

Calculamos el rango de las matrices mediante determinantes y observamos que rang(A) = rang(A′) = 3 y coincide con el número de incógnitas, de manera que el sistema es compatible y determinado.
Calculamos la solución mediante el método de Cramer, y obtenemos que $x = 0$, $y = -\frac{3}{10}$, $z = -\frac{1}{10}$.

c) Las matrices asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 6 \\ 5 & 7 & 5 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 6 & 3 \\ 5 & 7 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

Calculamos el rango de las matrices mediante determinantes y observamos que rang(A) = rang(A′) = 2 que es menor que el número de incógnitas, de manera que el sistema es compatible e indeterminado. Calculamos la solución mediante el método de Cramer, y obtenemos que:

$$x = \frac{2}{3} - t; \;\; y = -\frac{1}{3}; \;\; z = t$$

d) Las matrices asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Calculamos el rango de las matrices mediante determinantes y observamos que rang(A) = 2 ⇒ rang(A′) = 3. Por lo tanto, el sistema es incompatible y no tiene solución.

e) Las matrices asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Calculamos el rango de las matrices mediante determinantes y observamos que rang(A) = rang(A′) = 3 y coincide con el número de incógnitas, de manera que el sistema es compatible y determinado. Calculamos la solución mediante el método de Cramer, y obtenemos que $x = -1$, $y = -\frac{1}{2}$, $z = \frac{7}{2}$.

14. La matriz A asociada al sistema y su ampliada A′ serán:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ k & k & 1 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix} \qquad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & k \\ k & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & k \end{array}\right)$$

El determinante de la matriz A es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ k & k & 1 \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix} = k + k^3 + 1 - k^2 - k - k =$$

$$= k^3 - k^2 - k + 1 = (k-1)^2(k+1)$$

Si $k = 1$, el rango de A y A′ es 1, y por lo tanto el sistema es, evidentemente compatible indeterminado, pues se reduce a una única ecuación.

Si $k = -1$, el rango de A y A′ es 2, y por lo tanto el sistema es también compatible indeterminado.

Si $k \neq 1$ y $k \neq -1$, el sistema es compatible determinado según el teorema de Rouché-Frobenius porque el rango de A y A′ es 3, que es el número de incógnitas. Lo resolvemos mediante la regla de Cramer:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ k & k & 1 \\ 1 & k & k \end{vmatrix} = k^2 + 1 + k^3 - k^2 - k - k^2 =$$

$$= k^3 - k^2 - k + 1 = (k-1)^2(k+1)$$

Prohibida su reproducción

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & k & k \\ k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix} = 1 + k^3 + k - k - k - k^2 =$$
$$= k^3 - k^2 - k + 1 = (k-1)^2(k+1)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} k & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & k & 1 \end{vmatrix} = k^2 + k + k^2 - k^3 - k^2 - 1 =$$
$$= -k^3 + k^2 + k - 1 = -(k-1)^2(k+1)$$

Por lo tanto:

$$x = \frac{\Delta_1}{|A|} = \frac{-(k-1)^2(k+1)}{(k-1)^2(k+1)} = -1 \to x = -1$$
$$y = \frac{\Delta_2}{|A|} = \frac{(k-1)^2(k+1)}{(k-1)^2(k+1)} = 1 \quad \to y = 1$$
$$z = \frac{\Delta_3}{|A|} = \frac{(k-1)^2(k+1)}{(k-1)^2(k+1)} = 1 \quad \to z = 1$$

Por lo tanto, cualquiera que sea el valor de k, distinto de 1 y de −1, ésta es la solución única al sistema.

15. Podemos confeccionar un esquema de los datos del problema en la siguiente tabla:

t inicial		t = 1 año		t = 3 años
EMP.	N.º CONC.	EMP.	N.º CONC.	
A	x	A	x	x − 5
B	y	D	w	w − 10
C	z = 50			

Esta organización de los datos indicados en el problema nos permite plantear las ecuaciones que cumplen las cantidades x, y, z y w:

$$\left.\begin{aligned} z &= 50 \\ y + z &= w \\ y &= \frac{2x}{3} \\ x - 5 + w - 10 &= 85 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x + w &= 100 \\ 2x - 3y &= 0 \\ y + z &= w \\ z &= 50 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x + w &= 100 \\ 2x - 3y &= 0 \\ y - w &= -50 \end{aligned}\right\}$$

Resolvemos este último sistema por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 100 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -50 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = 30$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 100 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -50 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = 20$$

$$w = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 100 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -50 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = 70$$

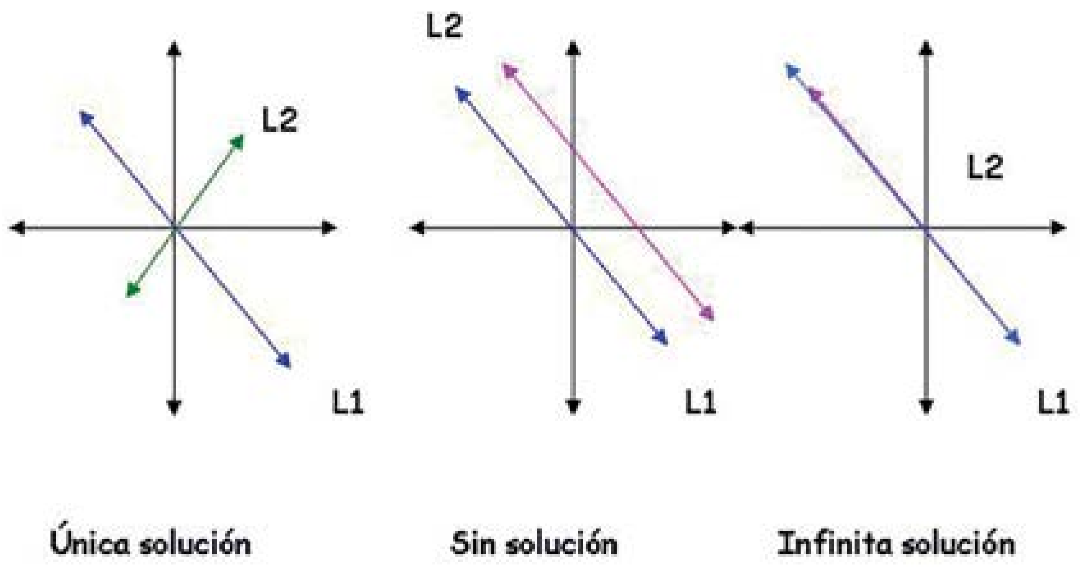
Por tanto, A ha gestionado 30 concesionarios; B, 20; C, 50 y D, 70.

Prohibida su reproducción

Nombre: ______________________ Fecha: ____________

Instructivo:

1. Para realizar efectivamente la actividad propuesta a continuación, el docente debe guiar al estudiante en la tabulación y diagramación de cada una de las ecuaciones lineales, de los sistemas correspondientes.
2. Usar diferentes colores para cada línea recta obtenida.
3. Una vez terminada la parte gráfica, debe explicarle visualmente e interpretar las soluciones de los sistemas de ecuaciones.



http://goo.gl/RWrdAn

Observación.- Luego el profesor puede plantearle al estudiante, a manera de complemento alguna situación práctica, en donde pueda aplicar sus conocimientos. Puede ser en una relación simple entre el crecimiento de una persona versus su edad, para que quede la seguridad de la interpretación adecuada acerca de la proporcionalidad. Con el objetivo de garantizar la destreza mínima que el estudiante debería obtener en estos temas.

Resuelve gráficamente los siguientes sistemas y clasifícalos según sus soluciones:

1. **Resuelve** gráficamente los siguientes sistemas y clasifícalos según sus soluciones:

a. $\left.\begin{array}{l} 2x^2 - 3y = 1 \\ 3x + 5y = 0 \end{array}\right\}$

b. $\left.\begin{array}{l} -5x + 2y = 3 \\ 5x - 2y = 8 \end{array}\right\}$

Prohibida su reproducción

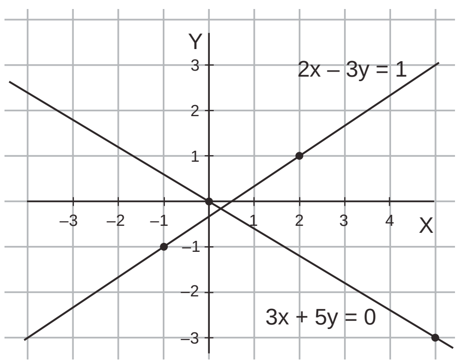
4. *a)* Representamos gráficamente las rectas a partir de los puntos de paso:

• Recta $2x - 3y = 1$:

x	−1	2
y	−1	1

• Recta $3x + 5y = 0$:

x	0	5
y	0	−3



Aunque el punto de corte no se aprecia de forma exacta, está claro que hay uno y es único, luego se trata de un sistema compatible determinado.

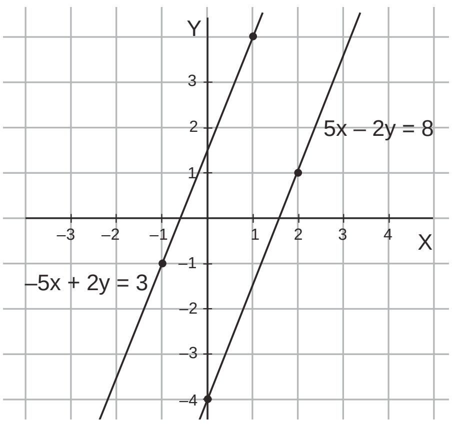
Representamos gráficamente las rectas a partir de los puntos de paso:

• Recta $-5x + 2y = 3$:

x	−1	1
y	−1	4

• Recta $5x - 2y = 8$:

x	0	2
y	−4	1



Se trata de dos rectas paralelas, lo que significa que el sistema no tiene solución; luego es un sistema incompatible.

Prohibida su reproducción

RESUMEN

Matrices

Matriz de dimensión m $\times$ n: conjunto de m $\times$ n elementos dispuestos en m filas y n columnas. Se representa:

$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$, o bien, $A = (a_{ij})$; a_{ij}, elemento de la fila i y la columna j

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij} \quad \forall\, i, j$$

Matriz cuadrada: dimensión n $\times$ n. Elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$: diagonal principal.

Matriz fila o vector fila: dimensión 1 $\times$ n.

Matriz columna o vector columna: dimensión m $\times$ 1.

Matriz diagonal: matriz cuadrada en la que todos los elementos situados fuera de la diagonal principal son 0.

Matriz escalonada: las filas nulas están en la parte inferior de la matriz; y en las filas no nulas, el primer elemento diferente de cero de una fila está situado más a la derecha que el primer elemento diferente de cero de la fila inmediatamente superior.

Matriz identidad, I: matriz n $\times$ n | $a_{ij} = 0$, si $i \ne j$, y $a_{ij} = 1$, si $i = j$.

Matriz nula: $a_{ij} = 0$, $\forall$ i, j.

Rango de una matriz A, rang (A): número de filas no nulas de una matriz escalonada equivalente a A.

Dos matrices son equivalentes si una de ellas se obtiene a partir de la otra mediante transformaciones elementales.

Suma: $A_{mn} + B_{mn} = C_{mn}$ con $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Producto por un número real: $k \cdot A_{mn} = C_{mn}$ con $c_{ij} = k \cdot a_{ij}$

Producto: $A_{mp} \cdot B_{pn} = C_{mn}$ con $c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} \cdot b_{jk}$

Matriz inversa, A^{-1}, de una matriz A: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Matriz traspuesta, A^t, de una matriz A: la que se obtiene intercambiando sus filas por sus columnas.

Determinantes

Determinante de una matriz cuadrada A, $|A|$, número asociado a A, definido de la siguiente manera:

Determinantes de orden uno: $|A| = |a_{11}| = a_{11}$

Determinantes de orden dos:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$$

Determinantes de orden tres:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{21}\,a_{32}\,a_{13} + a_{31}\,a_{12}\,a_{23} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{23}\,a_{32}\,a_{11} - a_{33}\,a_{12}\,a_{21}$$

Determinante de orden n: $|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\,M_{ij}$, donde M_{ij} (menor complementario de a_{ij}) es el determinante de la matriz de orden n – 1 que se obtiene al suprimir la fila y la columna correspondientes a a_{ij}.

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{Adj}(A^t)}{|A|}, \text{ donde } A_{ij} \text{ (adjunto del elemento } a_{ij}) = (-1)^{i+j}\,M_{ij}$$

Sistemas de ecuaciones lineales

Sistema de ecuaciones lineales: conjunto de ecuaciones lineales que deben verificarse simultáneamente.

Sistema de m ecuaciones con n incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\}$$

Solución: n-upla de números reales, $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, tal que verifican simultáneamente las ecuaciones.

Clasificación de sistemas según sus soluciones:

- Incompatible (sin solución)
- Compatible (con solución)
  - Determinado (solución única)
  - Indeterminado (infinitas soluciones)

Resolución por el **método de Gauss:** se halla un sistema escalonado equivalente al inicial y se resuelve mediante sustitución regresiva.

Notación matricial de un sistema: $A \cdot X = B$, donde $A = (a_{ij})$, $X = (x_j)$, $B = (b_i)$. Solución: $X = A^{-1} \cdot B$

Teorema de Rouché-Frobenius:

rang (A) $\ne$ rang (A′) $\iff$ sistema incompatible

rang (A) = rang (A′) = n $\iff$ sistema compatible determinado

rang (A) = rang (A′) < n $\iff$ sistema compatible indeterminado

Regla de Cramer:

$s_i = \dfrac{\Delta_i}{|A|}$ Δ_i: determinante de la matriz obtenida al sustituir la columna de la matriz A correspondiente a la incógnita i-ésima, por la columna de los términos independientes

Efectuar una deducción

1.º Ordenamos las premisas y las conectamos mediante conjunciones. Aplicándoles las leyes lógicas, debemos obtener la conclusión.

Si lo conseguimos, habremos demostrado que el razonamiento es formalmente válido.

2.º En líneas sucesivas colocamos el resultado de ir aplicando las leyes lógicas sobre las premisas. Junto a cada línea de la deducción anotamos la ley que se ha utilizado.

3.º Al llegar a la **conclusión** del razonamiento, la deducción estará completa.

Por ejemplo:

$[(p \Rightarrow \neg q) \wedge p \wedge (q \vee r)] \Rightarrow$

(*Modus ponens*)

$\Rightarrow [\neg q \wedge (q \vee r)] \Rightarrow$

(*Silogismo disyuntivo*)

$\Rightarrow \mathbf{r}$

Prohibida su reproducción

Algunas matrices reciben nombres especiales de acuerdo con su dimensión o sus elementos.

	Tipo de matriz	Ejemplo
Según su dimensión	**Matriz cuadrada** El número de filas coincide con el de columnas (dimensión $n \times n$). Se habla de matriz cuadrada de orden n. Los elementos $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ forman la diagonal principal.	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 9 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ Matriz cuadrada de orden 3 Los elementos 2, 2 y 6 forman la diagonal principal.
	Matriz fila Solo tiene una fila (dimensión $1 \times n$). También se le llama vector fila.	$(2\ 1\ 0)$ Matriz fila 1×3
	Matriz columna Sólo tiene una columna (dimensión $m \times 1$). También se le llama vector columna.	$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$ Matriz columna 3×1
Según su dimensión	**Matriz triangular (superior o inferior)** Matriz cuadrada en la que todos los elementos situados por debajo o situados por encima de la diagonal principal son 0.	$a_{ij} = 0, i > j$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ Matriz triangular superior $a_{ij} = 0, i < j$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 9 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ Matriz triangular inferior
	Matriz diagonal Matriz cuadrada en la que todos los elementos situados fuera de la diagonal principal son 0.	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$
	Matriz identidad Matriz diagonal en la que todos los elementos situados en la diagonal principal son 1. Se simboliza por la letra I.	$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
	Matriz nula Todos sus elementos son 0.	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Prohibida su reproducción

Prohibida su reproducción

CICLO DEL APRENDIZAJE

¿Cómo dinamizo el aula?

Experiencia

- Debatir en clase el fenómeno de la caida libre de los cuerpos, cerca de la superficie terrestre, para poner en contexto el concepto de incrementos o variaciones de velocidad, que luego serán aplicados en el dema de derivadas de funciones.
- Analizar un grafico en dónde se relacione la velocidad versus el tiempo transcurrido en la caida de los cuerpos.

Conceptualización

- Diferenciar los eventos constantes de los eventos donde existan variabilidades
- Comparar las definiciones de velocidad constante y aceleración, compararla con graficos de otras funciones constantes y otra con variaciones.

Reflexión

- Reflexionar acerca de la importancia de predecir eventos a partir de funciones, como modelos mátematicos.
- Identificar las relaciones entre las variables tratadas.

Aplicación

- Atravez de un gráfico la velocidad en función del tiempo, de cuerpo en caida libre.
- Reconocer los elementos (variables) involucradas en el gráfico y sus respectivas ecuaciones.
- Producir predicciones usando los modelos matemáticos estudiados.

Prohibida su reproducción

BANCO DE PREGUNTAS

1. Qué es una matriz?

   Es un arreglo rectangular de números reales dispuestos en filas y columnas

2. Cuáles son los nombres de las matrices más usadas?

   Cuadrada, fila, columna, triangular superior, triangular inferior, diagonal, identidad, nula

3. Cuáles son las operaciones básicas con matrices?

   Adición, multiplicación de una matriz por un escalar, multiplicación entre matrices

4. Cuál es la condición necesaria para multiplicar matrices?

   Que el número de columnas de la primera matriz, sea igual al número de filas de la segunda matriz

5. Qué es una matriz inversa?

   Es una matriz, que al multiplicarla por otra matriz, nos da como resultado una matriz identidad

6. Qué es una n-upla?

   Todo conjunto ordenado de n números

7. Qué son sistemas de ecuaciones lineales equivalentes?

   Son sistemas que tienen las mismas soluciones

8. Qué es un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas?

   Son conjuntos de inecuaciones lineales con dos incógnitas, que deben verificarse simultáneamente.

9. Quién publicó el algoritmo Simplex?

   George Dantzig

10. En qué consiste la programación lineal?

    Consiste en optimizar una función lineal, denominada función objetivo, sujeta a una serie de restricciones expresadas mediante inecuaciones lineales.

11. En programación lineal, cuáles son los pasos analíticos para la resolución de un problema de dos variables?

    - Resolver el sistema de inecuaciones formado por las restricciones para hallar la región factible.
    - Obtener los vértices de la región factible.
    - Calcular el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices para determinar en cuál de ellos toma el valor máximo o mínimo.

12. Qué es la investigación operativa, relacionada con la programación lineal?

    En general, la programación lineal se sitúa en el marco de la investigación operativa, unconjunto de técnicas racionales de análisis y de resolución de problemas, que tiene por objetoayudar a los responsables en las decisiones sobre asuntos en los que interviene un grannúmero de variables.

Prohibida su reproducción

La imagen como recurso didáctico

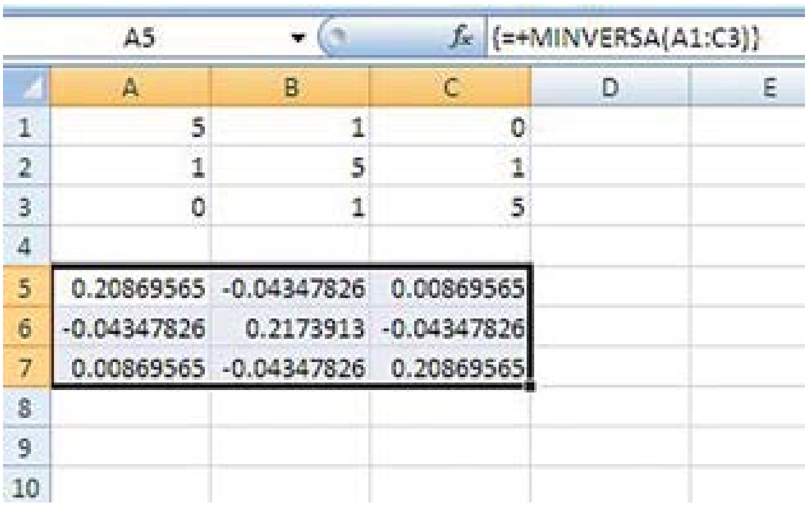
El uso de programas on-line para resolver sistemas de ecuaciones lineales, por medio de matrices, es un recurso óptimo en tiempo, cuando el estudiante tenga bases en os conceptos iniciales de resolución de sistemas de ecuaciones lineales. A uno de estos programas se puede acceder, mediante el siguiente enlace: http://www.resolvermatrices.com/

El uso de la calculadora científica como TIC, también es un recurso que el estudiante debe dominar.

El docente deberá plantear en algunas oportunidades, organizadores gráficos, sobre todo en el tipo de matrices y operaciones.

Como alternativa se puede usar el programa EXCEL, que brinda una muy buena operatividad en algunos de los problemas que se plantean en el texto.

Recomendamos al docente revisar las aplicaciones del algebra lineal en la computación, para que el estudiante se motive para adquirir las destrezas deseadas.


A5 | {=+MINVERSA(A1:C3)}

	A	B	C	D	E
1	5	1	0		
2	1	5	1		
3	0	1	5		
4					
5	0.20869565	-0.04347826	0.00869565		
6	-0.04347826	0.2173913	-0.04347826		
7	0.00869565	-0.04347826	0.20869565		
8					
9					
10					

Prohibida su reproducción

Página 84

Orientación didáctica

- Para anticipar posibles dificultades en los contenidos de la unidad, el profesor o profesora puede utilizar las siguientes propuestas: repasar los conceptos y las y propiedades de la ecuaciones lineales o también llamadas de primer grado.

  Se recomienda que el profesor o profesora resuelva varios ejemplos en la pizarra y solucione todas las dudas de los estudiantes.

  Es importante repasar los conceptos de desigualdades numéricas: "mayor que" y "menor que", así como también la representación de conjuntos de números reales por medio de intervalos, utilizando la gráfica de una recta.

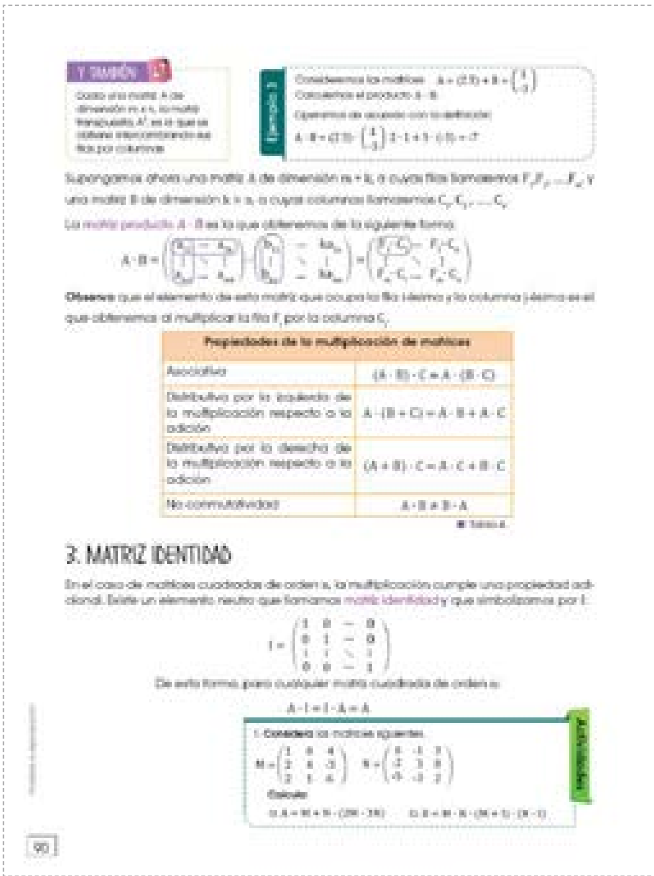
Propuestas:

- Dedicar el tiempo suficiente a explicar adecuadamente el concepto de Matrices como representación abreviada de sistemas de ecuaciones lineales.

  Preguntar a menudo a los estudiantes si tienen dudas en el momento de explicar las diferentes características en los gráficos de las matrices estudiadas. Es conveniente ejercitar las operaciones con matrices, para adquirir las destrezas deseadas.

Prohibida su reproducción

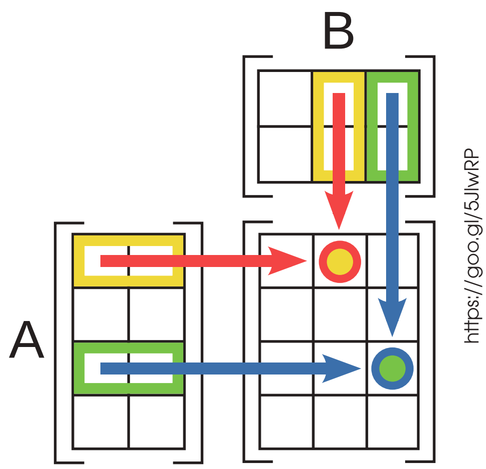
Página 90



Orientación didáctica

- Este gráfico resulta de utilidad en la operación de multiplicación de matrices:

  Los resultados en las posiciones marcadas dependen de las filas y columnas de sus respectivos colores.



Solucionario

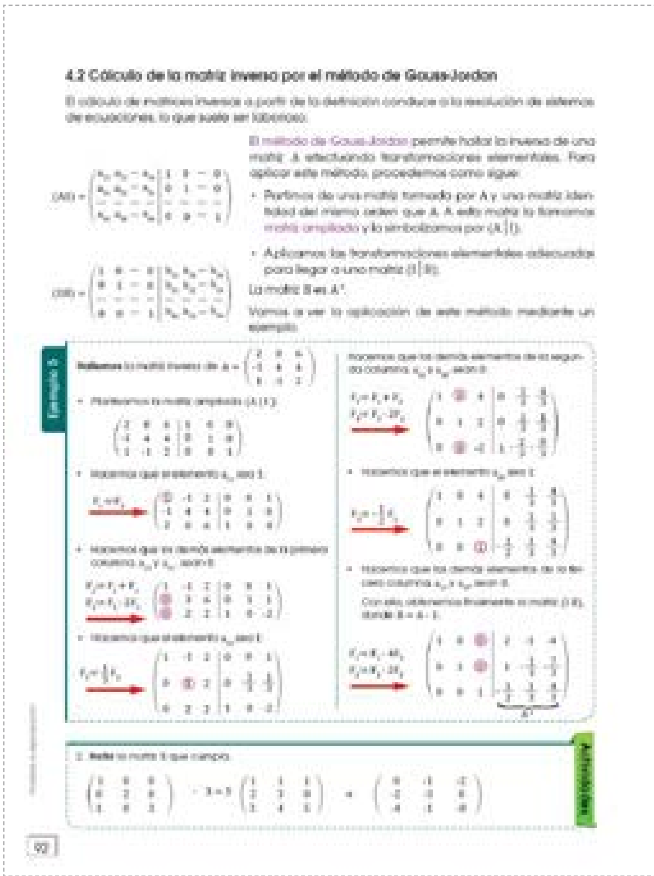
1.

a. $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 8 \\ -10 & 8 & 3 \\ 8 & -13 & 2 \end{pmatrix}$

b. $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

Prohibida su reproducción

Página 92


4.2 Cálculo de la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan

Orientación didáctica

- Una forma alternativa de hallar la matriz inversa, es el método de determinantes, en el siguiente enlace puedes observar la parte teórica en la cual se basa este método y un ejemplo.

Matriz inversa

- Cálculo de la matriz inversa usando determinantes
- Dada una matriz cuadrada A, se llama matriz adjunta de A, y se representa por $\mathrm{Adj}(A)$, a la matriz de los adjuntos, $\mathrm{Adj}(A) = (Aij)$.
- Si tenemos una matriz tal que $\det(A) <> 0$, se verifica:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot [\mathrm{Adj}(A)]^{t}$$

- Esto es fácil probarlo puesto que sabemos que la suma de los productos de los elementos de una fila por sus adjuntos es el valor del determinante, y que la suma de los productos de los elementos de una fila por los adjuntos de otra fila diferente es 0 (esto sería el desarrollo de un determinante que tiene dos filas iguales por los adjuntos de una de ellas).

Al final puedes obtener matrices inversas on-line

http://goo.gl/Bbyv86

Solucionario

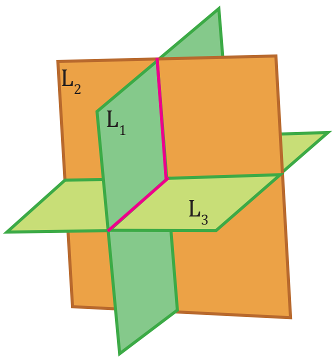
2. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ \frac{2}{3} & 3 & 2 \end{pmatrix}$

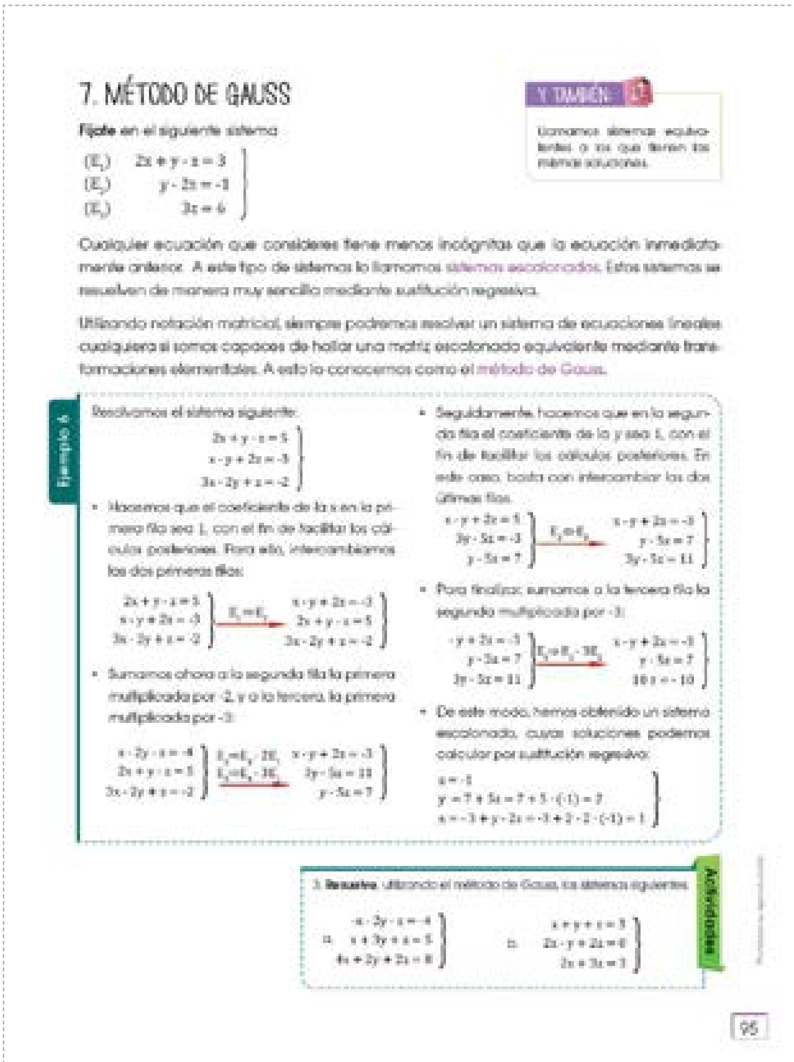
Prohibida su reproducción

Página 95

Orientación didáctica

- El docente puede aprovechar la exposición de este tema, como eje transversal, relacionándolo con la geometría en el espacio, tratando a cada ecuación lineal de 3 incógnitas, como un plano en el espacio y visualizar las soluciones como la intersección de 3 planos.





7. MÉTODO DE GAUSS

Fíjate en el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{lr} (E_1) & 2x+y-z=3 \\ (E_2) & y-2z=-1 \\ (E_3) & 3z=6 \end{array}\right\}$$

Cualquier ecuación que consideres tiene menos incógnitas que la ecuación inmediatamente anterior. A este tipo de sistemas lo llamamos sistemas escalonados. Estos sistemas se resuelven de manera muy sencilla mediante sustitución regresiva.

Utilizando notación matricial, siempre podremos resolver un sistema de ecuaciones lineales cualquiera si somos capaces de hallar una matriz escalonada equivalente mediante transformaciones elementales. A esto lo conocemos como el método de Gauss.

Y TAMBIÉN:

Llamamos sistemas equivalentes a los que tienen las mismas soluciones.

Ejemplo 6

Resolvamos el sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y-z=5 \\ x-y+2z=-3 \\ 3x-2y+z=-2 \end{array}\right\}$$

- Hacemos que el coeficiente de la x en la primera fila sea 1, con el fin de facilitar los cálculos posteriores. Para ello, intercambiamos las dos primeras filas:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y-z=5 \\ x-y+2z=-3 \\ 3x-2y+z=-2 \end{array}\right\} \xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_2} \left.\begin{array}{r} x-y+2z=-3 \\ 2x+y-z=5 \\ 3x-2y+z=-2 \end{array}\right\}$$

- Sumamos ahora a la segunda fila la primera multiplicada por -2, y a la tercera, la primera multiplicada por -3:

$$\left.\begin{array}{r} x-y+2z=-3 \\ 2x+y-z=5 \\ 3x-2y+z=-2 \end{array}\right\} \xrightarrow[E_3=E_3-3E_1]{E_2=E_2-2E_1} \left.\begin{array}{r} x-y+2z=-3 \\ 3y-5z=11 \\ y-5z=7 \end{array}\right\}$$

- Seguidamente, hacemos que en la segunda fila el coeficiente de la y sea 1, con el fin de facilitar los cálculos posteriores. En este caso, basta con intercambiar las dos últimas filas.

$$\left.\begin{array}{r} x-y+2z=-3 \\ 3y-5z=11 \\ y-5z=7 \end{array}\right\} \xrightarrow{E_2 \leftrightarrow E_3} \left.\begin{array}{r} x-y+2z=-3 \\ y-5z=7 \\ 3y-5z=11 \end{array}\right\}$$

- Para finalizar, sumamos a la tercera fila la segunda multiplicada por -3:

$$\left.\begin{array}{r} x-y+2z=-3 \\ y-5z=7 \\ 3y-5z=11 \end{array}\right\} \xrightarrow{E_3=E_3-3E_2} \left.\begin{array}{r} x-y+2z=-3 \\ y-5z=7 \\ 10z=-10 \end{array}\right\}$$

- De este modo, hemos obtenido un sistema escalonado, cuyas soluciones podemos calcular por sustitución regresiva:

$$\left.\begin{array}{l} z=-1 \\ y=7+5z=7+5\cdot(-1)=2 \\ x=-3+y-2z=-3+2-2\cdot(-1)=1 \end{array}\right\}$$

Actividades

3. **Resuelve**, utilizando el método de Gauss, los sistemas siguientes:

a. $\left.\begin{array}{r} -x-2y-z=-4 \\ x+3y+z=5 \\ 4x+2y+2z=8 \end{array}\right\}$ b. $\left.\begin{array}{r} x+y+z=3 \\ 2x-y+2z=0 \\ 2x+3z=3 \end{array}\right\}$

95

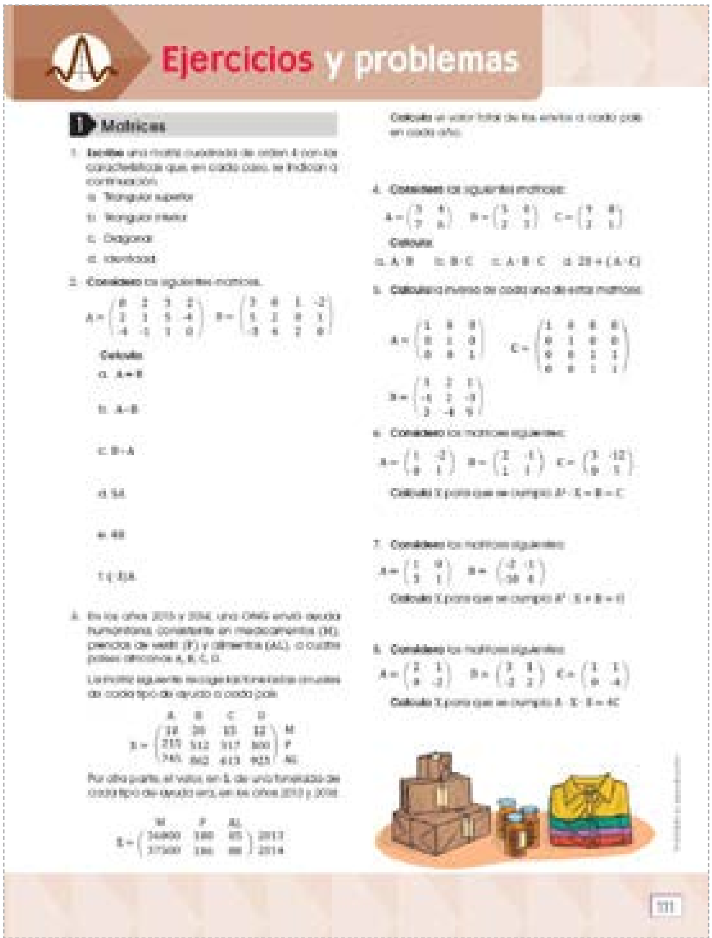
Solucionario

a. $x=1, y=1, z=1$

b. $x=0, y=2, z=1$

Prohibida su reproducción

Página 111


Ejercicios y problemas

Matrices

Solucionario

1. Descriptivo, soluciones múltiples

2.

a. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 7 & 3 & 5 & -3 \\ -7 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 & 4 \\ -3 & -1 & 5 & -5 \\ -1 & -5 & -1 & -5 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & -5 & 5 \\ 1 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 0 & 10 & 15 & 10 \\ 10 & 5 & 25 & -20 \\ -20 & -5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 12 & 0 & 4 & -8 \\ 20 & 8 & 0 & 4 \\ -12 & 16 & 8 & 20 \end{pmatrix}$

f. $\begin{pmatrix} 0 & -6 & -9 & -6 \\ -6 & -3 & -15 & 12 \\ 12 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

3.

$$\begin{pmatrix} 462025 & 1245430 & 649165 & 564455 \\ 480550 & 1296088 & 675406 & 587024 \end{pmatrix}$$

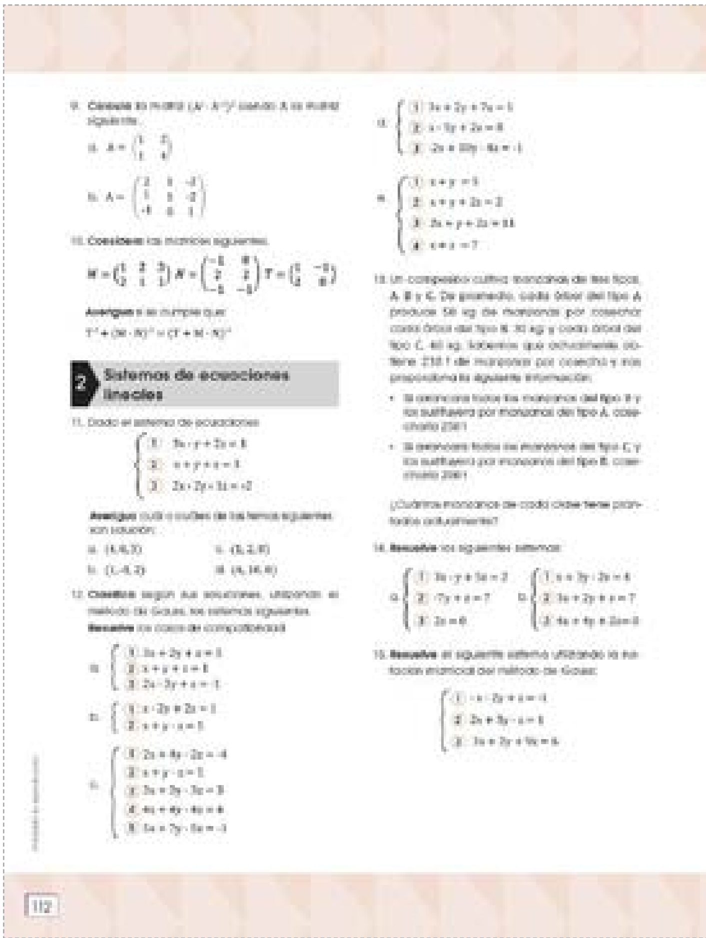
6. $x = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

7. $x = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

8. $x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Prohibida su reproducción

Página 112


Sistemas de ecuaciones lineales

112

Solucionario

9. a. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

10. Demostración

11. c. $(1, 2, 0)$

12.

a. $x = \frac{2}{3}, y = \frac{2}{3}, z = -\frac{1}{3}$

b. $x = 1, y = \lambda, z = \lambda$

c. $x = 4 + \lambda, y = -3, z = \lambda$

d. $x = -\frac{31}{13}\lambda - \frac{11}{13},$

$y = -\frac{\lambda}{13} - \frac{23}{13},$

$z = \lambda$

e. incompatible

13. 1600 tipo A, 1000 tipo B, 3000 tipo C

Prohibida su reproducción

Página 113

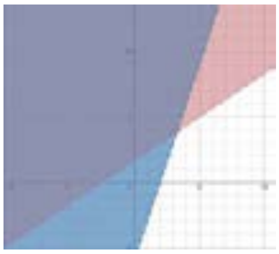
Solucionario

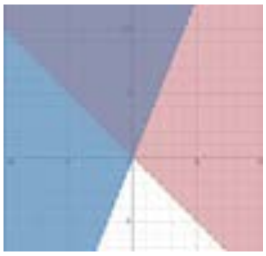
16. Gel: $1.4, Crema: $1.1, Suavizante: $1.25

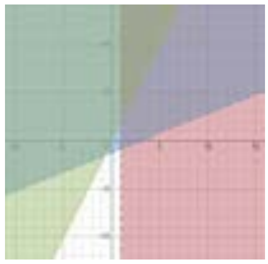
17. $A = 60000,\ B = 20000,\ C = 80000$

18. b. (-2,-1)

19.

a. 

b. 

c. 

20. El máximo está en el punto (4, 2) y su valor es 14

21. Segmento de extremos (0,5) y (5, 0)

22. Coste máximo: $140, 2 000A y 1 000 B; coste mínimo: $40, 0A y 1 000 B

23. 375 Gekkos y 250 Hayates

Prohibida su reproducción

Orientación didáctica

- Para comprobar algunas soluciones de sistemas de ecuaciones con varias incógnita, el docente puede acceder a la siguiente dirección web:

  http://goo.gl/eHFovc

Solucionario

1. $AB = \begin{pmatrix} -13 & 30 & 14 & 19 \\ -48 & 47 & -5 & -1 \\ -56 & 12 & -26 & -29 \end{pmatrix}$

   $, \textit{No es posible},$

   $\begin{pmatrix} 91 \\ -132 \\ -323 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ -31 \end{pmatrix}, \textit{No es posible},$

   $\begin{pmatrix} -18 & 7 & -20 & 25 \end{pmatrix}, \textit{No es posible}$

2. $x = 300, y = 200, z = 100$

3. 2A, 1B, 7C

4. \$600 000 en Áurea y \$400 000 en Argentia

5. a. No tiene solución

   b. $x = 2 ; y = 2 ; z = -5$

   c. No tiene solución

   d. $X = -\frac{19}{18}$

   $Y = -\frac{20}{9}$

   $Z = 0$

Página 114

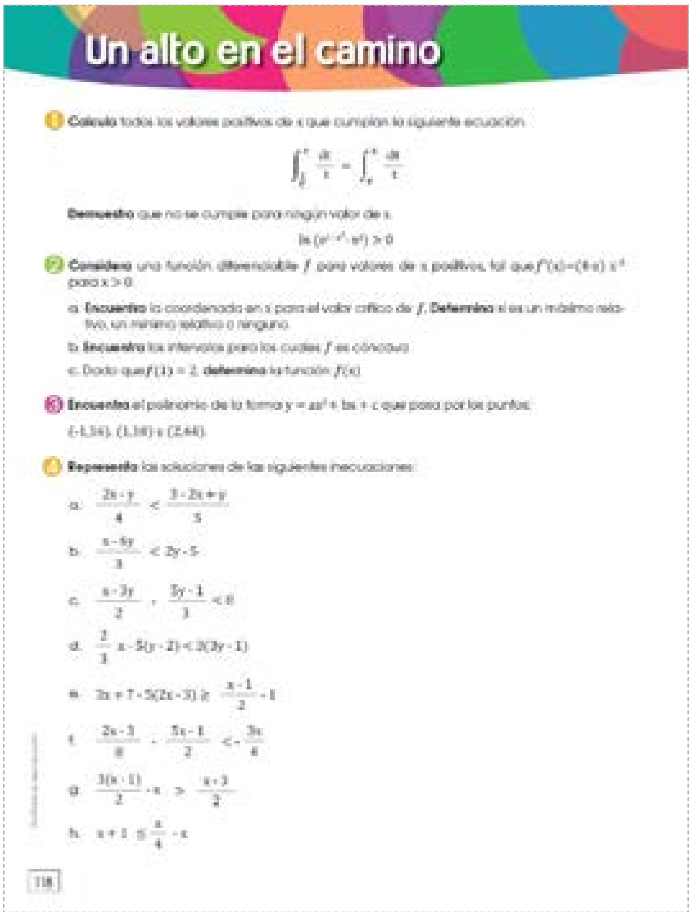

Para finalizar

AUTOEVALUACIÓN

114

Prohibida su reproducción

Página 118


Un alto en el camino

1. **Calcula** todos los valores positivos de x que cumplan la siguiente ecuación.

Demuestra que no se cumple para ningún valor de x.

2. **Considera** una función diferenciable f para valores de x positivos, tal que $f'(x)=(4-x)\,x^{-3}$ para $x > 0$.

a. **Encuentra** la coordenada en x para el valor crítico de f. **Determina** si es un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguno.

b. **Encuentra** los intervalos para los cuales f es cóncava.

c. Dado que $f(1) = 2$, **determina** la función $f(x)$.

3. **Encuentra** el polinomio de la forma $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos:

(-1,34), (1,38) y (2,44).

4. **Representa** las soluciones de las siguientes inecuaciones:

a. $\frac{2x-y}{4} < \frac{3-2x+y}{5}$

b. $\frac{x-6y}{3} < 2y-5$

c. $\frac{x-3y}{2} + \frac{5y-1}{3} < 0$

d. $\frac{2}{3}x - 5(y-2) < 3(3y-1)$

e. $2x + 7 - 5(2x-3) \geq \frac{x-1}{2} - 1$

f. $\frac{2x-3}{8} - \frac{5x-1}{2} < -\frac{3x}{4}$

g. $\frac{3(x-1)}{2} - x > \frac{x+3}{2}$

h. $x + 1 \leq \frac{x}{4} - x$

118

Solucionario

1. Demostración

2.
   a. x=4, max
   b. $(0, 6)$
   c. $\dfrac{x-2}{x^2} + 3$

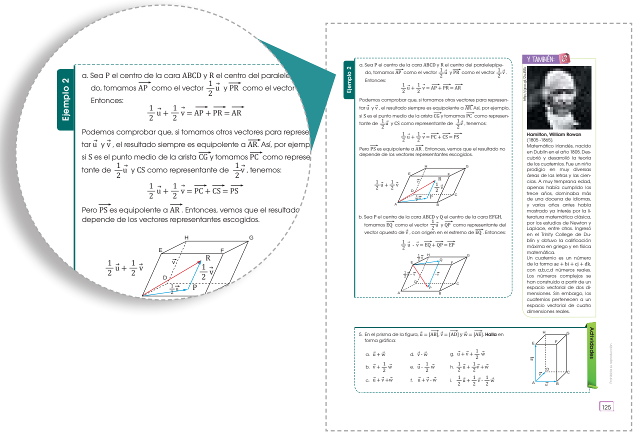
3. $y = \dfrac{37}{3}x^2 - 3x + \dfrac{2}{3}$

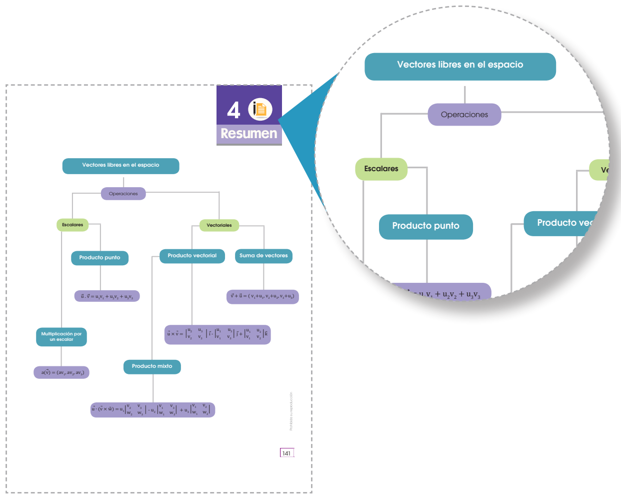
6.
   a. F
   b. F
   c. V
   d. F
   e. V
   f. F
   g. V
   h. V
   i. F

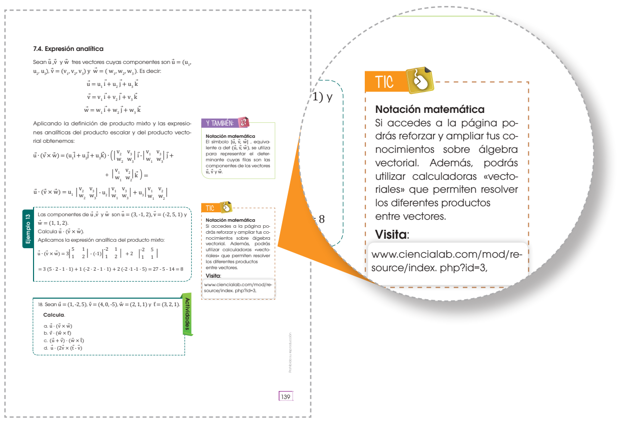
7. f es continua por la derecha en $x = a$

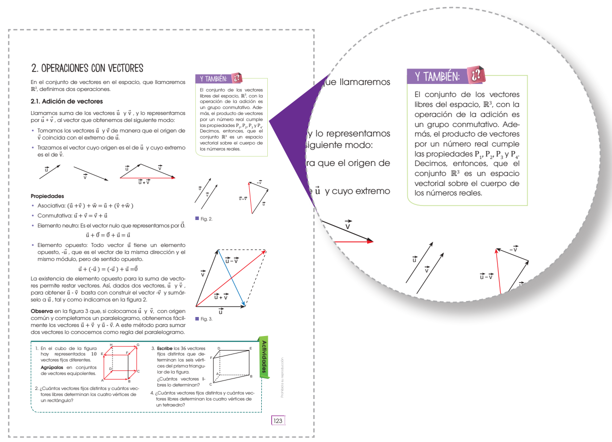
Prohibida su reproducción

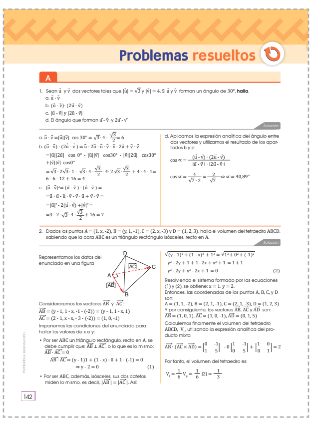
Vectores

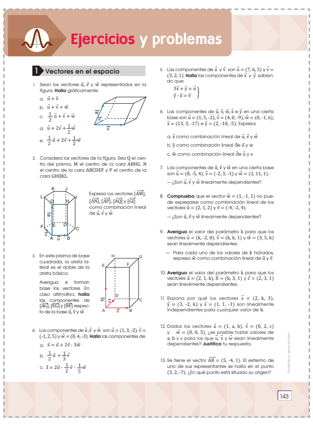


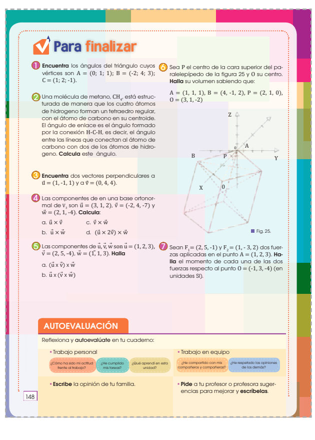


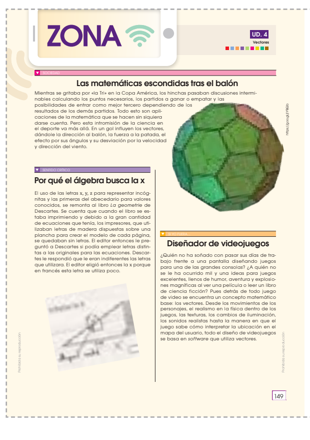












Prohibida su reproducción

UNIDAD 4


4 Vectores en el espacio

CONTENIDOS:

http://goo.gl/BQeEns

Libro:

Planilandia: Una novela de muchas dimensiones es una novela corta escrita por Edwin Abbott en 1884. En esta obra se realiza una sátira de la jerarquía social haciendo uso de un mundo y figuras en dos dimensiones. ¿Conoces alguna otra obra que se desarrolle en dos dimensiones?

EN CONTEXTO:

Para localizar un objeto en el espacio, es necesario situarlo en un sistema de referencia. De igual manera que con vvel plano, los vectores de tres dimensiones constituyen un recurso para posicionar objetos en el espacio.

Un satélite es cualquier objeto que orbita alrededor de otro, que se denomina principal. Los satélites artificiales son naves espaciales fabricadas en la Tierra y enviadas en un vehículo de lanzamiento, un tipo de cohete que envía una carga útil al espacio exterior. Los satélites artificiales pueden orbitar alrededor de lunas, cometas, asteroides, planetas, estrellas o incluso galaxias. Tras su vida útil, los satélites artificiales pueden quedar orbitando como basura espacial. Estos artefactos son muy útiles para el hombre moderno, son los protagonistas principales de las comunicaciones en el mundo; gracias a ellos, recibimos señales de televisión, de radio y teléfono, o tenemos información valiosa del clima, de nuestro medio ambiente y del espacio.

Salas, Leslie. (2011.10.25). Los satélites espaciales. El espacio sideral. *Extraído el 1 de septiembre de 2015 desde la página web: http://leslie-salas.blogspot.com.*

Prohibida su reproducción

Ejes temáticos	Contenidos	
Vectores (120 - 149)	1. Vectores	1.1. Equipolencia de vectores 1.2. Vectores libres
	2. Operaciones con vectores	2.1. Adición de vectores 2.2. Multiplicación por un número real
	3. El espacio vectorial R3	3.1. Tipos de megalitos
	4. Componentes	4.1. Operaciones con componentes 4.2. Componentes de un vector determinado por dos puntos 4.3. Punto medio de un segmento
	5. Producto escalar	5.1. Definición 5.2. Propiedades del producto escalar 5.3. Expresión analítica del producto escalar 5.4. Aplicaciones
	6. Producto vectorial	6.1. Definición 6.2. Propiedades 6.3. Expresión analítica 6.4. Aplicaciones
	7. Producto mixto	7.1. Definición 7.2. Propiedades del producto mixto 7.3. Interpretación geométrica 7.4. Expresión analítica 7.5. Aplicaciones del producto mixto

Prohibida su reproducción

Prohibida su reproducción

Objetivo del área por subnivel

O.M.5.4. Valorar el empleo de las TIC para realizar cálculos y resolver, de manera razonada y crítica, problemas de la realidad nacional, argumentando la pertinencia de los métodos utilizados y juzgando la validez de los resultados.

Objetivo integrador del área por subnivel

OI.5.4. Reflexionar sobre los procesos de transformación social, los modelos económicos, la influencia de la diversidad de pensamiento, los aportes tecnológicos, económicos y científicos de diferentes culturas, y su impacto en el desarrollo de un plan de vida basado en El respeto a la diversidad.

OI.5.9. Asumir su responsabilidad en la construcción de una sociedad equitativa a partir del reconocimiento de la igualdad natural de los seres humanos, del enfoque de derechos y de los mecanismos de participación democrática.

<table>
<tr><th>Logo Institucional</th><th colspan="4">Nombre de la institución</th><th colspan="3">Año lectivo</th></tr>
<tr><td colspan="8">Plan de unidad temática</td></tr>
<tr><td colspan="8">1. Datos informativos:</td></tr>
<tr><td>Docente:</td><td>Nombre del docente que ingresa la información</td><td>Área/asignatura:</td><td>Matemática</td><td>Grado/Curso:</td><td>3° bachillerato</td><td>Paralelo:</td><td></td></tr>
<tr><td>N.º de unidad de planificación:</td><td>4</td><td>Título de unidad de planificación:</td><td>VECTORES EN EL ESPACIO</td><td colspan="2">Objetivos específicos de la unidad de planificación:</td><td colspan="2">Producir, comunicar y generalizar información de manera escrita, verbal, simbólica, gráfica y/o tecnológica mediante la aplicación de conocimientos matemáticos y el manejo organizado, responsable y honesto de las fuentes de datos para comprender otras disciplinas, entender las necesidades y potencialidades de nuestro país y tomar decisiones con responsabilidad social.
Valorar el empleo de las TIC para realizar cálculos y resolver, de manera razonada y crítica, problemas de la realidad nacional, argumentado la pertinencia de los métodos utilizados y juzgando la validez de los resultados.</td></tr>
<tr><td>Períodos</td><td colspan="2">18</td><td colspan="2"></td><td>Semana de Inicio:</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="8">2. Planificación</td></tr>
</table>

Destrezas con criterios de desempeño a ser desarrolladas:			Criterios de evaluación
• Realizar las operaciones de adición entre elementos de R y de producto por un número escalar de manera geométrica y analítica aplicando Propiedades de los números reales y reconocer a los vectores como elementos geométricos de R33 • Calcular el producto escalar entre dos vectores y la norma de un vector para determinar distancia entre dos puntos A y B en R como la norma del vector AB . • Escribir y reconocer la ecuación vectorial y paramétrica de una recta a partir de un punto de la recta y un3 vector dirección o a partir de dos puntos de la recta y graficarlas en R Determinar la ecuación vectorial de un plano a partir de un punto del plano y dos vectores dirección; a partir3 de tres puntos del plano; a partir de una recta contenida en el plano y un punto. • Determinar la ecuación de la recta formada como intersección de dos planos como solución del sistema de ecuaciones planteado por las ecuaciones de los planos. • Determinar si dos planos son paralelos (cuando no hay solución) o perpendiculares (si los vectores normales a los planos son perpendiculares) para resolver aplicaciones geométricas en R3→			CE.M.5.6. Emplea vectores geométricos en el plano y operaciones en R, con aplicaciones en física y en la ecuación de la rmétodos gráficos, analíticos y tecnológicos.
Actividades de aprendizaje	Recursos	Indicadores de logro	Técnicas e instrumentos de evaluación
• Debatir la necesidad que tienen los ingenieros aeroespaciales, en saber la posiciónde un satélite en el espacio en un tiempo determinado. • De esta forma cuando usamos por ejemplo Google maps, estamos usando parte del compendio de esta unidad. • Diferenciar los conceptos de magnitud escalar y magnitud vectorial. • Comparar las definiciones de espacio bidimensional y espacio tridimensional. • Usar un sistema de referenciatridimensional para ubicar una partícula en el espacio. • Reflexionar acerca de la importancia de estos conocimientos en las apps actuales como TIC que usan para su funcionamiento el sistema GPS. • Usar el producto escalar y el producto vectorial en la resolución de problemas físicos, como los planteados en el texto. • Producir predicciones usando los modelos matemáticos estudiados.	- Texto - Cuaderno - Videos (sitios web) - Pizarra - Calculadora	I.M.5.6.1. Grafica vectores en el plano; halla su módulo y realiza opersuma, resta y producto por un escalar; resuelve problemas aplicados a la Geometría y a la Física. (I.2.) I.M.5.6.2. Realiza operaciones en el espacio vectorial R; calcula la distre dos puntos, el módulo y la dirección de un vector; reconoce cuando dos vtores son ortogonales; y aplica este conocimiento en problemas fisicen las TIC. (I.3.) I.M.5.6.3. Determina la ecuación de la recta de forma vectorial y paridentifica su pendiente, la distancia a un punto y la posición relarectas, la ecuación de una recta bisectriz, sus aplicaciones reales, la vsus resultados y el aporte de las TIC. (I.3.)	Comprobar el desarrollo de las destrezas necesarias para el manejo de vectores en el plano y sus características, graficación, norma, Operaciones con vectores algebraicas, en forma gráfica y en Forma analítica, así como para la resolución de problemas de aplicación. El estudiante debe ser capaz de calcular el producto de un número por un vector, el producto Escalar entre vectores, la ortogonalidad, la distancia entre dos puntos, el ángulo entre dos vectores; determinar la posición relativa de dos rectas; describir la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola (tanto en su forma cartesiana como en su forma paramétrica), y, en general, resolver aplicaciones geométricas de vectores en R.

Elementos del perfil de salida
I.2. Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos e información posibles. I.3. Sabemos comunicarnos de manera clara en nuestra lengua y en otras, utilizamos varios lenguajes como el numérico, el digital, el artístico y el corporal; asumimos con responsabilidad nuestros discursos.

Elaborado	Revisado	Aprobado
Docente:	Director del área :	Vicerrector:
Firma:	Firma:	Firma:
Fecha:	Fecha:	Fecha:

Prohibida su reproducción

Objetivos del área por subnivel

- O.M.5.4. Valorar el empleo de las TIC para realizar cálculos y resolver, de manera razonada y crítica, problemas de la realidad nacional, argumentando la pertinencia de los métodos utilizados y juzgando la validez de los resultados.

Objetivos Integradores de subnivel

- OI.5.4. Reflexionar sobre los procesos de transformación social, los modelos económicos, la influencia de la diversidad de pensamiento, los aportes tecnológicos, económicos y científicos de diferentes culturas, y su impacto en el desarrollo de un plan de vida basado en El respeto a la diversidad.
- OI.5.9. Asumir su responsabilidad en la construcción de una sociedad equitativa a partir del reconocimiento de la igualdad natural de los seres humanos, del enfoque de derechos y de los mecanismos de participación democrática.

Técnicas e instrumentos de evaluación

- Comprobar el desarrollo de las destrezas necesarias para el manejo de vectores en el plano y sus características, graficación, norma,
- Operaciones con vectores algebraicas, en forma gráfica y en
- Forma analítica, así como para la resolución de problemas de aplicación. El estudiante debe ser capaz de calcular el producto de un número por un vector, el producto
- Escalar entre vectores, la ortogonalidad, la distancia entre dos puntos, el ángulo entre dos vectores; determinar la posición relativa de dos rectas; describir la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola (tanto en su forma cartesiana como en su forma paramétrica), y, en general, resolver aplicaciones geométricas de vectores en R.

Prohibida su reproducción

Indicadores para la evaluación del criterio

- I.M.5.6.1. Grafica vectores en el plano; halla su módulo y realiza opersuma, resta y producto por un escalar; resuelve problemas aplicados a la Geometría y a la Física. (I.2.)
- I.M.5.6.2. Realiza operaciones en el espacio vectorial R; calcula la distre dos puntos, el módulo y la dirección de un vector; reconoce cuando dos vtores son ortogonales; y aplica este conocimiento en problemas físicen las TIC. (I.3.)
- I.M.5.6.3. Determina la ecuación de la recta de forma vectorial y paridentifica su pendiente, la distancia a un punto y la posición relarectas, la ecuación de una recta bisectriz, sus aplicaciones reales, la vsus resultados y el aporte de las TIC. (I.3.)

Elementos del perfil de salida a los que se contribuye

- I.2. Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para
- Resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos e información posibles.
- I.3. Sabemos comunicarnos de manera clara en nuestra lengua y en otras, utilizamos varios lenguajes como el numérico, el digital, el artístico y el corporal; asumimos con
- Responsabilidad nuestros discursos.

Básicos imprescindibles

Básicos deseables

Bloques curriculares	Destrezas con criterio de desempeño
Vectores	Realizar las operaciones de adición entre elementos de R y de producto por un número escalar de manera geométrica y analítica aplicando Propiedades de los números reales y reconocer a los vectores como elementos geométricos de R33
	Calcular el producto escalar entre dos vectores y la norma de un vector para determinar distancia entre dos puntos A y B en R como la norma del vector AB .
	Escribir y reconocer la ecuación vectorial y paramétrica de una recta a partir de un punto de la recta y un3 vector dirección o a partir de dos puntos de la recta y graficarlas en R Determinar la ecuación vectorial de un plano a partir de un punto del plano y dos vectores dirección; a partir3 de tres puntos del plano; a partir de una recta contenida en el plano y un punto.
	Determinar la ecuación de la recta formada como intersección de dos planos como solución del sistema de ecuaciones planteado por las ecuaciones de los planos.
	Determinar si dos planos son paralelos (cuando no hay solución) o perpendiculares (si los vectores normales a los planos son perpendiculares) para resolver aplicaciones geométricas en R3→

Prohibida su reproducción

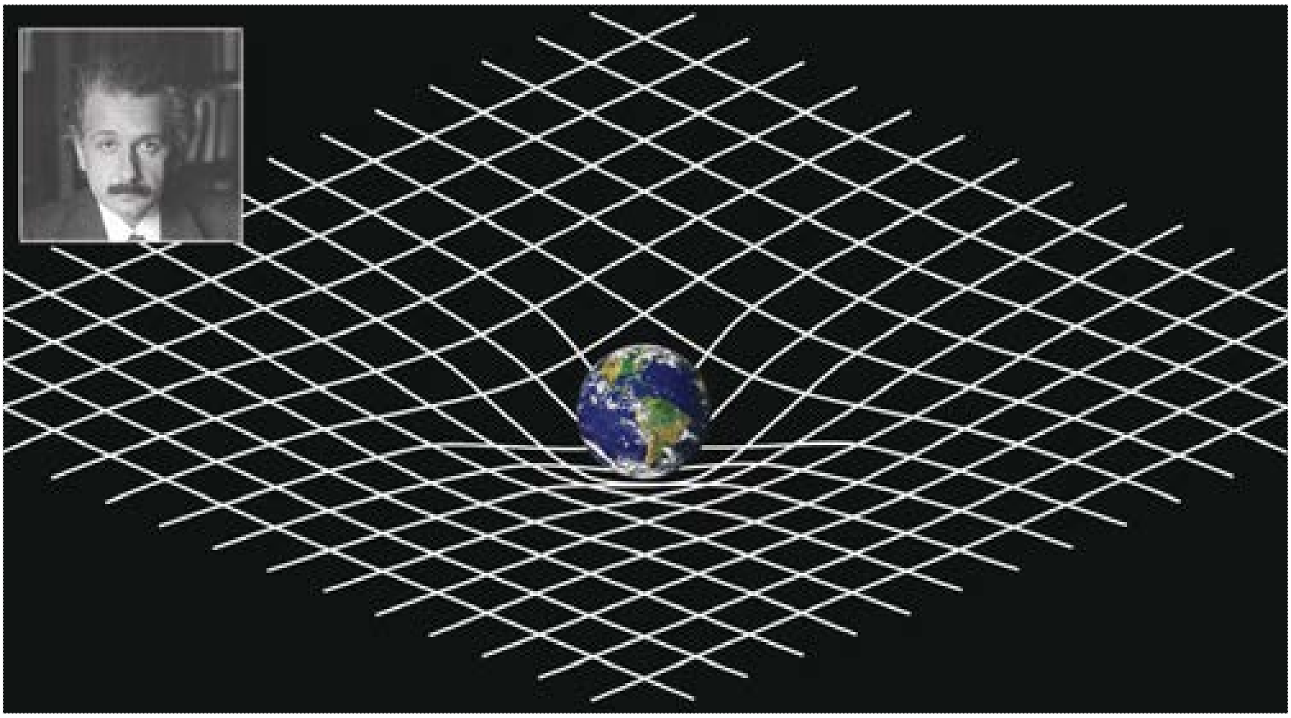
Espacio R^4 :

Espacio-tiempo

El espacio-tiempo es el modelo matemático que combina el espacio y el tiempo en un único continuo como dos conceptos inseparablemente relacionados. En este continuo espacio-temporal se desarrollan todos los eventos físicos del Universo, de acuerdo con la teoría de la relatividad y otras teorías físicas. La expresión espacio-tiempo ha devenido de uso corriente a partir de la teoría de la relatividad especial formulada por Einstein en 1905, siendo esta concepción del espacio y el tiempo uno de los avances más importantes del siglo XX en el campo de la física.

De acuerdo a las teorías de la relatividad de Einstein, el tiempo no puede estar separado de las tres dimensiones espaciales, sino que al igual que ellas, éste depende del estado de movimiento del observador. En esencia, dos observadores medirán tiempos diferentes para el intervalo entre dos sucesos, la diferencia entre los tiempos medidos depende de la velocidad relativa entre los observadores. Si además existe un campo gravitatorio también dependerá la diferencia de intensidades de dicho campo gravitatorio para los dos observadores. El trabajo de Minkowski probó la utilidad de considerar el tiempo como una dimensión geométrica más.

La definición de "espacio-tiempo" como un ente matemático único y continuo se puede entender desde una perspectiva pseudo-euclidiana, la cual considera al Universo como un "espacio de cuatro dimensiones" formado por tres dimensiones espaciales físicas observables y por una "cuarta dimensión" temporal (más exactamente una variedad lorentziana de cuatro dimensiones). Un caso simple es el espacio-tiempo usado en relatividad especial, donde al combinar espacio y tiempo en un espacio tetradimiensional, se obtiene el espacio-tiempo de Minkowski.



https://goo.gl/YKcNjc

Proyección en R^3 de un espacio en R^4 (Distorsión del Espacio-tiempo, causado por la masa de la tierra)

Prohibida su reproducción

ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

La resolución de problemas permite poner en práctica los conocimientos adquiridos en la materia de Matemáticas. Pero también es un fin en sí misma, al permitir afrontar y resolver múltiples situaciones tanto de otras materias (Física, Economía…) como de la realidad cotidiana.

Cada problema puede considerarse un reto y un medio eficaz para aprender a pensar. Las personas, dentro y fuera del ámbito escolar, utilizamos diversos procedimientos para resolver los problemas. Existe, sin embargo, un *método general de resolución de problemas* que puede servirte de pauta para resolver otros muchos. Sus fases son:

— *Comprensión del enunciado:* nos aproximamos al problema, identificamos todos sus términos, organizamos los datos que aparecen y dibujamos los que son susceptibles de representación.

— *Planificación de la resolución:* elaboramos conjeturas y seleccionamos la estrategia de resolución, así como las técnicas matemáticas que vamos a utilizar.

— *Ejecución del plan de resolución:* realizamos lo preparado en la fase anterior.

— *Revisión del resultado y del proceso seguido:* interpretamos las posibles soluciones, contextualizamos los resultados, reflexionamos sobre el proceso, revisamos y/o modificamos el plan si es necesario, y estudiamos otras posibles soluciones y planes alternativos.

Además de la pauta general, ten en cuenta los siguientes consejos que te ayudarán a comprender el enunciado:

- Léelo con atención para evitar saltarte información y observar posibles ambigüedades.
- Repasa los conceptos matemáticos que intervienen en el enunciado.
- Apunta los datos de que dispones. Puede ser útil disponerlos en forma de tabla o elaborar un dibujo y anotarlos en él.
- Analiza si existe información superflua. En caso afirmativo, elimínala.

A continuación, te presentamos algunas de las **estrategias de resolución de problemas** más comunes. En las páginas 316 a 320 de tu libro de 1.º de Bachillerato tienes un ejemplo resuelto de cada una de ellas.

1 RESOLUCIÓN GRÁFICA

Muchas veces, la construcción de un gráfico que refleje las condiciones y los datos del enunciado conduce directamente a la solución del problema.

2 ENSAYO-ERROR

Esta estrategia consiste en experimentar con posibles soluciones hasta dar con la correcta. Para ello, seguimos estos pasos:

— Escogemos una posible solución.

— Probamos si esta solución satisface las condiciones del problema.

— Modificamos la solución escogida en función del resultado obtenido y repetimos el proceso hasta obtener la solución correcta.

3 RAZONAMIENTO INVERSO

Esta estrategia se aplica en la resolución de problemas en los que conocemos el resultado final y queremos determinar un valor inicial o una serie de operaciones que nos conduzcan hasta él.

El método consiste en tomar el resultado como punto de partida e ir retrocediendo hasta llegar a la situación inicial.

4 ORGANIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN

En muchos problemas, la realización de un esquema o tabla sobre los que disponer las condiciones y los datos del enunciado puede abrirte el camino para abordar su resolución.

Prohibida su reproducción

RESUMEN

Matrices

Matriz de dimensión m × n: conjunto de m × n elementos dispuestos en m filas y n columnas. Se representa:

$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$, o bien, $A = (a_{ij})$; a_{ij}, elemento de la fila i y la columna j

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij} \quad \forall\ i, j$$

Matriz cuadrada: dimensión n × n. Elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$: diagonal principal.

Matriz fila o vector fila: dimensión 1 × n.

Matriz columna o vector columna: dimensión m × 1.

Matriz diagonal: matriz cuadrada en la que todos los elementos situados fuera de la diagonal principal son 0.

Matriz escalonada: las filas nulas están en la parte inferior de la matriz; y en las filas no nulas, el primer elemento diferente de cero de una fila está situado más a la derecha que el primer elemento diferente de cero de la fila inmediatamente superior.

Matriz identidad, I: matriz $n \times n \mid a_{ij} = 0$, si $i \neq j$, y $a_{ij} = 1$, si $i = j$.

Matriz nula: $a_{ij} = 0,\ \forall\ i, j$.

Rango de una matriz A, rang (A): número de filas no nulas de una matriz escalonada equivalente a A.

Dos matrices son equivalentes si una de ellas se obtiene a partir de la otra mediante transformaciones elementales.

Suma: $A_{mn} + B_{mn} = C_{mn}$ con $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Producto por un número real: $k \cdot A_{mn} = C_{mn}$ con $c_{ij} = k \cdot a_{ij}$

Producto: $A_{mp} \cdot B_{pn} = C_{mn}$ con $c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} \cdot b_{jk}$

Matriz inversa, A^{-1}, de una matriz A: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Matriz traspuesta, A^t, de una matriz A: la que se obtiene intercambiando sus filas por sus columnas.

Determinantes

Determinante de una matriz cuadrada A, |A|, número asociado a A, definido de la siguiente manera:

Determinantes de orden uno: $|A| = |a_{11}| = a_{11}$

Determinantes de orden dos:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$$

Determinantes de orden tres:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{21}\,a_{32}\,a_{13} + a_{31}\,a_{12}\,a_{23} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{23}\,a_{32}\,a_{11} - a_{33}\,a_{12}\,a_{21}$$

Determinante de orden n: $|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\, M_{ij}$, donde M_{ij} (menor complementario de a_{ij}) es el determinante de la matriz de orden n − 1 que se obtiene al suprimir la fila y la columna correspondientes a a_{ij}.

$\mathbf{A^{-1}} = \dfrac{\mathrm{Adj}\,(A^t)}{|A|}$, donde A_{ij} (adjunto del elemento a_{ij}) $= (-1)^{i+j}\, M_{ij}$

Sistemas de ecuaciones lineales

Sistema de ecuaciones lineales: conjunto de ecuaciones lineales que deben verificarse simultáneamente.

Sistema de m ecuaciones con n incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\}$$

Solución: n-upla de números reales, $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, tal que verifican simultáneamente las ecuaciones.

Clasificación de sistemas según sus soluciones:

- Incompatible (sin solución)
- Compatible (con solución)
  - Determinado (solución única)
  - Indeterminado (infinitas soluciones)

Resolución por el **método de Gauss:** se halla un sistema escalonado equivalente al inicial y se resuelve mediante sustitución regresiva.

Notación matricial de un sistema: $A \cdot X = B$, donde $A = (a_{ij})$, $X = (x_j)$, $B = (b_i)$. Solución: $X = A^{-1} \cdot B$

Teorema de Rouché-Frobenius:

rang (A) ≠ rang (A′) ⇔ sistema incompatible

rang (A) = rang (A′) = n ⇔ sistema compatible determinado

rang (A) = rang (A′) < n ⇔ sistema compatible indeterminado

Regla de Cramer:

$s_i = \dfrac{\Delta_i}{|A|}$ Δ_i: determinante de la matriz obtenida al sustituir la columna de la matriz A correspondiente a la incógnita i-ésima, por la columna de los términos independientes

Geometría afín

Vector fijo de origen A y extremo B, $\overrightarrow{AB}$: par ordenado (A, B).

Vector libre: conjunto de vectores equipolentes a uno dado. Su dirección, módulo y sentido son los de uno cualquiera de sus representantes.

Operaciones con vectores libres:

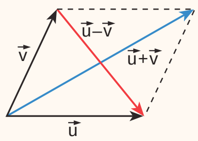
Sea $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

Adición

$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$

Multiplicación por un número real

$k\vec{u} = (ku_1, ku_2, ku_3)$



$\vec{u}$ es combinación lineal de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ si $\exists\ k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$, tales que: $\vec{u} = k_1\,\vec{u}_1 + k_2\,\vec{u}_2 + \ldots + k_n\,\vec{u}_n$

n vectores son **linealmente independientes** si ninguno de ellos puede expresarse como combinación lineal de los demás. En caso contrario, son **linealmente dependientes.**

Rango de n vectores: máximo número de vectores linealmente independientes del conjunto de n vectores.

Ecuaciones de la recta r (A; $\vec{v}$):

Ecuación vectorial: $\vec{p} = \vec{a} + k\,\vec{v},\ k \in \mathbb{R}$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{aligned} x &= a_1 + kv_1 \\ y &= a_2 + kv_2 \\ z &= a_3 + kv_3 \end{aligned}\right\}$

Ecuaciones continuas: $\dfrac{x - a_1}{v_1} = \dfrac{y - a_2}{v_2} = \dfrac{z - a_3}{v_3}$

Ecuaciones implícitas: $\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$

Prohibida su reproducción

Ecuaciones del plano π (A; $\vec{u}$, $\vec{v}$):

Ecuación vectorial: $\vec{p} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = a_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = a_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{array}\right\}$

Ecuación general: $Ax + By + Cz + D = 0$

Posiciones relativas:

Sea M la matriz del sistema formado, en cada caso, por las ecuaciones implícitas de las rectas y las ecuaciones generales de los planos, y M′ la matriz ampliada correspondiente.

Posición relativa de dos rectas, $r\,(A; \vec{v})$ *y* $r'\,(A'; \vec{v}')$:

Coincidentes	Paralelas	Se cortan	Se cruzan
rang (M) = 2 rang (M′) = 2	rang (M) = 2 rang (M′) = 3	rang (M) = 3 rang (M′) = 3	rang (M) = 3 rang (M′) = 4
$\vec{v} = k\,\vec{v}'$ $\forall P \in r,\ P \in r'$	$\vec{v} = k\,\vec{v}'$ $\forall P \in r,\ P \notin r'$	$\vec{v} \neq k\,\vec{v}'$ $\lvert \vec{v}, \vec{v}', [\overline{AA'}] \rvert = 0$	$\vec{v} \neq k\,\vec{v}'$ $\lvert \vec{v}, \vec{v}', [\overline{AA'}] \rvert \neq 0$

Posición relativa de dos planos, $\pi\,(A; \vec{u}, \vec{v})$ *y* $\pi'\,(A'; \vec{u}', \vec{v}')$:

Coincidentes	rang (M) = 1 rang (M′) = 1	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$
Paralelos	rang (M) = 1 rang (M′) = 2	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$
Secantes	rang (M) = 2 rang (M′) = 2	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$ o $\frac{A}{A'} \neq \frac{C}{C'}$ o $\frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$

Ecuación de un **haz de planos secantes:**

$$\pi_r\!: \alpha\,\pi + \beta\,\pi',\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (\text{siendo } r = \pi \cap \pi')$$

Ecuación de un **haz de planos paralelos:**

$$Ax + By + Cz + K = 0,\ K \in \mathbb{R}$$

Posición relativa de recta y plano, $r\,(A; \vec{v})$ *y* $\pi\,(A'; \vec{u}', \vec{v}')$:

r contenida en π	r y π paralelos	r y π secantes
rang (M) = 2 rang (M′) = 2	rang (M) = 2 rang (M′) = 3	rang (M) = 3 rang (M′) = 3
$\vec{v} = k_1\,\vec{u}' + k_2\,\vec{v}'$ $\forall P \in r,\ P \in \pi$	$\vec{v} = k_1\,\vec{u}' + k_2\,\vec{v}'$ $\forall P \in r,\ P \notin \pi$	$\vec{v} \neq k_1\,\vec{u}' + k_2\,\vec{v}'$ $\lvert \vec{v}, \vec{u}, \vec{v} \rvert \neq 0$

Geometría métrica

Producto escalar, $\vec{u} \cdot \vec{v}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} |\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) & \text{si } \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ son no nulos} \\ 0 & \text{si } \vec{u} \text{ o } \vec{v} \text{ es el vector nulo} \end{cases}$$

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0\,; \ |\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{v}}$$

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\vec{u}|\,|\text{Proy}_{\vec{u}}\vec{v}| = |\vec{v}|\,|\text{Proy}_{\vec{v}}\,\vec{u}|$$

Si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ en una base ortonormal:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1\,v_1 + u_2\,v_2 + u_3\,v_3$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{u_1\,v_1 + u_2\,v_2 + u_3\,v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\,\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

Producto vectorial, $\vec{u} \times \vec{v}$:

- Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son no nulos:
  - — Módulo: $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\text{sen}\,(\vec{u}, \vec{v})$.
  - — Dirección: simultáneamente perpendicular a las de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
  - — Sentido: el de avance de un sacacorchos que gira de $\vec{u}$ hacia $\vec{v}$ recorriendo el ángulo más pequeño.
- Si $\vec{u} = 0$ o $\vec{v} = 0$: $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$

El módulo del producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ coincide con el área del paralelogramo construido sobre ellos.

Producto mixto, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$$

El valor absoluto del producto mixto de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ coincide con el volumen del paralelepípedo construido sobre ellos.

Ángulos entre elementos del espacio:

Entre dos rectas, $r(A; \vec{u})$ *y* $r'(B; \vec{v})$:

$$\alpha = \text{arc cos}\,\frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} \qquad \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$r \perp s \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Entre dos planos $\pi\,(A; \vec{u}, \vec{v})$: $Ax + By + Cz + D$ *y* $\pi'\,(B; \vec{u}', \vec{v}')$: $A'x + B'y + C'z + D'$, *con vectores normales* $\vec{n}$ *y* $\vec{n}'$:

$$\alpha = \text{arc cos}\,\frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}'|}{|\vec{n}|\,|\vec{n}'|} \qquad \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\pi \perp \pi' \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0 \Leftrightarrow AA' + BB' + CC' = 0$$

Entre recta y plano, $r\,(A; \vec{v})$ *y* $\pi\,(A'; \vec{u}'; \vec{v}')$:

$$\alpha = \text{arc sen}\,\frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}|\,|\vec{n}|} \qquad \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$r \perp \pi \Leftrightarrow \frac{v_1}{A} = \frac{v_2}{B} = \frac{v_3}{C}$$

Distancias entre elementos del espacio:

Entre dos puntos, $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$.

$$d\,(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Del punto $P = (p_1, p_2, p_3)$ a la recta $r\,(Q; \vec{v})$.

$$d\,(P, r) = \frac{|[\overline{QP}] \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

Del punto $P = (p_1, p_2, p_3)$ al plano π: $Ax + By + Cz + D = 0$

$$d\,(P, \pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Entre dos rectas, $r\,(A; \vec{v})$ y $r'\,(A'; \vec{v}')$.

$$d\,(r, r') = \frac{|[[\overline{AA'}], \vec{v}, \vec{v}']|}{|\vec{v} \times \vec{v}'|}$$

Prohibida su reproducción

Cálculo de la distancia entre el receptor y los satélites.

Como se explicó anteriormente, con la aplicación del principio matemático de la triangulación podemos conocer el punto o lugar donde nos encontramos situados, e incluso rastrear y ubicar el origen de una transmisión por ondas de radio. El sistema GPS utiliza el mismo principio, pero en lugar de emplear círculos o líneas rectas crea esferas virtuales o imaginarias para lograr el mismo objetivo.

Desde el mismo momento que el receptor GPS detecta una señal de radiofrecuencia transmitida por un satélite desde su órbita, se genera una esfera virtual o imaginaria que envuelve al satélite. El propio satélite actuará como centro de la esfera cuya superficie se extenderá hasta el punto o lugar donde se encuentre situada la antena del receptor; por tanto, el radio de la esfera será igual a la distancia que separa al satélite del receptor. A partir de ese instante el receptor GPS medirá las distancias que lo separan como mínimo de dos satélites más. Para ello tendrá que calcular el tiempo que demora cada señal en viajar desde los satélites hasta el punto donde éste se encuentra situado y realizar los correspondientes cálculos matemáticos.

http://goo.gl/jbvwE

http://goo.gl/25b4jJ

Prohibida su reproducción

Nombre: ______________________ Fecha: ______________

Vectores en el espacio

1 Halla los parámetros a y b para que el vector $\vec{u} = (a, b, 1)$ sea ortogonal a $\vec{v} = (3, 1, -1)$ y $\vec{w} = (-3, 2, 2)$.

2 Halla el parámetro λ para que los vectores $\vec{u} = (3, 2, 5)$, $\vec{v} = (2, 4, 7)$ y $\vec{w} = (1, -3, \lambda)$ sean linealmente independientes.

3 Expresa el vector $\vec{x} = (2, -5, 5)$ como combinación lineal de los vectores del ejercicio anterior, $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, siendo $\lambda = 3$.

4 Comprueba que los vectores $\vec{u} = (-1, 1, -1)$, $\vec{v} = (1, -1, 1)$ y $\vec{w} = (1, 1, -1)$ forman una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

— Determina las coordenadas del vector $\vec{x} = (2, 4, -2)$ en dicha base.

5 Las componentes de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ en una cierta base son $\vec{u} = (3, -1, 2)$, $\vec{v} = (-1, 2, 5)$ y $\vec{w} = (3, 1, 4)$. Halla las componentes de los siguientes vectores en esta misma base:

a) $\vec{x} = 3\vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w}$

b) $\vec{y} = -4\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v} + \vec{w}$

c) $\vec{z} = \frac{1}{5}\vec{u} - \frac{1}{4}(2\vec{v} - 5\vec{w})$

d) $\vec{a} = 2\left(\frac{1}{3}\vec{u} + \vec{w}\right) - \left(\frac{2}{3}\vec{v} - \vec{u}\right)$

6 Se considera el segmento AB de extremos $A = (3, 2, 1)$ y $B = (-2, -1, 2)$. Halla las coordenadas del punto M sobre el segmento AB de modo que $AM = \frac{2}{5}AB$.

7 Sobre una recta se consideran los puntos $A = (2, -1, 2)$ y $B = (2, 2, 1)$. Halla el punto M tal que $3AM + 2BM = 0$.

8 Halla las coordenadas de los puntos M y N que dividen el segmento de extremos $A = (1, 2, 1)$ y $B = (3, 6, 4)$ en tres partes iguales.

9 Halla las coordenadas del punto simétrico a $A = (5, 3, 2)$ respecto del punto $H = (2, 7, 5)$.

10 Calcula m y n para que se cumpla la ecuación $\vec{w} = m\vec{v} + n\vec{u}$ siendo $\vec{u} = (-1, 2, 4)$, $\vec{v} = (1, 0, -2)$ y $\vec{w} = (3, 4, -2)$.

11 Halla el producto escalar de las siguientes parejas de vectores:

a) $(-1, 3, 5)$ y $(2, 7, -3)$

b) $(2, 3, 2)$ y $(6, 1, 3)$

c) $(-3, 0, 6)$ y $(8, 2, 6)$

12 Calcula los ángulos del triángulo formado por los puntos $A = (3, 0, 2)$, $B = (4, 5, 7)$ y $C = (-1, -2, 3)$.

13 Halla un vector perpendicular a:

a) $\vec{u} = (1, 0, 6)$ *b)* $\vec{v} = (-3, 4, 0)$

14 Halla un vector $\vec{w}$ perpendicular a $\vec{v} = (1, 0, 2)$, que forme un ángulo de 45° con el vector $\vec{u} = (-2, 3, 0)$ y cuyo módulo sea 3.

15 Dados los vectores $\vec{u} = (-2, 1, 4)$, $\vec{v} = (0, 5, 4)$ y $\vec{w} = (1, 5, -2)$, calcula:

a) $\vec{v} \times \vec{u}$ *c)* $\vec{v} \times \vec{w}$

b) $\vec{u} \times \vec{w}$ *d)* $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$

16 Halla un vector perpendicular a $\vec{u} = (3, 1, -5)$ y $\vec{v} = (2, 2, 4)$.

17 Halla el volumen del paralelepípedo cuyas aristas son los vectores $\vec{u} = (1, 2, 0)$, $\vec{v} = (3, -2, 5)$ y $\vec{w} = (1, 1, 2)$.

18 Calcula el valor de m para que el volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (m, -5, 1)$ y $\vec{w} = (-4, 2, 0)$ sea igual a 17 u^3.

19 Determina la independencia lineal de los siguientes grupos de vectores:

a) $(1, 0, 2)$, $(3, 2, 5)$ y $(-2, 4, -3)$

b) $(-3, 2, 5)$, $(0, 3, -1)$ y $(4, 1, -2)$

20 Discute en función de los valores del parámetro m, la independencia lineal de los vectores $(-1, m, m)$, $(m, -1, m)$ y $(m, m, -1)$. En caso de que los vectores sean dependientes, da la relación de dependencia.

21 Determina si los vectores $\vec{u} = (1, 2, 1)$, $\vec{v} = (2, 1, 2)$ y $\vec{w} = (1, -1, 1)$ son linealmente dependientes.

— Expresa uno de ellos como combinación lineal de los otros.

Prohibida su reproducción

1. Que el vector $\vec{u}$ sea ortogonal a los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$, implica que el producto escalar de los vectores es nulo:

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0;\ \ 3a + b - 1 = 0$

$\vec{u}\cdot\vec{w} = 0;\ \ -3a + 2b + 2 = 0$

Aislando los parámetros del sistema de ecuaciones obtenido, hallamos que $a = -\frac{4}{9}$ y $b = -\frac{1}{3}$.

2. Si tres vectores son linealmente dependientes, el determinante formado por los tres ha de ser nulo.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & -3 & \lambda \end{vmatrix} = 8\lambda + 27 = 0;\ \ \lambda = -\frac{27}{8}$$

Luego, para $\lambda \neq -\frac{27}{8}$ los vectores son linealmente independientes.

3. Si $\lambda = 3,\ \vec{w} = (1, -3, 3)$

Para que el vector $\vec{x}$ sea combinación lineal de los otros tres vectores debe cumplirse la siguiente igualdad:

$a(3, 2, 5) + b(2, 4, 7) + c(1, -3, 3) = (2, -5, 5)$

Con lo que obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 3a + 2b + c &= 2 \\ 2a + 4b - 3c &= -5 \\ 5a + 7b + 3c &= 5 \end{aligned}\right\}$$

Resolvemos el sistema y obtenemos:

$a = \frac{11}{51};\ \ b = -\frac{7}{51};\ \ c = \frac{83}{51}$

Luego $\vec{x} = \frac{11}{51}\vec{u} - \frac{7}{51}\vec{v} + \frac{83}{51}\vec{w}$.

4. Si los tres vectores forman una base, deben ser linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \text{ por lo tanto forman una base}$$

ortogonal.

Para expresar el vector en la base se debe cumplir la igualdad

$a(-1, 1, -1) + b(1, -1, 1) + c(1, 1, -1) = (2, 4, -2)$

Con lo que obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} -a + b + c &= 2 \\ a - b + c &= 4 \\ -a + b - c &= -2 \end{aligned}\right\}$$

Resolvemos el sistema y hallamos: $a = 0$; $b = -1$ y $c = 3$.

Luego $\vec{x} = -\vec{v} + 3\vec{w}$.

5. Operamos componente a componente:

a) $\vec{x} = 3\cdot(3, -1, 2) + 2(-1, 2, 5) - (3, 1, 4) =$

$= (9, -3, 6) + (-2, 4, 10) - (3, 1, 4) = (4, 0, 12)$

b) $\vec{y} = -4(3, -1, 2) + \frac{3}{2}(-1, 2, 5) + (3, 1, 4) =$

$= (-12, 4, -8) + \left(-\frac{3}{2}, 3, \frac{15}{2}\right) + (3, 1, 4) =$

$= \left(-12 - \frac{3}{2} + 3, 4 + 3 + 1, -8 + \frac{15}{2} + 4\right) =$

$= \left(-\frac{21}{2}, 8, \frac{3}{2}\right)$

c) $\vec{z} = \frac{1}{5}(3, -1, 2) - \frac{1}{4}(2\cdot(-1, 2, 5) - 5(3, 1, 4)) =$

$= \left(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right) - \frac{1}{4}\cdot((-2, 4, 10) - (15, 5, 20)) =$

$= \left(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right) - \frac{1}{4}(-17, -1, -10) =$

$= \left(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{17}{4}, \frac{1}{4}, \frac{10}{4}\right) =$

$= \left(\frac{12 + 85}{20}, \frac{-4 + 5}{20}, \frac{8 + 50}{20}\right) = \left(\frac{97}{20}, \frac{1}{20}, \frac{58}{20}\right)$

d) $\vec{a} = 2\cdot\left(\frac{1}{3}(3, -1, 2) + (3, 1, 4)\right) - \left[\frac{2}{3}(-1, 2, 5) - (3, -1, 2)\right] =$

$= 2\cdot\left(\left(1, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) + (3, 1, 4)\right) - \left(\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right) + (-3, 1, -2)\right) =$

6. $\overrightarrow{AB} = (-5, -3, 1)$

El punto M tiene las coordenadas (x, y, z).

$\overrightarrow{AM} = (x - 3, y - 2, z - 1)$

Si $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ entonces

$(x-3, y-2, z-1) = \frac{2}{5}(-5, -3, 1)$

Igualando componentes, obtenemos que $x = 1$; $y = \frac{4}{5}$; $z = \frac{7}{5}$.

7. Sea el punto M de coordenadas (x, y, z). Imponiendo la condición del enunciado obtenemos la igualdad:

$3(x-2, y+1, z-2) + 2(x-2, y-2, z-1) = 0$

Igualando componentes, obtenemos $x = 2$; $y = \frac{1}{5}$; $z = \frac{8}{5}$.

Prohibida su reproducción

8. Sea $M = (x, y, z)$ y $N = (x', y', z')$. La condición del enunciado se expresa matemáticamente de la siguiente manera:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

Obtenemos las siguientes igualdades:

$$(x-1, y-2, z-1) = \frac{1}{3}\ (2, 4, 3)$$

$$(x'-1, y'-2, z'-1)= \frac{2}{3}\ (2, 4, 3)$$

Igualando componentes tenemos:

$$x = \frac{5}{3};\ y = \frac{10}{3};\ z = 2;\ x' = \frac{7}{3};\ y' = \frac{14}{3};\ z' = 3.$$

9. Sean las coordenadas de $A' = (x, y, z)$. Si A' es simétrico de A respecto a H, entonces se cumple que:

$\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$, por lo que tenemos la igualdad $(x - 5, y - 3, z - 2) = \frac{1}{2}\ (-3, 4, 3)$.

Obtenemos $x = \frac{7}{2};\ y = 5;\ z = \frac{7}{2}$.

El punto $A' = \left(\frac{7}{2}, 5, \frac{7}{2}\right)$.

10. Tenemos la igualdad

$m(1, 0, -2) + n(-1, 2, 4) = (3, 4 -2)$.

Obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} m - n &= 3 \\ 2n &= 4 \\ -2m + 4n &= -2 \end{aligned}\right\}$$

Resolvemos el sistema y obtenemos $m = 5$ y $n = 2$.

11. Aplicamos la fórmula del producto escalar:

a) $(-1, 3, 5) \cdot (2, 7, -3) = (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 7 + 5(-3) = 4$

b) $(2, 3, 2) \cdot (6, 1, 3) = 6 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 21$

c) $(-3, 0, 6) \cdot (8, 2, 6) = (-3) \cdot 8 + 0 \cdot 2 + 6 \cdot 6 = 12$

12. Escribimos los vectores que definen los lados del triángulo:

$\overrightarrow{AB} = (1, 5, 5);\ \overrightarrow{AC} = (-4, -2, 1)$ y

$\overrightarrow{BC} = (-5, -7, -4)$

Aplicamos la expresión que permite obtener el coseno del ángulo entre dos vectores.

$$\alpha = \cos^{-1}\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|} = 105,97°$$

$$\beta = \cos^{-1}\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|} = 27,67°$$

$$\gamma = \cos^{-1}\frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|} = 46,36°$$

13. El vector que buscamos tiene como componentes $\vec{x} = (x, y, z)$. Impondremos que el producto escalar de los vectores sea nulo.

a) $\vec{u} = (1, 0, 6)$

Al efectuar el producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{x}$ obtenemos la ecuación $x + 6z = 0$.

De donde, $x = -6z$. Luego, cualquier vector con la expresión $(-6z, y, z)$ es perpendicular a $\vec{u}$.

b) $\vec{v} = (-3, 4, 0)$

Al efectuar el producto escalar $\vec{v} \cdot \vec{x}$ obtenemos la ecuación $-3x + 4y = 0$.

De donde, $y = \frac{3x}{4}$. Luego, cualquier vector con la expresión $(x, \frac{3x}{4}, z)$ es perpendicular a $\vec{v}$.

14. El vector $\vec{w} = (x, y, z)$, si es perpendicular a $\vec{v}$, verifica $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$. Esta condición nos da la ecuación $x + 2z = 0$.

Si el módulo del vector es 3, la ecuación resultante es $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 3$.

Si el ángulo que forma con $\vec{u}$ es de 45°, de la expresión del coseno de un ángulo entre dos vectores obtenemos la ecuación $x + 2y = 7,64$.

Resolviendo el sistema de las tres ecuaciones obtenemos dos vectores:

$\vec{w}_1 = (0,6, 2,95, -0,3)$ y $\vec{w}_2 = (-3,2, -0,41, 1,6)$

15. Para hallar los productos vectoriales construiremos los determinantes:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

a) $\vec{v} \times \vec{u} = (16, -8, 10)$

b) $\vec{u} \times \vec{w} = (-22, 0, -11)$

c) $\vec{v} \times \vec{w} = (-30, 4, -5)$

d) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (-21, -130, 22)$

16. Para hallar un vector perpendicular a los dos que nos da el enunciado, calculamos el producto vectorial de los dos vectores.

$\vec{v} \times \vec{u} = (-14, -22, 4)$

Prohibida su reproducción

17. Para hallar el volumen calculamos el producto mixto de los tres vectores:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 11\,u^3$$

18. El volumen del paralelepípedo determinado por tres vectores coincide con el valor absoluto de su producto mixto:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ m & -5 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = |6\,m - 70| = 17$$

Así pues:

$$6\,m - 70 = -17 \Rightarrow m = \frac{53}{6}$$

$$6\,m - 70 = 17 \Rightarrow m = \frac{87}{6}$$

19. Sabemos que si tres vectores son linealmente dependientes, el valor del producto mixto de los tres es 0. Para saber si los grupos siguientes son linealmente dependientes, calculamos el producto mixto.

a) (1, 0, 2), (3, 2, 5) y (−2, 4, −3)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Los vectores son linealmente independientes.

b) (−3, 2, 5), (0, 3, −1) y (4, 1, −2)

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -53 \neq 0$$

Los vectores son linealmente independientes.

20. Calculamos el producto mixto e igualamos el resultado a 0.

$$\begin{vmatrix} -1 & m & m \\ m & -1 & m \\ m & m & -1 \end{vmatrix} = 2\,m^3 + 3\,m^2 - 1 = 0$$

Para m = −1 los vectores son linealmente dependientes. La relación de dependencia entre ellos es que los tres son el mismo vector (−1, −1, −1).

Para $m \neq -1$ los vectores son linealmente independientes.

21. De acuerdo con el procedimiento estándar para determinar la dependencia o independencia lineal de un conjunto de vectores, consideremos la ecuación vectorial:

$$a\,\vec{u} + b\,\vec{v} + c\,\vec{w} = \vec{0}$$

Sustituyendo los vectores por sus componentes y operando:

$$\begin{aligned}(0, 0, 0) &= a\ (1, 2, 1) + b\ (2, 1, 2) + c\ (1, -1, 1) = \\ &= (a, 2a, a) + (2b, b, 2b) + (c, -c, c) = \\ &= (a + 2b + c, 2a + b - c, a + 2b + c)\end{aligned}$$

Igualando componente a componente:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = a + 2b + c \\ 0 = 2a + b - c \\ 0 = a + 2b + c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = \lambda \\ b = -\lambda \\ c = \lambda \end{array}\right\}$$

Como hay soluciones no triviales, concluimos que los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ son linealmente dependientes.

Considerando la solución particular correspondiente a $\lambda = 1$, obtenemos:

$$1\,\vec{u} + (-1)\,\vec{v} + 1\,\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} = \vec{v} - \vec{w}$$

Hemos expresado $\vec{u}$ como combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

Independencia lineal

Se dice que un conjunto de vectores $v_1, ..., v_n$ de un espacio vectorial V es linealmente dependiente si hay escalares $c_1, ..., c_n$, no todos creo, tales que

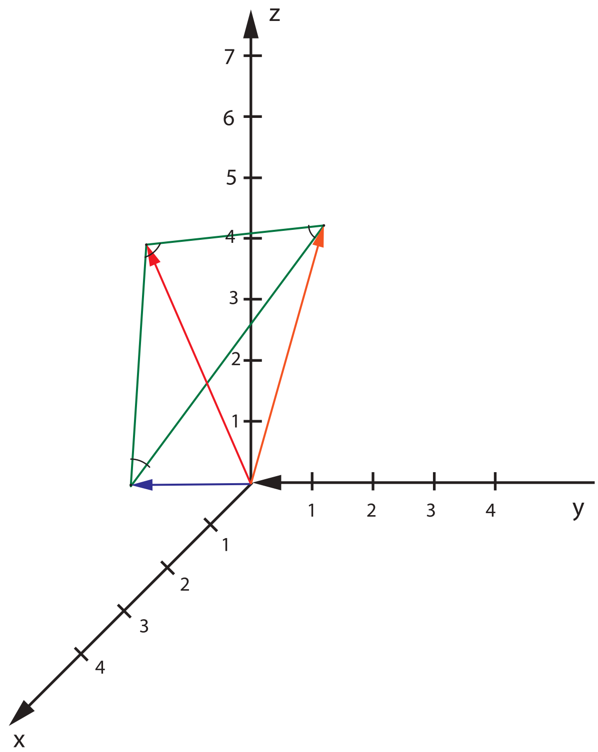
$$c_1 v_1 + ... + c_n v_n = 0$$

Prohibida su reproducción

Nombre: ______________________ Fecha: ______________

1. Realizar el siguiente ejercicio haciendo una maqueta, en un sistema de referencia cartesiano, medir los ángulos de los respectivos vértices y luego junto con el profesor, hacer la verificación analítica.

   Calcula los ángulos del triángulo formado por los puntos A = (3, 0, 2), B = (4, 5, 7) y C = (-1, -2, -3)



SOLUCIONARIO

Escribimos los vectores que definen los lados del triángulo:

$\overrightarrow{AB} = (1, 5, 5);\ \overrightarrow{AC} = (-4, -2, 1)$ y

$\overrightarrow{BC} = (-5, -7, -4)$

Aplicamos la expresión que permite obtener el coseno del ángulo entre dos vectores.

$$\alpha = \cos^{-1}\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|} = 105,97°$$

$$\beta = \cos^{-1}\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|} = 27,67°$$

$$\gamma = \cos^{-1}\frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|} = 46,36°$$

Prohibida su reproducción

CICLO DEL APRENDIZAJE

¿Cómo dinamizo el aula?

Experiencia concreta

- Debatir la necesidad que tienen los ingenieros aeroespaciales, en saber la posiciónde un satélite en el espacio en un tiempo determinado.

  Tambien existe una necesidad de todos nosotros de ubicarnos, por ejemplo en algún sitio de una ciudad y para ello usamos un sistema GPS (sistema de posicionamiento global), este sistema funciona triangulando posiciones entre satélites.

  De esta forma cuando usamos por ejemplo Google maps, estamos usando parte del compendio de esta unidad.

Observación reflexiva

- Reflexionar acerca de la importancia de estos conocimientos en las apps actuales como TIC que usan para su funcionamiento el sistema GPS
- Identificar las operaciones que se pueden realizar con vectores en espacios tridimensionales.

Conceptualización

- Diferenciar los conceptos de magnitud escalar y magnitud vectorial.
- Comparar las definiciones de espacio bidimensional y espacio tridimensional
- Usar un sistema de referenciatridimensional para ubicar una partícula en el espacio.

Aplicación

- Usar el producto escalar y el producto vectorial en la resolución de problemas físicos, como los planteados en el texto
- Reconocer los procesos en las operaciones con vectores tridimensionales
- Producir predicciones usando los modelos matemáticos estudiados.

Prohibida su reproducción

BANCO DE PREGUNTAS

1. Cuándo dos vectores fijos son equipolentes?

   Si tienen la misma dirección, el mismo módulo y el mismo sentido

2. Cuál es el resultado de multiplicar un vector por el escalar (-1)?

   Un vector de la misma dirección y de sentido contrario

3. Cúal es el resultado de efectuar el producto cruz entre dos vectores?

   Otro vector perpendicular a los otros dos

4. Qué podemos concluir, si al efectuar el producto escalar entre dos vectores, su resultado es cero?

   Que los vectores son perpendiculares entre si

5. Qué es un vector unitario?

   Es un vector con módulo uno

6. Cuál es el resultado de dividir dos vectores?

   No está definida esta operación

7. El resultado del producto escalar entre dos vectores, da como resultado otro vector o un escalar?

   Un escalar

8. El trabajo mecánico en física, está definido mediante un producto escalar o mediante un producto cruz entre vectores?

   Mediante un producto escalar, entre el vector fuerza y el vector desplazamiento

9. Los vectores unitarios ortonormales: i,j,k , a qué ejes pertenecen?

   Al eje x: i

   Al eje y: j

   Al eje z: k

10. Como se define en física la fuerza magnética, vectorialmente?

    Como el producto cruz entre el vector velocidad de una carga y el vector de la intensidad del campo magnético, multiplicado luego por el escalar de carga.

Prohibida su reproducción

RECURSOS PROPIOS DEL ÁREA

Se recomienda al docente que junto con sus alumnos realice modelos en tres dimensiones (maquetas) con materiales como madera, plástico u otros materiales reciclables, de los ejes de coordenadas ortogonales para poder visualizar mejor a los vectores en este espacio.

En el recurso TIC, en este texto, el profesor podrá encontrar accesos web, para ampliar sus conocimientos y explorar el uso de calculadoras vectoriales.

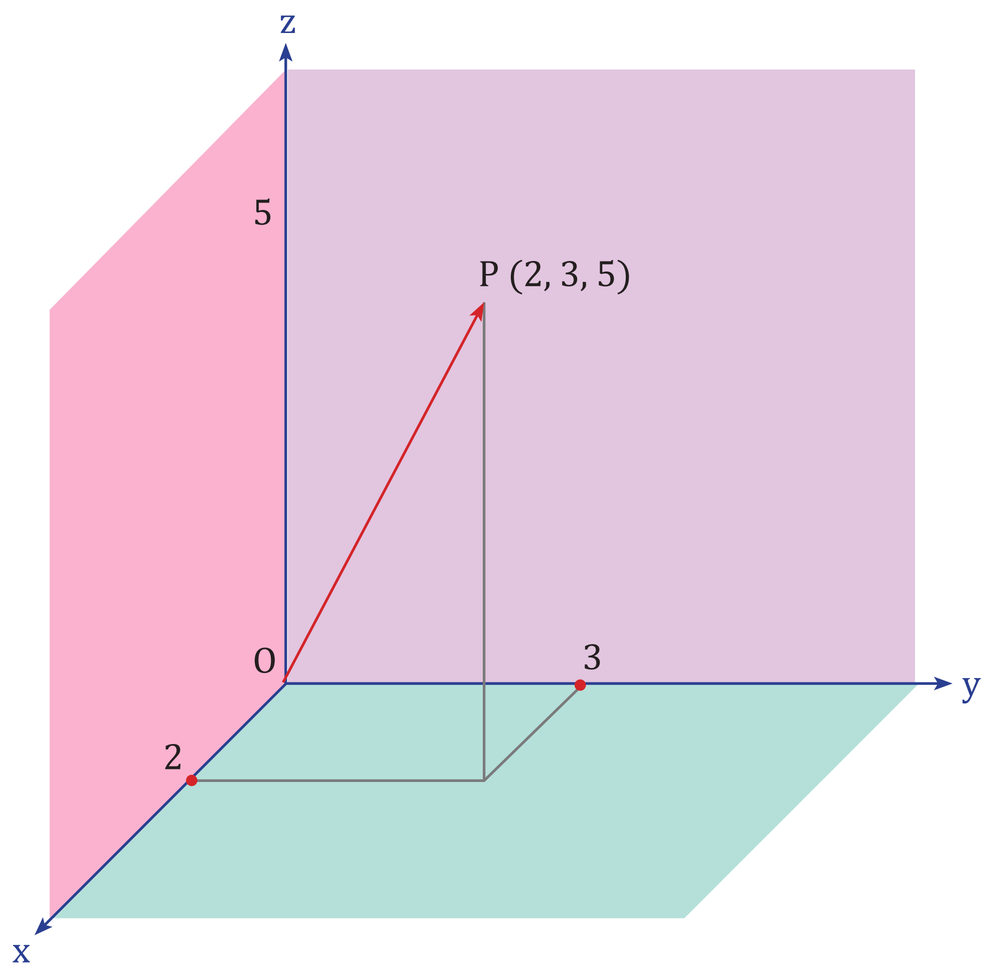
El uso de gráficos detallados y bien elaborados en la pizarra, usando diferentes tipos de marcadores de colores, es un recurso muy importante, pues se necesitan de trazos precisos.

Se puede utilizar proyectores para las exposiciones de gráficos hechos en computadora, para optimizar el uso del tiempo dentro del aula.

El docente deberá usar talleres con dibujos prediseñados, para facilitar al estudiante obtener las destrezas necesarias en estos temas.

En la página 144 del texto del estudiante, podrá acceder en el recurso TIC, a una plataforma virtual, que le servirá al docente calcular volúmenes de paralelepípedos usando vectores.

En la página 145 se propone el uso del programa Derive para determinar independencias lineales entre vectores.



Prohibida su reproducción

Página 120 y 121

4 Vectores en el espacio

CONTENIDOS:

Libro:

Planilandia: Una novela de muchas dimensiones es una novela corta escrita por Edwin Abbott en 1884. En esta obra se realiza una sátira de la jerarquía social haciendo uso de un mundo y figuras en dos dimensiones. ¿Conoces alguna otra obra que se desarrolle en dos dimensiones?

EN CONTEXTO:

Para localizar un objeto en el espacio, es necesario situarlo en un sistema de referencia. De igual manera que con vvel plano, los vectores de tres dimensiones constituyen un recurso para posicionar objetos en el espacio.

Un satélite es cualquier objeto que orbita alrededor de otro, que se denomina principal. Los satélites artificiales son naves espaciales fabricadas en la Tierra y enviadas en un vehículo de lanzamiento, un tipo de cohete que envía una carga útil al espacio exterior. Los satélites artificiales pueden orbitar alrededor de lunas, cometas, asteroides, planetas, estrellas o incluso galaxias. Tras su vida útil, los satélites artificiales pueden quedar orbitando como basura espacial. Estos artefactos son muy útiles para el hombre moderno, son los protagonistas principales de las comunicaciones en el mundo; gracias a ellos, recibimos señales de televisión, de radio y teléfono, o tenemos información valiosa del clima, de nuestro medio ambiente y del espacio.

Salas, Leslie. (2011.10.25). Los satélites espaciales. El espacio sideral. *Extraído el 1 de septiembre de 2015 desde la página web: http://leslie-salas.blogspot.com.*

Prohibida su reproducción

120 121

Orientación didáctica

- En esta unidad encontrarás una colección de ejercicios de repaso y refuerzo de temas de grados anteriores, agrupados por bloques numéricos, que sirven además para realizar la evaluación diagnóstica que se recomienda en al finalizar esta unidad.

  El profesor puede sugerir la participación de estudiantes en el pizarrón, siguiendo los procedimientos completos de los ejercicios con mayor dificultad, y de esta forma asegura conocimientos previos y anticipa posibles dificultades en los contenidos de la unidad.

  Se sugiere también que el docente les pida a los estudiantes que justifiquen sus respuestas.

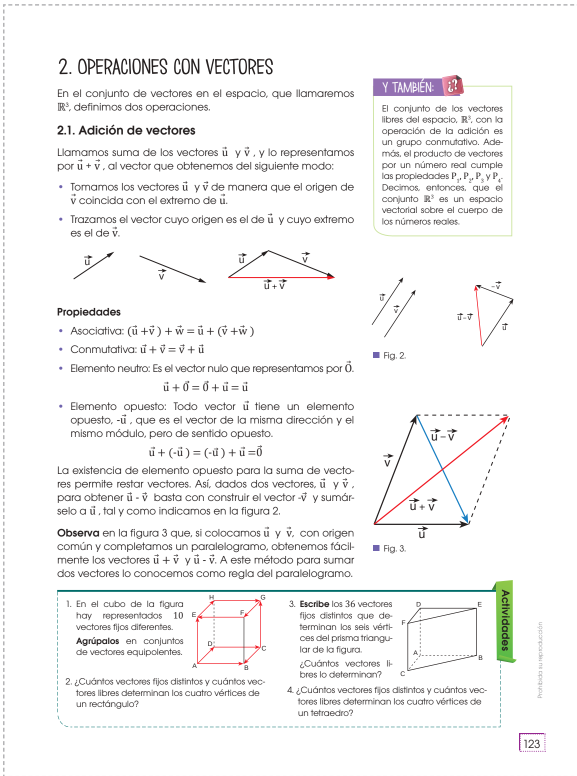
Actividades complementarias

Un pintor ha obtenido el color que quería uno de sus clientes mezclando pequeños frascos de 100 g de diferentes colores. La cantidad empleada ha sido la siguiente...

Prohibida su reproducción

Solucionario

Página 123



2. OPERACIONES CON VECTORES

En el conjunto de vectores en el espacio, que llamaremos $\mathbb{R}^3$, definimos dos operaciones.

2.1. Adición de vectores

Llamamos suma de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y lo representamos por $\vec{u}+\vec{v}$, al vector que obtenemos del siguiente modo:

- Tomamos los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de manera que el origen de $\vec{v}$ coincida con el extremo de $\vec{u}$.
- Trazamos el vector cuyo origen es el de $\vec{u}$ y cuyo extremo es el de $\vec{v}$.

$\vec{u}$ $\vec{v}$ $\vec{u}$ $\vec{v}$ $\vec{u}+\vec{v}$

Propiedades

- Asociativa: $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$
- Conmutativa: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
- Elemento neutro: Es el vector nulo que representamos por $\vec{0}$.

$$\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$$

- Elemento opuesto: Todo vector $\vec{u}$ tiene un elemento opuesto, $-\vec{u}$, que es el vector de la misma dirección y el mismo módulo, pero de sentido opuesto.

$$\vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}$$

La existencia de elemento opuesto para la suma de vectores permite restar vectores. Así, dados dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, para obtener $\vec{u}-\vec{v}$ basta con construir el vector $-\vec{v}$ y sumárselo a $\vec{u}$, tal y como indicamos en la figura 2.

Observa en la figura 3 que, si colocamos $\vec{u}$ y $\vec{v}$, con origen común y completamos un paralelogramo, obtenemos fácilmente los vectores $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$. A este método para sumar dos vectores lo conocemos como regla del paralelogramo.

Y TAMBIÉN: ¿?

El conjunto de los vectores libres del espacio, $\mathbb{R}^3$, con la operación de la adición es un grupo conmutativo. Además, el producto de vectores por un número real cumple las propiedades P_1, P_2, P_3 y P_4. Decimos, entonces, que el conjunto $\mathbb{R}^3$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales.

$\vec{u}$ $\vec{v}$ $-\vec{v}$ $\vec{u}-\vec{v}$ $\vec{u}$

Fig. 2.

$\vec{v}$ $\vec{u}-\vec{v}$ $\vec{u}+\vec{v}$ $\vec{u}$

Fig. 3.

Actividades

1. En el cubo de la figura hay representados 10 vectores fijos diferentes.
   Agrúpalos en conjuntos de vectores equipolentes.
2. ¿Cuántos vectores fijos distintos y cuántos vectores libres determinan los cuatro vértices de un rectángulo?
3. **Escribe** los 36 vectores fijos distintos que determinan los seis vértices del prisma triangular de la figura.
   ¿Cuántos vectores libres lo determinan?
4. ¿Cuántos vectores fijos distintos y cuántos vectores libres determinan los cuatro vértices de un tetraedro?

Prohibida su reproducción

123

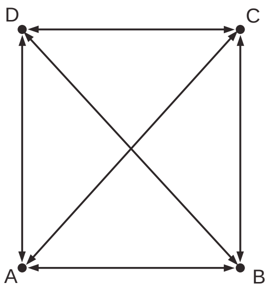
1. VECTORES

1. Son vectores fijos equipolentes los que tienen el mismo módulo, dirección y sentido, luego:

   $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{HG}$ son equipolentes. $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{EH}$ son equipolentes. $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{GF}$ son equipolentes. $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{CG}$ son equipolentes. $\overrightarrow{AE}$ no es equipolente a ningún otro.

2. Un vector fijo es un par de puntos ordenado. Por tanto, tendremos tantos vectores fijos como pares ordenados podamos formar con los cuatro vértices, que son variaciones con repetición de 4 elementos tomados de 2 en 2:

$$VR_{4,\,2} = 4^2 = 16$$



Vectores fijos equipolentes definen el mismo vector libre, por lo que habrá como mucho 16 vectores libres.

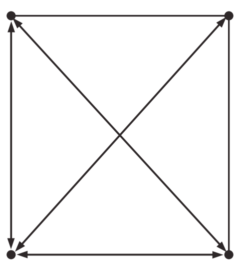
Por cada vector fijo que forma un lado del rectángulo, hay uno equipolente que forma el lado opuesto;

luego debemos restar $\frac{8}{2} = 4$ vectores.

Los vectores fijos que forman la diagonal no son equipolentes a ningún otro, luego cada uno da lugar a un vector libre.

Los vectores fijos que forman los extremos son todos equipolentes, luego debemos restar $4 - 1 = 3$ vectores.

Tenemos, pues, $16 - 4 - 3 = 9$ vectores libres.



3. Los vectores fijos son los pares ordenados de puntos:

$\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$, $\overrightarrow{CC}$, $\overrightarrow{DD}$, $\overrightarrow{EE}$, $\overrightarrow{FF}$;

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DE}$; $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{ED}$;

$\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DF}$; $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{FD}$;

$\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{FE}$;

$\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CF}$; $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{FC}$;

$\overrightarrow{AE}$; $\overrightarrow{EA}$; $\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{DB}$;

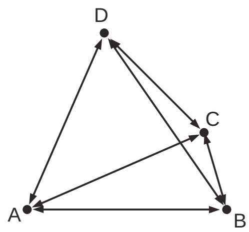
$\overrightarrow{AF}$; $\overrightarrow{FA}$; $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{DC}$;

$\overrightarrow{BF}$; $\overrightarrow{FB}$; $\overrightarrow{CE}$; $\overrightarrow{EC}$.

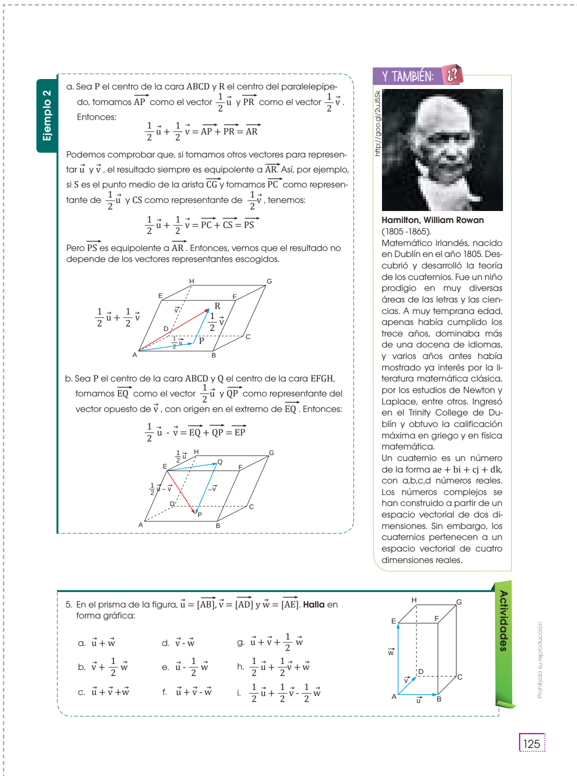
Hemos agrupado los vectores fijos equipolentes al listar los vectores fijos, por lo que tenemos 21 vectores libres distintos.

4. Tenemos tantos vectores fijos como pares ordenados de puntos, o sea:

$$VR_{4,\,2} = 4^2 = 16$$



Prohibida su reproducción



Ejemplo 2

a. Sea P el centro de la cara ABCD y R el centro del paralelepípedo, tomamos $\overrightarrow{AP}$ como el vector $\frac{1}{2}\vec{u}$ y $\overrightarrow{PR}$ como el vector $\frac{1}{2}\vec{v}$. Entonces:

$$\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{AR}$$

Podemos comprobar que, si tomamos otros vectores para representar $\vec{u}$ y $\vec{v}$, el resultado siempre es equipolente a $\overrightarrow{AR}$. Así, por ejemplo, si S es el punto medio de la arista $\overrightarrow{CG}$ y tomamos $\overrightarrow{PC}$ como representante de $\frac{1}{2}\vec{u}$ y CS como representante de $\frac{1}{2}\vec{v}$, tenemos:

$$\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CS}=\overrightarrow{PS}$$

Pero $\overrightarrow{PS}$ es equipolente a $\overrightarrow{AR}$. Entonces, vemos que el resultado no depende de los vectores representantes escogidos.

b. Sea P el centro de la cara ABCD y Q el centro de la cara EFGH, tomamos $\overrightarrow{EQ}$ como el vector $\frac{1}{2}\vec{u}$ y $\overrightarrow{QP}$ como representante del vector opuesto de $\vec{v}$, con origen en el extremo de $\overrightarrow{EQ}$. Entonces:

$$\frac{1}{2}\vec{u}-\vec{v}=\overrightarrow{EQ}+\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{EP}$$

Y TAMBIÉN:

http://goo.gl/2uJ5Sk

Hamilton, William Rowan (1805 -1865).

Matemático irlandés, nacido en Dublín en el año 1805. Descubrió y desarrolló la teoría de los cuaternios. Fue un niño prodigio en muy diversas áreas de las letras y las ciencias. A muy temprana edad, apenas había cumplido los trece años, dominaba más de una docena de idiomas, y varios años antes había mostrado ya interés por la literatura matemática clásica, por los estudios de Newton y Laplace, entre otros. Ingresó en el Trinity College de Dublín y obtuvo la calificación máxima en griego y en física matemática.

Un cuaternio es un número de la forma $ae + bi + cj + dk$, con a,b,c,d números reales. Los números complejos se han construido a partir de un espacio vectorial de dos dimensiones. Sin embargo, los cuaternios pertenecen a un espacio vectorial de cuatro dimensiones reales.

Actividades

5. En el prisma de la figura, $\vec{u}=[\overrightarrow{AB}]$, $\vec{v}=[\overrightarrow{AD}]$ y $\vec{w}=[\overrightarrow{AE}]$. **Halla** en forma gráfica:

a. $\vec{u}+\vec{w}$ d. $\vec{v}-\vec{w}$ g. $\vec{u}+\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{w}$

b. $\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{w}$ e. $\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{w}$ h. $\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}+\vec{w}$

c. $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ f. $\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}$ i. $\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}-\frac{1}{2}\vec{w}$

Prohibida su reproducción

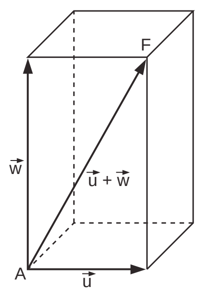
125

Solucionario

2. OPERACIONES CON VECTORES LIBRES

5. *a)* Por la regla del paralelogramo:

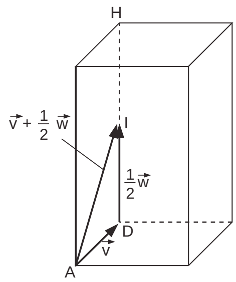
$$\vec{u}+\vec{w}=[\overrightarrow{AF}]$$



b) Si I es el punto medio del lado DH, $\overrightarrow{DI}$ es un representante de $\frac{1}{2}\vec{w}$ con origen en el extremo $\overrightarrow{AD}$, representante de $\vec{v}$.

Por tanto, $\overrightarrow{AI}$ es un representante de $\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{w}$:

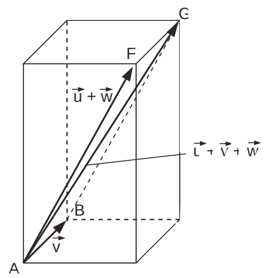
$$\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{w}=[\overrightarrow{AD}]+[\overrightarrow{DI}]=[\overrightarrow{AI}]$$



c) $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{u}+\vec{w}+\vec{v}=(\vec{u}+\vec{w})+\vec{v}$

$\overrightarrow{AF}$ es un representante de $\vec{u}+\vec{w}$ y $\overrightarrow{AB}$ de $\vec{v}$. Por la regla del paralelogramo, $\overrightarrow{AG}$ es un representante de la suma:

$$\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=[\overrightarrow{AG}]$$



Prohibida su reproducción

Solucionario

9. *a)* $5\vec{u} + 6\vec{v} = 5(2, 0, -1) + 6(-3, 1, 2) =$

$= (5 \cdot 2, 5 \cdot 0, 5 \cdot (-1)) + (6 \cdot (-3), 6 \cdot 1, 6 \cdot 2) =$

$= (10, 0, -5) + (-18, 6, 12) =$

$= (10 + (-18), 0 + 6, -5 + 12) = (-8, 6, 7)$

b) $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w} = (2, 0, -1) + (-3, 1, 2) - (4, -2, 7) =$

$= (2 + (-3) - 4, 0 + 1 - (-2), -1 + 2 - 7) =$

$= (-5, 3, -6)$

c) $2\vec{u} - \vec{v} + \dfrac{1}{3}\vec{w} =$

$$= 2(2, 0, -1) - (-3, 1, 2) + \frac{1}{3}(4, -2, 7) =$$

$$= (2 \cdot 2, 2 \cdot 0, 2 \cdot (-1)) - (-3, 1, 2) +$$

$$+\left(\frac{1}{3} \cdot 4, \frac{1}{3} \cdot (-2), \frac{1}{3} \cdot 7\right) =$$

$$= (4, 0, -2) - (-3, 1, 2) + \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right) =$$

$$= \left(4 - (-3) + \frac{4}{3}, 0 - 1 - \frac{2}{3}, -2 - 2 + \frac{7}{3}\right) =$$

$$= \left(\frac{25}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right)$$

10. Debemos hallar tres números reales a, b, c tales que $\vec{s} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v} + c\,\vec{w}$.

Tomando componentes:

$(-2, -1, -2) =$

$= a\ (1, 2, 3) + b\ (-4, 1, 7) + c\ (0, -2, -5) =$

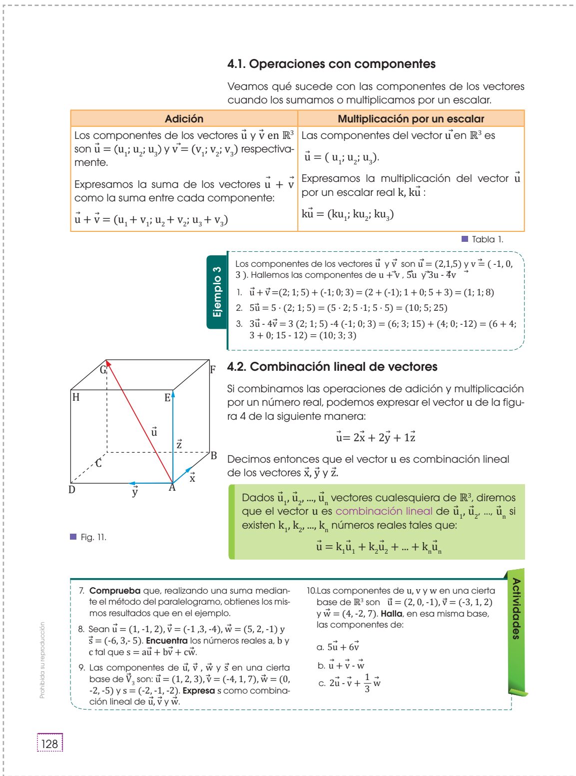
$= (a, 2a, 3a) + (-4b, b, 7b) + (0, -2c, -5c) =$

$= (a - 4b, 2a + b - 2c, 3a + 7b - 5c) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} -2 &= a - 4b \\ -1 &= 2a + b - 2c \\ -2 &= 3a + 7b - 5c \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow a = 2,\ b = 1,\ c = 3$$

La expresión de $\vec{s}$ como combinación lineal de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ es $\vec{s} = 2\vec{u} + \vec{v} + 3\vec{w}$.

Página 128



4.1. Operaciones con componentes

Veamos qué sucede con las componentes de los vectores cuando los sumamos o multiplicamos por un escalar.

Adición	Multiplicación por un escalar
Los componentes de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en $\mathbb{R}^3$ son $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ y $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$ respectivamente. Expresamos la suma de los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ como la suma entre cada componente: $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2; u_3 + v_3)$	Las componentes del vector $\vec{u}$ en $\mathbb{R}^3$ es $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$. Expresamos la multiplicación del vector $\vec{u}$ por un escalar real k, $k\vec{u}$: $k\vec{u} = (ku_1; ku_2; ku_3)$

Tabla 1.

Ejemplo 3

Los componentes de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son $\vec{u} = (2,1,5)$ y $\vec{v} = (-1, 0, 3)$. Hallemos las componentes de $\vec{u} + \vec{v}$, $5\vec{u}$ y $3\vec{u} - 4\vec{v}$

1. $\vec{u} + \vec{v} = (2; 1; 5) + (-1; 0; 3) = (2 + (-1); 1 + 0; 5 + 3) = (1; 1; 8)$
2. $5\vec{u} = 5 \cdot (2; 1; 5) = (5 \cdot 2; 5 \cdot 1; 5 \cdot 5) = (10; 5; 25)$
3. $3\vec{u} - 4\vec{v} = 3\ (2; 1; 5) - 4\ (-1; 0; 3) = (6; 3; 15) + (4; 0; -12) = (6 + 4; 3 + 0; 15 - 12) = (10; 3; 3)$

Fig. 11.

4.2. Combinación lineal de vectores

Si combinamos las operaciones de adición y multiplicación por un número real, podemos expresar el vector u de la figura 4 de la siguiente manera:

$$\vec{u} = 2\vec{x} + 2\vec{y} + 1\vec{z}$$

Decimos entonces que el vector u es combinación lineal de los vectores $\vec{x}$, $\vec{y}$ y $\vec{z}$.

Dados $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^3$, diremos que el vector u es combinación lineal de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ si existen $k_1, k_2, ..., k_n$ números reales tales que:

$$\vec{u} = k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + ... + k_n\vec{u}_n$$

Actividades

7. **Comprueba** que, realizando una suma mediante el método del paralelogramo, obtienes los mismos resultados que en el ejemplo.
8. Sean $\vec{u} = (1, -1, 2)$, $\vec{v} = (-1, 3, -4)$, $\vec{w} = (5, 2, -1)$ y $\vec{s} = (-6, 3, -5)$. **Encuentra** los números reales a, b y c tal que $s = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.
9. Las componentes de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ y $\vec{s}$ en una cierta base de $\vec{V}_3$ son: $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (-4, 1, 7)$, $\vec{w} = (0, -2, -5)$ y $s = (-2, -1, -2)$. **Expresa** s como combinación lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.
10. Las componentes de u, v y w en una cierta base de $\mathbb{R}^3$ son $\vec{u} = (2, 0, -1)$, $\vec{v} = (-3, 1, 2)$ y $\vec{w} = (4, -2, 7)$. **Halla**, en esa misma base, las componentes de:
    a. $5\vec{u} + 6\vec{v}$
    b. $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$
    c. $2\vec{u} - \vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w}$

Prohibida su reproducción

Prohibida su reproducción

Página 129

4.2. Componentes de un vector determinado por dos puntos

Ahora veremos cómo determinar un vector $\overrightarrow{PQ}$ a partir de las coordenadas de P y Q.

Observa la figura.

$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} \Rightarrow \vec{p} + \overrightarrow{PQ} = \vec{q}$

$\overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p}$

Si $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $Q = (q_1, q_2, q_3)$ tenemos:

$\overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p} = (q_1, q_2, q_3) - (p_1, p_2, p_3)$

$\overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$

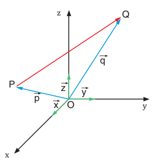


Fig. 12.

4.3. Punto medio de un segmento

Consideremos un segmento en el espacio, de extremos $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$.

Si $M = (m_1, m_2, m_3)$ es su punto medio, se cumple que:

$$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$$

Si calculamos las componentes de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AM}$, sustituimos en la igualdad anterior e igualamos componentes, tenemos:

$$(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) = 2(m_1 - a_1, m_2 - a_2, m_3 - a_3)$$

$$\begin{cases} b_1 - a_1 = 2(m_1 - a_1) \\ b_2 - a_2 = 2(m_2 - a_2) \\ b_3 - a_3 = 2(m_3 - a_3) \end{cases}$$

Si operamos y despejamos m_1, m_2 y m_3, obtenemos:

$$m_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \qquad m_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} \qquad m_3 = \frac{a_3 + b_3}{2}$$

Ejemplo 4

Hallemos las coordenadas del punto medio del segmento de extremos $A = (1, 5, -3)$ y $B = (1, 3, -1)$.
Aplicamos las fórmulas correspondientes y obtenemos:

$$m_1 = \frac{1+1}{2} = 1; \; m_2 = \frac{5+3}{2} = 4; \; m_3 = \frac{(-3)+(-1)}{2} = -2, \text{ por lo tanto } M = (1,4,-2)$$

Actividades

11. Dados los puntos $A = (7, 2, -1)$ y $B = (1, 6, -3)$, **determina** las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$.

12. **Responde**: ¿Cuál será el extremo del vector $\overrightarrow{AB}$ si colocamos su origen en el punto $C = (3, 4, -5)$?

Prohibida su reproducción

129

Orientación didáctica

- Debemos tener encuentra que siempre al restar dos vectores, la dirección del vector diferencia, va en el sentido del final del primer vector involucrado en esa resta:

  En la figura 12, el vector $\overrightarrow{PQ}$, apunta hacia el final del vector $\overrightarrow{OQ}$, por lo tanto, el vector $\overrightarrow{PQ}$ es el resultado de restar al vector $\overrightarrow{OQ}$ el vector $\overrightarrow{OP}$.

  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$

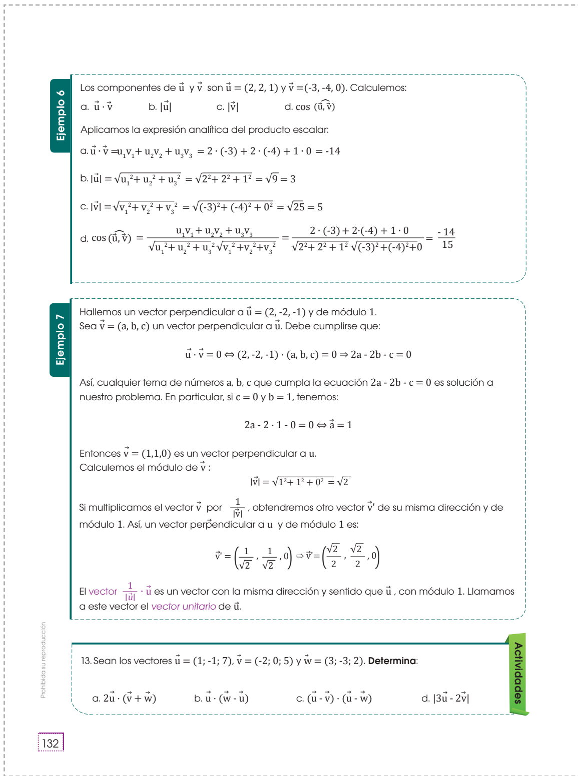
Solucionario

11. < -6, 4, -2 >

12. < -3, 8, -7 >

Prohibida su reproducción

Página 132



Ejemplo 6

Los componentes de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son $\vec{u} = (2, 2, 1)$ y $\vec{v} = (-3, -4, 0)$. Calculemos:

a. $\vec{u} \cdot \vec{v}$ b. $|\vec{u}|$ c. $|\vec{v}|$ d. $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

Aplicamos la expresión analítica del producto escalar:

a. $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 2 \cdot (-3) + 2 \cdot (-4) + 1 \cdot 0 = -14$

b. $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$

c. $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$

d. $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} = \dfrac{2 \cdot (-3) + 2 \cdot (-4) + 1 \cdot 0}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + 0}} = \dfrac{-14}{15}$

Ejemplo 7

Hallemos un vector perpendicular a $\vec{u} = (2, -2, -1)$ y de módulo 1.
Sea $\vec{v} = (a, b, c)$ un vector perpendicular a $\vec{u}$. Debe cumplirse que:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (2, -2, -1) \cdot (a, b, c) = 0 \Rightarrow 2a - 2b - c = 0$$

Así, cualquier terna de números a, b, c que cumpla la ecuación $2a - 2b - c = 0$ es solución a nuestro problema. En particular, si $c = 0$ y $b = 1$, tenemos:

$$2a - 2 \cdot 1 - 0 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 1$$

Entonces $\vec{v} = (1,1,0)$ es un vector perpendicular a u.
Calculemos el módulo de $\vec{v}$:

$$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

Si multiplicamos el vector $\vec{v}$ por $\frac{1}{|\vec{v}|}$, obtendremos otro vector $\vec{v}'$ de su misma dirección y de módulo 1. Así, un vector perpendicular a u y de módulo 1 es:

$$\vec{v}' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \Rightarrow \vec{v}' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

El vector $\frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u}$ es un vector con la misma dirección y sentido que $\vec{u}$, con módulo 1. Llamamos a este vector el *vector unitario* de $\vec{u}$.

Actividades

13. Sean los vectores $\vec{u} = (1; -1; 7)$, $\vec{v} = (-2; 0; 5)$ y $\vec{w} = (3; -3; 2)$. **Determina**:

a. $2\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$ b. $\vec{u} \cdot (\vec{w} - \vec{u})$ c. $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{w})$ d. $|3\vec{u} - 2\vec{v}|$

Prohibida su reproducción

132

Orientación didáctica

- Tomar en cuenta que todo vector, puede ser representado por la multiplicación entre su módulo y su vector unitario ($\overrightarrow{\mu V}$).

$$\vec{V} = |\vec{V}| \cdot \overrightarrow{\mu V}$$

Solucionario

a. 106

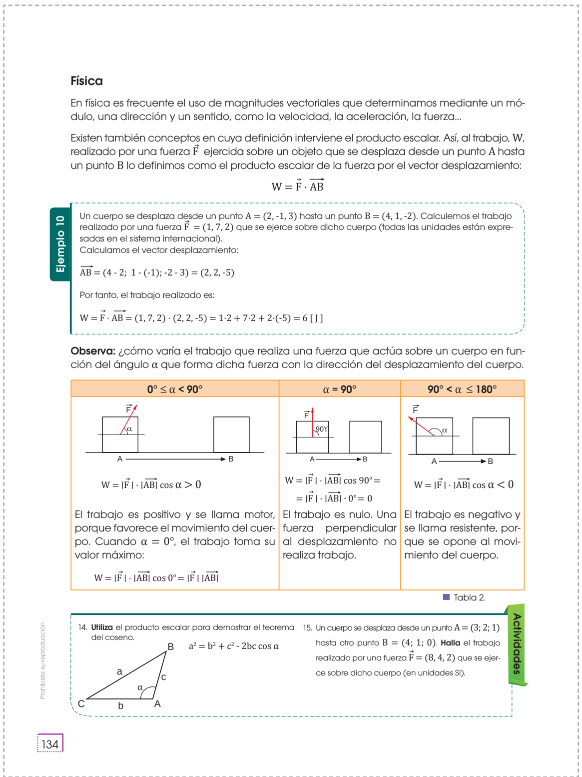
b. -31

c. 2

d. 198

Prohibida su reproducción

Página 133



Física

En física es frecuente el uso de magnitudes vectoriales que determinamos mediante un módulo, una dirección y un sentido, como la velocidad, la aceleración, la fuerza...

Existen también conceptos en cuya definición interviene el producto escalar. Así, al trabajo, W, realizado por una fuerza $\vec{F}$ ejercida sobre un objeto que se desplaza desde un punto A hasta un punto B lo definimos como el producto escalar de la fuerza por el vector desplazamiento:

$$W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Ejemplo 10

Un cuerpo se desplaza desde un punto $A = (2, -1, 3)$ hasta un punto $B = (4, 1, -2)$. Calculemos el trabajo realizado por una fuerza $\vec{F} = (1, 7, 2)$ que se ejerce sobre dicho cuerpo (todas las unidades están expresadas en el sistema internacional).
Calculamos el vector desplazamiento:

$\overrightarrow{AB} = (4 - 2;\ 1 - (-1); -2 - 3) = (2, 2, -5)$

Por tanto, el trabajo realizado es:

$W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = (1, 7, 2) \cdot (2, 2, -5) = 1{\cdot}2 + 7{\cdot}2 + 2{\cdot}(-5) = 6\ [\,J\,]$

Observa: ¿cómo varía el trabajo que realiza una fuerza que actúa sobre un cuerpo en función del ángulo α que forma dicha fuerza con la dirección del desplazamiento del cuerpo.

$0° \leq \alpha < 90°$	$\alpha = 90°$	$90° < \alpha \leq 180°$
$W = \lvert\vec{F}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{AB}\rvert \cos\alpha > 0$	$W = \lvert\vec{F}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{AB}\rvert \cos 90° = \lvert\vec{F}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{AB}\rvert \cdot 0° = 0$	$W = \lvert\vec{F}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{AB}\rvert \cos\alpha < 0$
El trabajo es positivo y se llama motor, porque favorece el movimiento del cuerpo. Cuando $\alpha = 0°$, el trabajo toma su valor máximo: $W = \lvert\vec{F}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{AB}\rvert \cos 0° = \lvert\vec{F}\rvert\,\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	El trabajo es nulo. Una fuerza perpendicular al desplazamiento no realiza trabajo.	El trabajo es negativo y se llama resistente, porque se opone al movimiento del cuerpo.

Tabla 2.

Actividades

14. **Utiliza** el producto escalar para demostrar el teorema del coseno.
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$

15. Un cuerpo se desplaza desde un punto $A = (3; 2; 1)$ hasta otro punto $B = (4; 1; 0)$. **Halla** el trabajo realizado por una fuerza $\vec{F} = (8, 4, 2)$ que se ejerce sobre dicho cuerpo (en unidades SI).

Prohibida su reproducción

134

Orientación didáctica

Otra aplicación del producto escalar es la usada en la llamada "geometría no-euclídea" o también llamada Geometría de Riemann, que sirvió de base matemática para que el Físico Albert Einstein postulase su Teoría General de la Relatividad, en dónde se usan los Tensores métricos. Para que el docente amplíe su conocimiento, puede acceder al siguiente link, donde obtentrá más información sobre este tema.

- https://goo.gl/9YWn5c

Solucionario

14. Demostrar

15. -2 Newtons

Prohibida su reproducción

Orientación didáctica

- Existen otras formas de resolver el determinante asociado al producto vectorial, como el método diagonal duplicando columnas o también se puede hacer duplicando filas

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

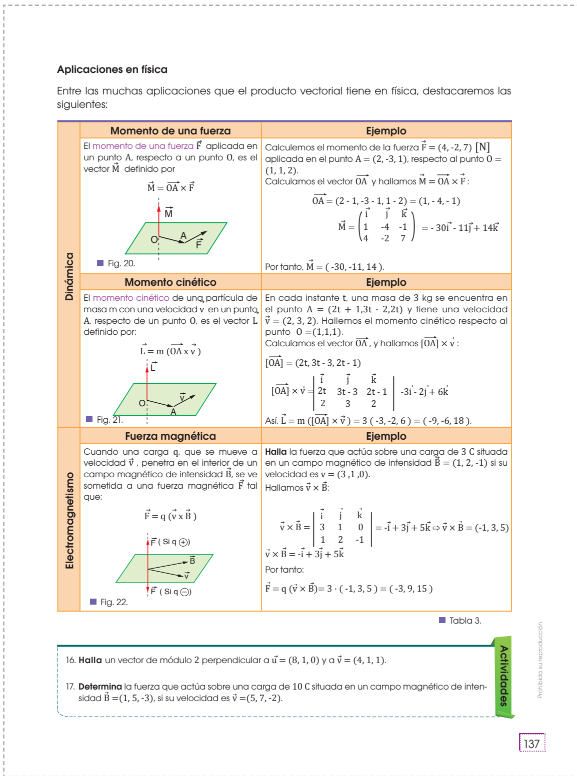
$$= 6\vec{i} + 12\vec{j} + 2\vec{k} - 4\vec{j} - 4\vec{i} - 9\vec{k} = 2\vec{i} + 8\vec{j} - 7\vec{k}$$

Solucionario

16. $\pm\left(\frac{2}{9}, -\frac{16}{9}, \frac{8}{9}\right)$

17. $< -110, 130, 180 >$

Página 137



Aplicaciones en física

Entre las muchas aplicaciones que el producto vectorial tiene en física, destacaremos las siguientes:

	Momento de una fuerza	Ejemplo
Dinámica	El momento de una fuerza $\vec{F}$ aplicada en un punto A, respecto a un punto O, es el vector $\vec{M}$ definido por $\vec{M} = \overrightarrow{OA} \times \vec{F}$ Fig. 20.	Calculemos el momento de la fuerza $\vec{F} = (4, -2, 7)$ [N] aplicada en el punto $A = (2, -3, 1)$, respecto al punto $O = (1, 1, 2)$. Calculamos el vector $\overrightarrow{OA}$ y hallamos $\vec{M} = \overrightarrow{OA} \times \vec{F}$: $\overrightarrow{OA} = (2 - 1, -3 - 1, 1 - 2) = (1, -4, -1)$ $\vec{M} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -4 & -1 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix} = -30\vec{i} - 11\vec{j} + 14\vec{k}$ Por tanto, $\vec{M} = (-30, -11, 14)$.
	Momento cinético	**Ejemplo**
Dinámica	El momento cinético de una partícula de masa m con una velocidad $\vec{v}$ en un punto A, respecto de un punto O, es el vector $\vec{L}$ definido por: $\vec{L} = m(\overrightarrow{OA} \times \vec{v})$ Fig. 21.	En cada instante t, una masa de 3 kg se encuentra en el punto $A = (2t + 1, 3t - 2, 2t)$ y tiene una velocidad $\vec{v} = (2, 3, 2)$. Hallemos el momento cinético respecto al punto $O = (1,1,1)$. Calculamos el vector $\overrightarrow{OA}$, y hallamos $[\overrightarrow{OA}] \times \vec{v}$: $[\overrightarrow{OA}] = (2t, 3t - 3, 2t - 1)$ $[\overrightarrow{OA}] \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2t & 3t - 3 & 2t - 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} -3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$ Así, $\vec{L} = m([\overrightarrow{OA}] \times \vec{v}) = 3(-3, -2, 6) = (-9, -6, 18)$.
	Fuerza magnética	**Ejemplo**
Electromagnetismo	Cuando una carga q, que se mueve a velocidad $\vec{v}$, penetra en el interior de un campo magnético de intensidad $\vec{B}$, se ve sometida a una fuerza magnética $\vec{F}$ tal que: $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ $\vec{F}$ (Si q ⊕) $\vec{F}$ (Si q ⊖) Fig. 22.	**Halla** la fuerza que actúa sobre una carga de 3 C situada en un campo magnético de intensidad $\vec{B} = (1, 2, -1)$ si su velocidad es $v = (3, 1, 0)$. Hallamos $\vec{v} \times \vec{B}$: $\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k} \Rightarrow \vec{v} \times \vec{B} = (-1, 3, 5)$ $\vec{v} \times \vec{B} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ Por tanto: $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) = 3 \cdot (-1, 3, 5) = (-3, 9, 15)$

Tabla 3.

Actividades

16. **Halla** un vector de módulo 2 perpendicular a $\vec{u} = (8, 1, 0)$ y a $\vec{v} = (4, 1, 1)$.

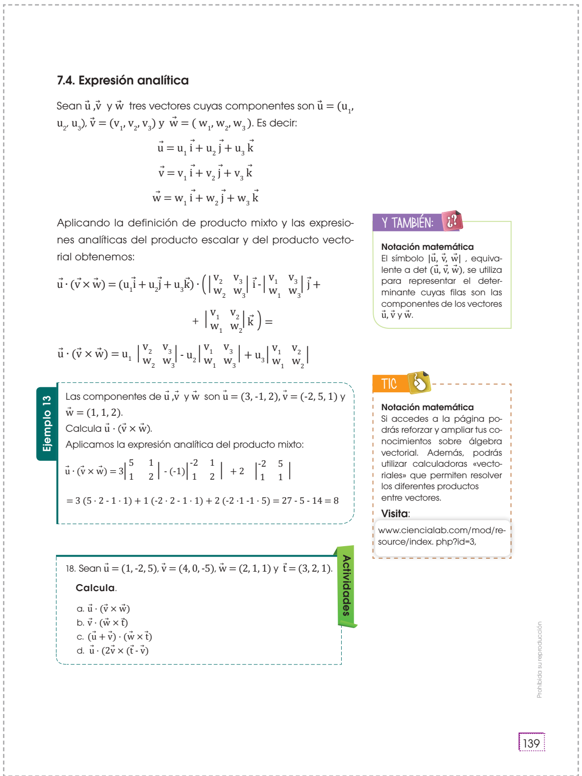
17. **Determina** la fuerza que actúa sobre una carga de 10 C situada en un campo magnético de intensidad $\vec{B} = (1, 5, -3)$, si su velocidad es $\vec{v} = (5, 7, -2)$.

Prohibida su reproducción

137

Prohibida su reproducción

Página 139



7.4. Expresión analítica

Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tres vectores cuyas componentes son $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$. Es decir:

$$\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$$

$$\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$$

$$\vec{w} = w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}$$

Aplicando la definición de producto mixto y las expresiones analíticas del producto escalar y del producto vectorial obtenemos:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = (u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k})\cdot\left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \right.$$

$$\left. + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}\vec{k}\right) =$$

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = u_1\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}$$

Ejemplo 13

Las componentes de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son $\vec{u} = (3, -1, 2)$, $\vec{v} = (-2, 5, 1)$ y $\vec{w} = (1, 1, 2)$.

Calcula $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$.

Aplicamos la expresión analítica del producto mixto:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = 3\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3\,(5\cdot 2 - 1\cdot 1) + 1\,(-2\cdot 2 - 1\cdot 1) + 2\,(-2\cdot 1 - 1\cdot 5) = 27 - 5 - 14 = 8$$

Actividades

18. Sean $\vec{u} = (1, -2, 5)$, $\vec{v} = (4, 0, -5)$, $\vec{w} = (2, 1, 1)$ y $\vec{t} = (3, 2, 1)$.

Calcula.

a. $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$
b. $\vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{t})$
c. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{w}\times\vec{t})$
d. $\vec{u}\cdot(2\vec{v}\times(\vec{t}-\vec{v})$

Y TAMBIÉN: ¿?

Notación matemática
El símbolo $|\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}|$, equivalente a det $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, se utiliza para representar el determinante cuyas filas son las componentes de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

TIC

Notación matemática
Si accedes a la página podrás reforzar y ampliar tus conocimientos sobre álgebra vectorial. Además, podrás utilizar calculadoras «vectoriales» que permiten resolver los diferentes productos entre vectores.

Visita:
www.ciencialab.com/mod/resource/index. php?id=3,

Prohibida su reproducción

Orientación didáctica

En este tipo de ejercicios, debemos tener en cuenta que el resultado del producto vectorial, es otro vector y que el resultado del producto interno entre dos vectores, da como resultado un escalar. Además de poder especial atención en los signos de agrupación, para evitar errores en el proceso.

También puedes encontrar en tutoriales de Youtube, acerca de la aplicación del concepto de permutación cíclica, para que los cálculos sean más rápidos y óptimos en el tema de productos mixtos.

Solucionario

a. 53;

b. -9;

c. -7;

d. -308

Prohibida su reproducción

Solucionario

1. Dibujar
2. $\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{w}$, $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$, $\vec{u} + \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$, $2\vec{u} + 2\vec{v}$
3. Demostar
4. a. $< -1, -5, -1 >$

   b. $< \frac{1}{6}, \frac{13}{6}, \frac{2}{3} >$

   c. $< \frac{5}{2}, \frac{21}{5}, -\frac{59}{10} >$
5. $\vec{x} = < 1, 1, 1 >$, $\vec{y} = < 4, 3, 2 >$
6. a. $\vec{x} = \vec{u} + 3\vec{v} + 2\vec{w}$

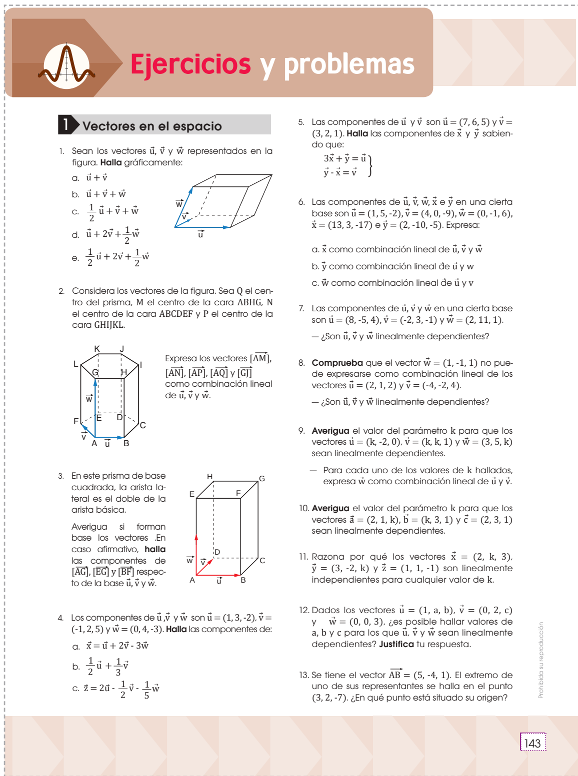
   b. $\vec{y} = -2\vec{u} + \vec{v}$

   c. No es posible
7. Demostrar
8. Demostrar
9. $k = -1 \Rightarrow \vec{w} = -2\vec{u} - \vec{v}$

   $k = 2 \Rightarrow \vec{w} = \frac{-1}{2}\vec{u} + 2\vec{v}$

   $k = -3 \Rightarrow \vec{w} = -2\vec{u} - 3\vec{v}$
10. $k = 2$ y $k = \frac{1}{3}$
11. Demostrar
12. Demostrar

Página 143



Ejercicios y problemas

1 Vectores en el espacio

1. Sean los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ representados en la figura. **Halla** gráficamente:
   a. $\vec{u} + \vec{v}$
   b. $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
   c. $\frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
   d. $\vec{u} + 2\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$
   e. $\frac{1}{2}\vec{u} + 2\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$
2. Considera los vectores de la figura. Sea Q el centro del prisma, M el centro de la cara ABHG, N el centro de la cara ABCDEF y P el centro de la cara GHIJKL.

   Expresa los vectores $[\overrightarrow{AM}]$, $[\overrightarrow{AN}]$, $[\overrightarrow{AP}]$, $[\overrightarrow{AQ}]$ y $[\overrightarrow{GJ}]$ como combinación lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.
3. En este prisma de base cuadrada, la arista lateral es el doble de la arista básica.

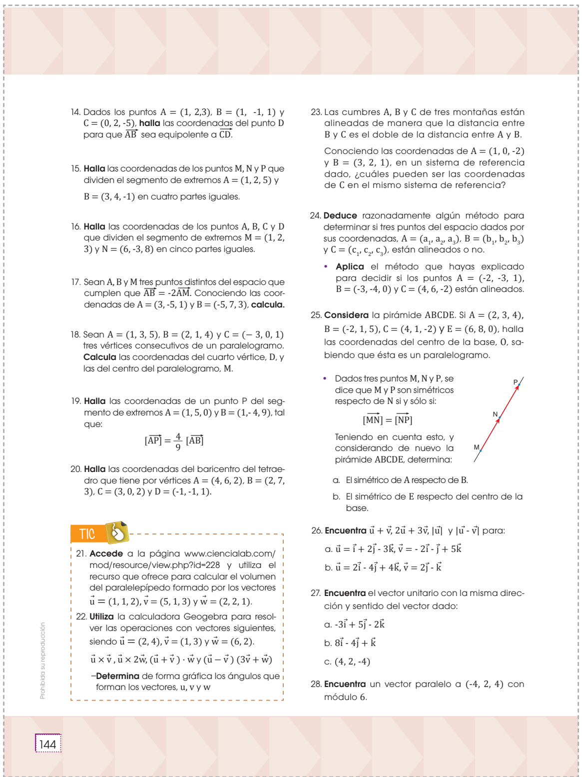
   Averigua si forman base los vectores .En caso afirmativo, **halla** las componentes de $[\overrightarrow{AG}]$, $[\overrightarrow{EG}]$ y $[\overrightarrow{BF}]$ respecto de la base $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.
4. Los componentes de $\vec{u}$,$\vec{v}$ y $\vec{w}$ son $\vec{u} = (1, 3, -2)$, $\vec{v} = (-1, 2, 5)$ y $\vec{w} = (0, 4, -3)$. **Halla** las componentes de:
   a. $\vec{x} = \vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w}$
   b. $\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$
   c. $\vec{z} = 2\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{5}\vec{w}$
5. Las componentes de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son $\vec{u} = (7, 6, 5)$ y $\vec{v} = (3, 2, 1)$. **Halla** las componentes de $\vec{x}$ y $\vec{y}$ sabiendo que:
   $$\left.\begin{array}{l} 3\vec{x} + \vec{y} = \vec{u} \\ \vec{y} - \vec{x} = \vec{v} \end{array}\right\}$$
6. Las componentes de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$ e $\vec{y}$ en una cierta base son $\vec{u} = (1, 5, -2)$, $\vec{v} = (4, 0, -9)$, $\vec{w} = (0, -1, 6)$, $\vec{x} = (13, 3, -17)$ e $\vec{y} = (2, -10, -5)$. Expresa:
   a. $\vec{x}$ como combinación lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$
   b. $\vec{y}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y w
   c. $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y v
7. Las componentes de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ en una cierta base son $\vec{u} = (8, -5, 4)$, $\vec{v} = (-2, 3, -1)$ y $\vec{w} = (2, 11, 1)$.
   — ¿Son $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ linealmente dependientes?
8. **Comprueba** que el vector $\vec{w} = (1, -1, 1)$ no puede expresarse como combinación lineal de los vectores $\vec{u} = (2, 1, 2)$ y $\vec{v} = (-4, -2, 4)$.
   — ¿Son $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ linealmente dependientes?
9. **Averigua** el valor del parámetro k para que los vectores $\vec{u} = (k, -2, 0)$, $\vec{v} = (k, k, 1)$ y $\vec{w} = (3, 5, k)$ sean linealmente dependientes.
   — Para cada uno de los valores de k hallados, expresa $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
10. **Averigua** el valor del parámetro k para que los vectores $\vec{a} = (2, 1, k)$, $\vec{b} = (k, 3, 1)$ y $\vec{c} = (2, 3, 1)$ sean linealmente dependientes.
11. Razona por qué los vectores $\vec{x} = (2, k, 3)$, $\vec{y} = (3, -2, k)$ y $\vec{z} = (1, 1, -1)$ son linealmente independientes para cualquier valor de k.
12. Dados los vectores $\vec{u} = (1, a, b)$, $\vec{v} = (0, 2, c)$ y $\vec{w} = (0, 0, 3)$, ¿es posible hallar valores de a, b y c para los que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente dependientes? **Justifica** tu respuesta.
13. Se tiene el vector $\overrightarrow{AB} = (5, -4, 1)$. El extremo de uno de sus representantes se halla en el punto $(3, 2, -7)$. ¿En qué punto está situado su origen?

Prohibida su reproducción

143

Prohibida su reproducción

Página 144


14. Dados los puntos $A = (1, 2,3)$, $B = (1, -1, 1)$ y $C = (0, 2, -5)$, **halla** las coordenadas del punto D para que $\overrightarrow{AB}$ sea equipolente a $\overrightarrow{CD}$.

15. **Halla** las coordenadas de los puntos M, N y P que dividen el segmento de extremos $A = (1, 2, 5)$ y $B = (3, 4, -1)$ en cuatro partes iguales.

16. **Halla** las coordenadas de los puntos A, B, C y D que dividen el segmento de extremos $M = (1, 2, 3)$ y $N = (6, -3, 8)$ en cinco partes iguales.

17. Sean A, B y M tres puntos distintos del espacio que cumplen que $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AM}$. Conociendo las coordenadas de $A = (3, -5, 1)$ y $B = (-5, 7, 3)$, **calcula.**

18. Sean $A = (1, 3, 5)$, $B = (2, 1, 4)$ y $C = (-3, 0, 1)$ tres vértices consecutivos de un paralelogramo. **Calcula** las coordenadas del cuarto vértice, D, y las del centro del paralelogramo, M.

19. **Halla** las coordenadas de un punto P del segmento de extremos $A = (1, 5, 0)$ y $B = (1, -4, 9)$, tal que:

$$[\overrightarrow{AP}] = \frac{4}{9}\,[\overrightarrow{AB}]$$

20. **Halla** las coordenadas del baricentro del tetraedro que tiene por vértices $A = (4, 6, 2)$, $B = (2, 7, 3)$, $C = (3, 0, 2)$ y $D = (-1, -1, 1)$.

TIC

21. **Accede** a la página www.ciencialab.com/mod/resource/view.php?id=228 y utiliza el recurso que ofrece para calcular el volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\vec{u} = (1, 1, 2)$, $\vec{v} = (5, 1, 3)$ y $\vec{w} = (2, 2, 1)$.

22. **Utiliza** la calculadora Geogebra para resolver las operaciones con vectores siguientes, siendo $\vec{u} = (2, 4)$, $\vec{v} = (1, 3)$ y $\vec{w} = (6, 2)$.

$\vec{u} \times \vec{v}$, $\vec{u} \times 2\vec{w}$, $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}$ y $(\vec{u} - \vec{v})\,(3\vec{v} + \vec{w})$

–**Determina** de forma gráfica los ángulos que forman los vectores, u, v y w

23. Las cumbres A, B y C de tres montañas están alineadas de manera que la distancia entre B y C es el doble de la distancia entre A y B.

Conociendo las coordenadas de $A = (1, 0, -2)$ y $B = (3, 2, 1)$, en un sistema de referencia dado, ¿cuáles pueden ser las coordenadas de C en el mismo sistema de referencia?

24. **Deduce** razonadamente algún método para determinar si tres puntos del espacio dados por sus coordenadas, $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ y $C = (c_1, c_2, c_3)$, están alineados o no.

- **Aplica** el método que hayas explicado para decidir si los puntos $A = (-2, -3, 1)$, $B = (-3, -4, 0)$ y $C = (4, 6, -2)$ están alineados.

25. **Considera** la pirámide ABCDE. Si $A = (2, 3, 4)$, $B = (-2, 1, 5)$, $C = (4, 1, -2)$ y $E = (6, 8, 0)$, halla las coordenadas del centro de la base, O, sabiendo que ésta es un paralelogramo.

- Dados tres puntos M, N y P, se dice que M y P son simétricos respecto de N si y sólo si:

$$[\overrightarrow{MN}] = [\overrightarrow{NP}]$$

Teniendo en cuenta esto, y considerando de nuevo la pirámide ABCDE, determina:

a. El simétrico de A respecto de B.

b. El simétrico de E respecto del centro de la base.

26. **Encuentra** $\vec{u} + \vec{v}$, $2\vec{u} + 3\vec{v}$, $|\vec{u}|$ y $|\vec{u} - \vec{v}|$ para:

a. $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{v} = -2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$

b. $\vec{u} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{j} - \vec{k}$

27. **Encuentra** el vector unitario con la misma dirección y sentido del vector dado:

a. $-3\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$

b. $8\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$

c. $(4, 2, -4)$

28. **Encuentra** un vector paralelo a $(-4, 2, 4)$ con módulo 6.

Prohibida su reproducción

Solucionario

14. $D = (0, -1, -7)$

15. $M = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$

$N = (2, 3, 2)$,

$P = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$

16. $A = (2, 1, 4)$

$B = (3, 0, 5)$

$C = (4, -1, 6)$

$D = (5, -2, 7)$

17. a. $M = (7, -11, 0)$

b. $k = \frac{1}{3}$

18. $D = (-4, 2, 2)$,

$M = \left(-1, \frac{3}{2}, 3\right)$

19. $P = (1, 1, 4)$

20. $H = (2, 3, 2)$

21. Resolver usando TICS

22. Resolver usando TICS

23. $C = (-1, -2, -5)$ o $C = (7, 6, 7)$

24. Demostrar

25. $O = (3, 2, 1)$; a) $(-6, -1, 6)$; b) $(0, -4, 2)$

Prohibida su reproducción

Solucionario

26. a. $-\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $-4\vec{i} + \vec{j} + 9\vec{k}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{82}$

    b. $2\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $4\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$, 6, $\sqrt{65}$

27. $\left(-\frac{3}{\sqrt{38}}, \frac{5}{\sqrt{38}} - \sqrt{\frac{2}{19}}\right)$

    $\left(\frac{8}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{1}{9}\right)$

    $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

28. (-4, 2, 4), (4, -2, -4)

29. Demostrar

30. a. Demostrar

    b. 96.379°, 27.266°, 63.612°

31. Buscar

32. P = (0,4,6), Q = (3,2,2)

33. $P = \left(\frac{16}{3}, 0, \frac{7}{3}\right)$, $P = \left(\frac{11}{3}, 2, \frac{5}{3}\right)$

34. $M = \left(-\frac{2}{5}, 5, \frac{7}{5}\right)$, $N = \left(\frac{1}{5}, 6, \frac{9}{5}\right)$,

    $P = \left(\frac{4}{5}, 7, \frac{11}{5}\right)$, $Q = \left(\frac{7}{5}, 8, \frac{13}{5}\right)$

35. $\vec{x}$ = <1, 0, 2>, $\vec{y}$ = <1, 1, 1>

36. Utilizar TICs para solución

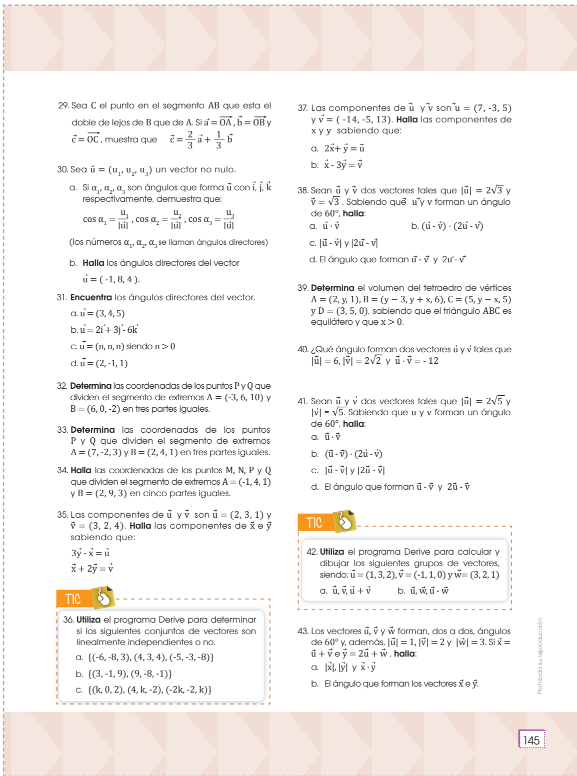
37. Buscar

38. a. 3; b. 18; c. 3; $\sqrt{39}$; d. 16,10°

39. $2\sqrt{5}\,u^3$

40. 135°

Página 145



29. Sea C el punto en el segmento AB que esta el doble de lejos de B que de A. Si $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ y $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, muestra que $\vec{c} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$

30. Sea $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ un vector no nulo.

    a. Si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ son ángulos que forma $\vec{u}$ con $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ respectivamente, demuestra que:

    $\cos\alpha_1 = \frac{u_1}{|\vec{u}|}$, $\cos\alpha_2 = \frac{u_2}{|\vec{u}|}$, $\cos\alpha_3 = \frac{u_3}{|\vec{u}|}$

    (los números $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ se llaman ángulos directores)

    b. **Halla** los ángulos directores del vector $\vec{u} = (-1, 8, 4)$.

31. **Encuentra** los ángulos directores del vector.

    a. $\vec{u} = (3, 4, 5)$

    b. $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}$

    c. $\vec{u} = (n, n, n)$ siendo $n > 0$

    d. $\vec{u} = (2, -1, 1)$

32. **Determina** las coordenadas de los puntos P y Q que dividen el segmento de extremos A = (-3, 6, 10) y B = (6, 0, -2) en tres partes iguales.

33. **Determina** las coordenadas de los puntos P y Q que dividen el segmento de extremos A = (7, -2, 3) y B = (2, 4, 1) en tres partes iguales.

34. **Halla** las coordenadas de los puntos M, N, P y Q que dividen el segmento de extremos A = (-1, 4, 1) y B = (2, 9, 3) en cinco partes iguales.

35. Las componentes de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son $\vec{u} = (2, 3, 1)$ y $\vec{v} = (3, 2, 4)$. **Halla** las componentes de $\vec{x}$ e $\vec{y}$ sabiendo que:

    $3\vec{y} - \vec{x} = \vec{u}$

    $\vec{x} + 2\vec{y} = \vec{v}$

TIC

36. **Utiliza** el programa Derive para determinar si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes o no.

    a. {(-6, -8, 3), (4, 3, 4), (-5, -3, -8)}

    b. {(3, -1, 9), (9, -8, -1)}

    c. {(k, 0, 2), (4, k, -2), (-2k, -2, k)}

37. Las componentes de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son $\vec{u} = (7, -3, 5)$ y $\vec{v} = (-14, -5, 13)$. **Halla** las componentes de x y y sabiendo que:

    a. $2\vec{x} + \vec{y} = \vec{u}$

    b. $\vec{x} - 3\vec{y} = \vec{v}$

38. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores tales que $|\vec{u}| = 2\sqrt{3}$ y $\vec{v} = \sqrt{3}$. Sabiendo que $\vec{u}$ y v forman un ángulo de 60°, **halla**:

    a. $\vec{u} \cdot \vec{v}$

    b. $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (2\vec{u} - \vec{v})$

    c. $|\vec{u} - \vec{v}|$ y $|2\vec{u} - \vec{v}|$

    d. El ángulo que forman $\vec{u} - \vec{v}$ y $2\vec{u} - \vec{v}$

39. **Determina** el volumen del tetraedro de vértices A = (2, y, 1), B = (y − 3, y + x, 6), C = (5, y − x, 5) y D = (3, 5, 0), sabiendo que el triángulo ABC es equilátero y que x > 0.

40. ¿Qué ángulo forman dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $|\vec{u}| = 6$, $|\vec{v}| = 2\sqrt{2}$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = -12$

41. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores tales que $|\vec{u}| = 2\sqrt{5}$ y $|\vec{v}| = \sqrt{5}$. Sabiendo que u y v forman un ángulo de 60°, **halla**:

    a. $\vec{u} \cdot \vec{v}$

    b. $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (2\vec{u} - \vec{v})$

    c. $|\vec{u} - \vec{v}|$ y $|2\vec{u} - \vec{v}|$

    d. El ángulo que forman $\vec{u} - \vec{v}$ y $2\vec{u} - \vec{v}$

TIC

42. **Utiliza** el programa Derive para calcular y dibujar los siguientes grupos de vectores, siendo: $\vec{u} = (1, 3, 2)$, $\vec{v} = (-1, 1, 0)$ y $\vec{w} = (3, 2, 1)$

    a. $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}$

    b. $\vec{u}, \vec{w}, \vec{u} - \vec{w}$

43. Los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ forman, dos a dos, ángulos de 60° y, además, $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = 2$ y $|\vec{w}| = 3$. Si $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{y} = 2\vec{u} + \vec{w}$, **halla**:

    a. $|\vec{x}|$, $|\vec{y}|$ y $\vec{x} \cdot \vec{y}$

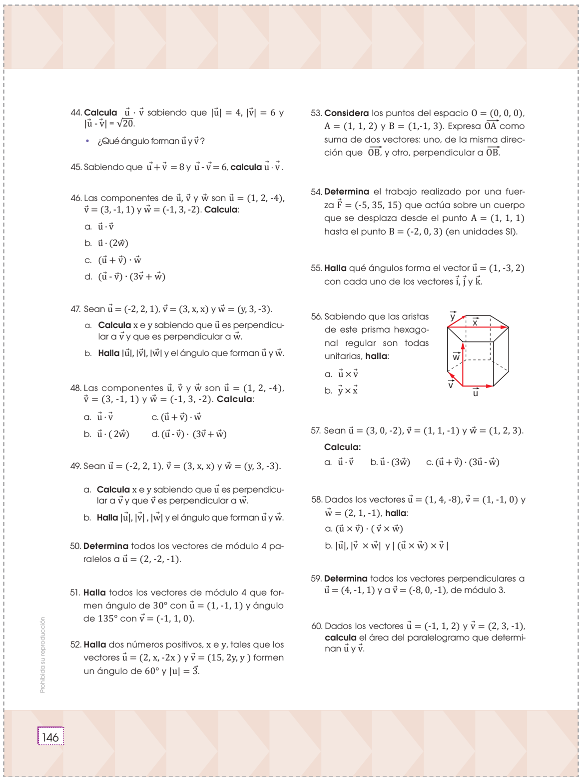
    b. El ángulo que forman los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

Prohibida su reproducción

145

Prohibida su reproducción

Página 146



44. **Calcula** $\vec{u} \cdot \vec{v}$ sabiendo que $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 6$ y $|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{20}$.
   - ¿Qué ángulo forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$?

45. Sabiendo que $\vec{u} + \vec{v} = 8$ y $\vec{u} - \vec{v} = 6$, **calcula** $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

46. Las componentes de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son $\vec{u} = (1, 2, -4)$, $\vec{v} = (3, -1, 1)$ y $\vec{w} = (-1, 3, -2)$. **Calcula**:
   a. $\vec{u} \cdot \vec{v}$
   b. $\vec{u} \cdot (2\vec{w})$
   c. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}$
   d. $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (3\vec{v} + \vec{w})$

47. Sean $\vec{u} = (-2, 2, 1)$, $\vec{v} = (3, x, x)$ y $\vec{w} = (y, 3, -3)$.
   a. **Calcula** x e y sabiendo que $\vec{u}$ es perpendicular a $\vec{v}$ y que es perpendicular a $\vec{w}$.
   b. **Halla** $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$, $|\vec{w}|$ y el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{w}$.

48. Las componentes $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son $\vec{u} = (1, 2, -4)$, $\vec{v} = (3, -1, 1)$ y $\vec{w} = (-1, 3, -2)$. **Calcula**:
   a. $\vec{u} \cdot \vec{v}$ c. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}$
   b. $\vec{u} \cdot (2\vec{w})$ d. $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (3\vec{v} + \vec{w})$

49. Sean $\vec{u} = (-2, 2, 1)$, $\vec{v} = (3, x, x)$ y $\vec{w} = (y, 3, -3)$.
   a. **Calcula** x e y sabiendo que $\vec{u}$ es perpendicular a $\vec{v}$ y que $\vec{v}$ es perpendicular a $\vec{w}$.
   b. **Halla** $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$, $|\vec{w}|$ y el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{w}$.

50. **Determina** todos los vectores de módulo 4 paralelos a $\vec{u} = (2, -2, -1)$.

51. **Halla** todos los vectores de módulo 4 que formen ángulo de 30° con $\vec{u} = (1, -1, 1)$ y ángulo de 135° con $\vec{v} = (-1, 1, 0)$.

52. **Halla** dos números positivos, x e y, tales que los vectores $\vec{u} = (2, x, -2x)$ y $\vec{v} = (15, 2y, y)$ formen un ángulo de 60° y $|u| = \vec{3}$.

53. **Considera** los puntos del espacio $O = (0, 0, 0)$, $A = (1, 1, 2)$ y $B = (1, -1, 3)$. Expresa $\overrightarrow{OA}$ como suma de dos vectores: uno, de la misma dirección que $\overrightarrow{OB}$, y otro, perpendicular a $\overrightarrow{OB}$.

54. **Determina** el trabajo realizado por una fuerza $\vec{F} = (-5, 35, 15)$ que actúa sobre un cuerpo que se desplaza desde el punto $A = (1, 1, 1)$ hasta el punto $B = (-2, 0, 3)$ (en unidades SI).

55. **Halla** qué ángulos forma el vector $\vec{u} = (1, -3, 2)$ con cada uno de los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$.

56. Sabiendo que las aristas de este prisma hexagonal regular son todas unitarias, **halla**:
   a. $\vec{u} \times \vec{v}$
   b. $\vec{y} \times \vec{x}$

57. Sean $\vec{u} = (3, 0, -2)$, $\vec{v} = (1, 1, -1)$ y $\vec{w} = (1, 2, 3)$.
   Calcula:
   a. $\vec{u} \cdot \vec{v}$ b. $\vec{u} \cdot (3\vec{w})$ c. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (3\vec{u} - \vec{w})$

58. Dados los vectores $\vec{u} = (1, 4, -8)$, $\vec{v} = (1, -1, 0)$ y $\vec{w} = (2, 1, -1)$, **halla**:
   a. $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$
   b. $|\vec{u}|$, $|\vec{v} \times \vec{w}|$ y $|(\vec{u} \times \vec{w}) \times \vec{v}|$

59. **Determina** todos los vectores perpendiculares a $\vec{u} = (4, -1, 1)$ y a $\vec{v} = (-8, 0, -1)$, de módulo 3.

60. Dados los vectores $\vec{u} = (-1, 1, 2)$ y $\vec{v} = (2, 3, -1)$, **calcula** el área del paralelogramo que determinan $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Prohibida su reproducción

Solucionario

41. a. 5; b. 30; c. $\sqrt{15}$, $\sqrt{65}$; d. 16,10°

42. Resolver usando TICs

43. a. $\sqrt{7}$, $\sqrt{19}$, $\frac{17}{2}$; b. 42,52°

44. 16, 48, 19°

45. 7

46. a. -3; b. 26; c. 5; d. -21

47. a. x = 2, y = 0; b. 3; $\sqrt{17}$; $3\sqrt{2}$; 76,37°

48. a. -3; b. 26; c. 5; d. -21

49. a. x = 2, y = 0; b. 3; $\sqrt{17}$; $3\sqrt{2}$; 76,37°

50. $\left(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ y $\left(-\frac{8}{3}, \frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)$

51. $(2+\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}, 2)$ y $(2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}, 2)$

52. $x = 1$, $y = \sqrt{35}$

53. $\left(\frac{6}{11}, \frac{-6}{11}, \frac{18}{11}\right) + \left(\frac{5}{11}, \frac{17}{11}, \frac{4}{11}\right)$

54. 10 J

55. a. $\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{w}$; b. $-\sqrt{3}\,\vec{w}$

56. a. (2, 1, 3); b. (12, - 33, 18); c. (-15, 12, -16)

57. $\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}\right)$ y $\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$

60. $\sqrt{83}$

Prohibida su reproducción

Solucionario

61. $\vec{M}$ = (-20, 10, 0), en unidades SI
62. 54.7°
63. 35.26°
64. Demostrar
65. < -23, 10, 3 >, < 19, -20, -9 >
66. a. k = -3, k = 3

    b. k = -2, k = 6
67. Demostrar
68. $\vec{F}$ = (-5, 35, 15), en unidades SI
69. $k = 6$
70. $\frac{\sqrt{3}}{2}$; b. 0
71. a. 39

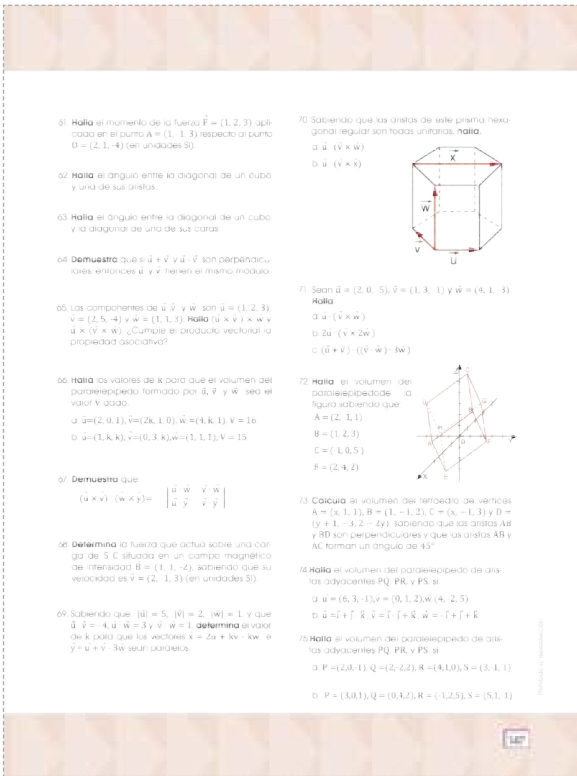
    b. 156

    c. 117
72. $2u^3$
73. $3u^2$
74. a. 82

    b. 4
75. a. 3

    b. 16

Página 148



Prohibida su reproducción

Medición de las dimensiones de la Tierra

A Eratóstenes se le atribuye la invención, hacia 255 a. C., de la esfera armilar que aún se empleaba en el siglo XVII., el principal motivo de su celebridad es sin duda la determinación del tamaño de la Tierra. Para ello inventó y empleó un método trigonométrico, además de las nociones de latitud y longitud, al parecer ya introducidas por Dicearco, por lo que bien merece el título de padre de la geodesia.

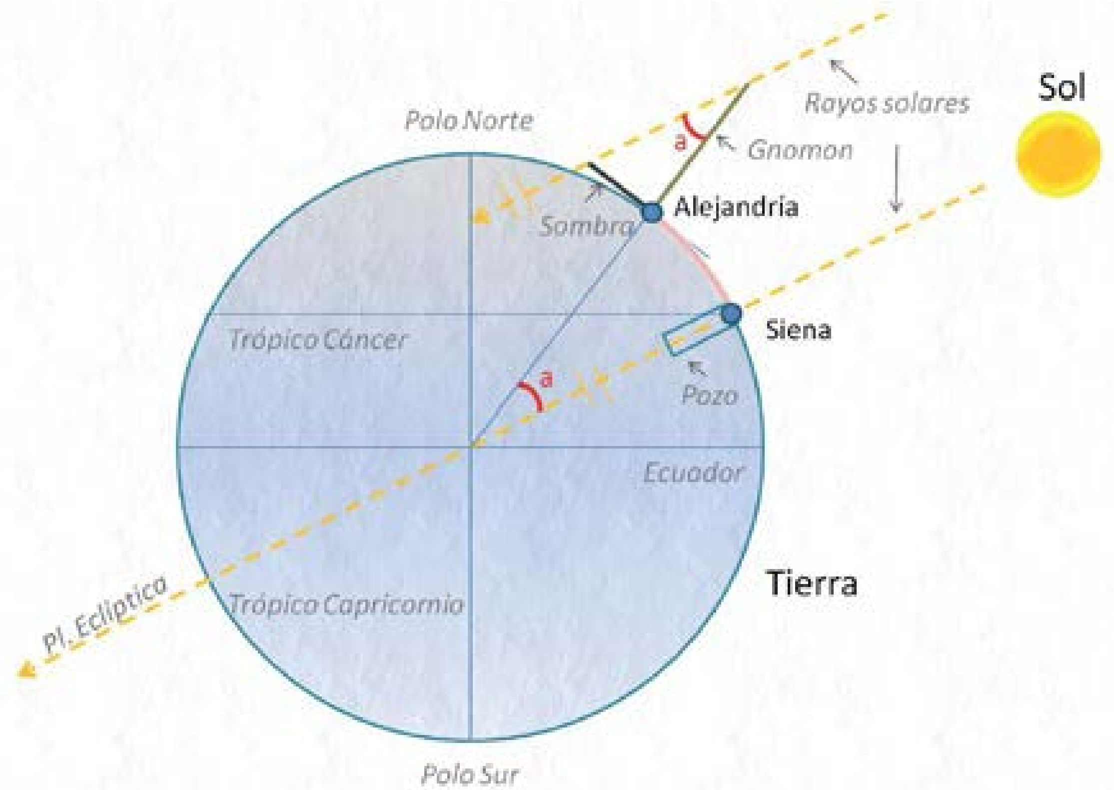
Por referencias obtenidas de un papiro de su biblioteca, sabía que en Siena (hoy Asuán, Egipto) el día del solsticio de verano los objetos verticales no proyectaban sombra alguna y la luz alumbraba el fondo de los pozos; esto significaba que la ciudad estaba situada justamente sobre la línea del trópico y su latitud era igual a la de la eclíptica que ya conocía. Eratóstenes, suponiendo que Siena y Alejandría tenían la misma longitud (realmente distan 3º) y que el Sol se encontraba tan alejado de la Tierra que sus rayos podían suponerse paralelos, midió la sombra en Alejandría el mismo día del solsticio de verano al mediodía, demostrando que el cenit de la ciudad distaba 1/50 parte de la circunferencia, es decir, 7º 12' del de Alejandría. Según Cleomedes, Eratóstenes se sirvió del scaphium o gnomon (un protocuadrante solar) para el cálculo de dicha cantidad.

Posteriormente, tomó la distancia estimada por las caravanas que comerciaban entre ambas ciudades, aunque bien pudo obtener el dato en la propia Biblioteca de Alejandría, fijándola en 5000 estadios, de donde dedujo que la circunferencia de la Tierra era de 250 000 estadios, resultado que posteriormente elevó hasta 252 000 estadios, de modo que a cada grado correspondieran 700 estadios. También se afirma que Eratóstenes, para calcular la distancia entre las dos ciudades, se valió de un regimiento de soldados que diera pasos de tamaño uniforme y los contara.

Admitiendo que Eratóstenes usase el estadio ático-italiano de 184.8 m, que era el que solía utilizarse por los griegos de Alejandría en aquella época, el error cometido sería de 6.192 kilómetros (un 15 %). Sin embargo, hay quien defiende que empleó el estadio egipcio (300 codos de 52,4 cm), en cuyo caso la circunferencia polar calculada hubiera sido de 39614 km, frente a los 40008 km considerados en la actualidad, es decir, un error de menos del 1%.

Ahora bien, es imposible que Eratóstenes diera con la medida exacta de la circunferencia de la Tierra debido a errores en los supuestos que calculó. Tuvo que haber tenido un margen de error considerable y por lo tanto no pudo haber usado el estadio egipcio:2

Prohibida su reproducción



Supuso que la Tierra es perfectamente esférica, lo que no es cierto. Un grado de latitud no representa exactamente la misma distancia en todas las latitudes, sino que varía ligeramente de 110,57 km en el Ecuador hasta 111,7 km en los Polos. Por eso no podemos suponer que 7º entre Alejandría y Siena representen la misma distancia que 7º en cualquier otro lugar a lo largo de todo el meridiano.

Supuso que Siena y Alejandría se encontraban situadas sobre un mismo meridiano, lo cual no es así, ya que hay una diferencia de 3 grados de longitud entre ambas ciudades.

La distancia real entre Alejandría y Siena (hoy Asuán) no es de 924 km (5000 estadios ático-italiano de 184,8 m por estadio), sino de 843 km (distancia aérea y entre los centros de las dos ciudades), lo que representa una diferencia de 81 km.

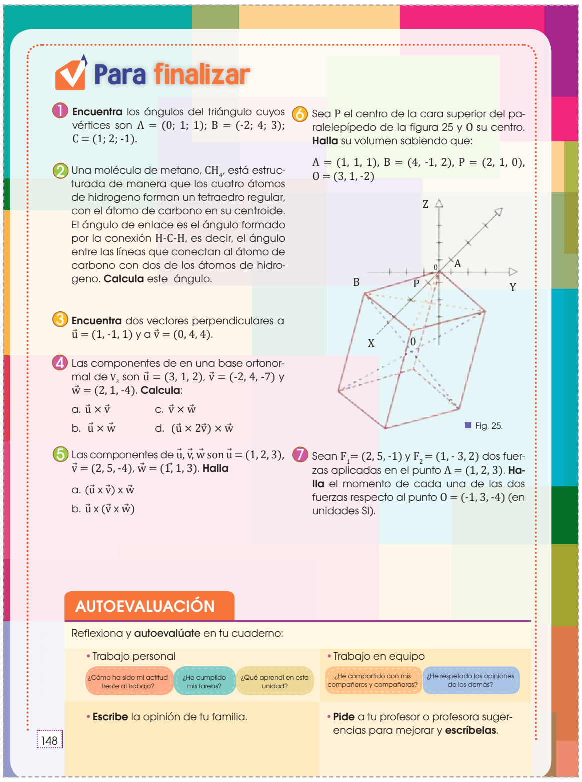
Realmente Siena no está ubicada exactamente sobre el paralelo del trópico de cáncer (los puntos donde los rayos del sol caen verticalmente a la tierra en el solsticio de verano). Actualmente se encuentra situada a 72 km (desde el centro de la ciudad). Pero debido a que las variaciones del eje de la Tierra fluctúan entre 22,1 y 24,5º en un período de 41000 años, hace 2000 años se encontraba a 41 km.

La medida de la sombra que se proyectó sobre la vara de Eratóstenes hace 2.200 años debió ser de 7,5º o 1/48 parte de una circunferencia y no 7,2º o 1/50 parte. Puesto que en aquella época no existía el cálculo trigonométrico, para calcular el ángulo de la sombra, Eratóstenes pudo haberse valido de un compás,3 para medir directamente dicho ángulo, lo que no permite una medida tan precisa.

https://goo.gl/v5AcZR

Prohibida su reproducción

Página 147



Para finalizar

1. **Encuentra** los ángulos del triángulo cuyos vértices son $A = (0; 1; 1)$; $B = (-2; 4; 3)$; $C = (1; 2; -1)$.

2. Una molécula de metano, CH_4, está estructurada de manera que los cuatro átomos de hidrogeno forman un tetraedro regular, con el átomo de carbono en su centroide. El ángulo de enlace es el ángulo formado por la conexión H-C-H, es decir, el ángulo entre las líneas que conectan al átomo de carbono con dos de los átomos de hidrogeno. **Calcula** este ángulo.

3. **Encuentra** dos vectores perpendiculares a $\vec{u} = (1, -1, 1)$ y a $\vec{v} = (0, 4, 4)$.

4. Las componentes de en una base ortonormal de V_3 son $\vec{u} = (3, 1, 2)$, $\vec{v} = (-2, 4, -7)$ y $\vec{w} = (2, 1, -4)$. **Calcula**:
   a. $\vec{u} \times \vec{v}$
   b. $\vec{u} \times \vec{w}$
   c. $\vec{v} \times \vec{w}$
   d. $(\vec{u} \times 2\vec{v}) \times \vec{w}$

5. Las componentes de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ son $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (2, 5, -4)$, $\vec{w} = (1, 1, 3)$. **Halla**
   a. $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$
   b. $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$

6. Sea P el centro de la cara superior del paralelepípedo de la figura 25 y O su centro. **Halla** su volumen sabiendo que:
   $A = (1, 1, 1)$, $B = (4, -1, 2)$, $P = (2, 1, 0)$, $O = (3, 1, -2)$

Fig. 25.

7. Sean $F_1 = (2, 5, -1)$ y $F_2 = (1, -3, 2)$ dos fuerzas aplicadas en el punto $A = (1, 2, 3)$. **Halla** el momento de cada una de las dos fuerzas respecto al punto $O = (-1, 3, -4)$ (en unidades SI).

AUTOEVALUACIÓN

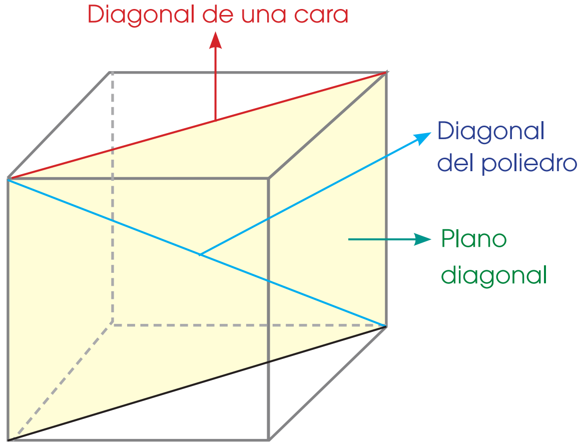
Reflexiona y **autoevalúate** en tu cuaderno:

- Trabajo personal: ¿Cómo ha sido mi actitud frente al trabajo? ¿He cumplido mis tareas? ¿Qué aprendí en esta unidad?
- Trabajo en equipo: ¿He compartido con mis compañeros y compañeras? ¿He respetado las opiniones de los demás?
- **Escribe** la opinión de tu familia.
- **Pide** a tu profesor o profesora sugerencias para mejorar y **escríbelas**.

148

Orientación didáctica

El profesor puede usar el ejercicio número 63, para ilustrar de mejor manera los conceptos presentados en esta unidad, contruyendo un cubo, en donde se aprecia su diagonal principal y la diagonal de sus caras. Puede también realizar un trabajo con los estudiante, que será de gran ayuda para alcanzar las destrezas deseadas en esta unidad.



Solucionario

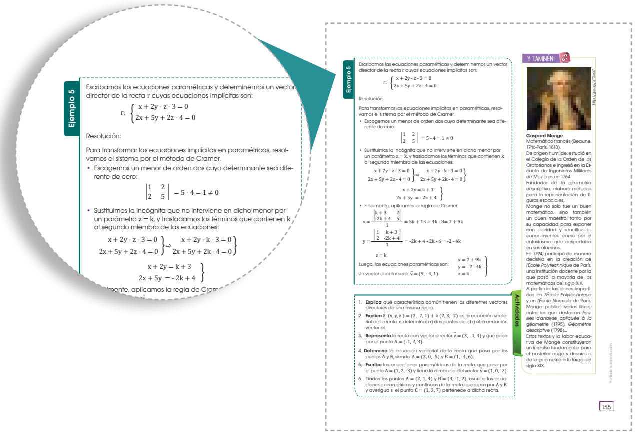
1. A = 107.28°

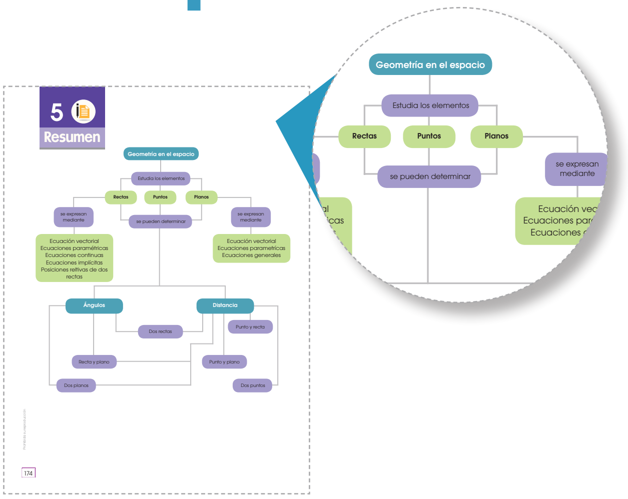
   B = 25.74°

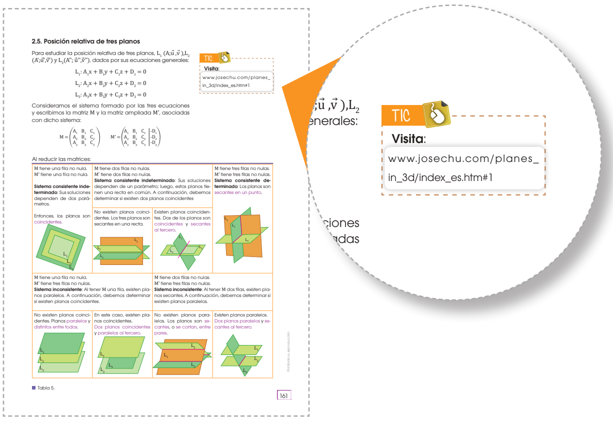
   C = 46.98°
2. 109.47°
3. < -8, -4, 4 >, < 8, 4, -4 >
4. Buscar
5. Buscar
6. 2 unidades cúbicas
7. Buscar

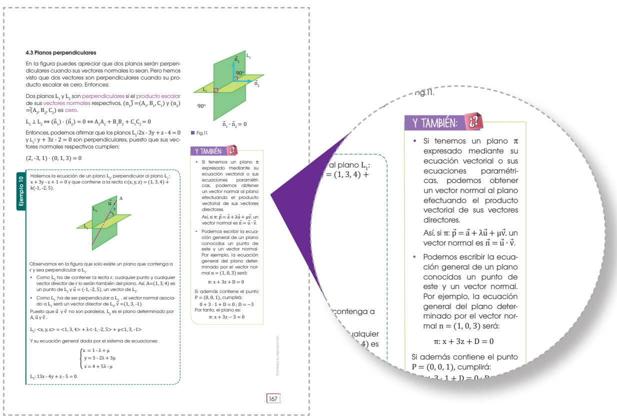
Prohibida su reproducción

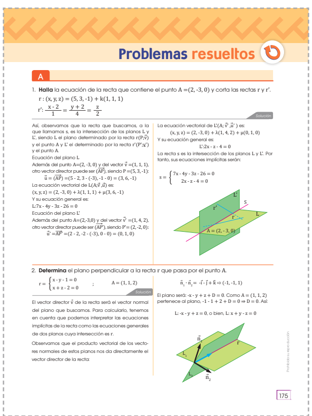
Geometría en el espacio

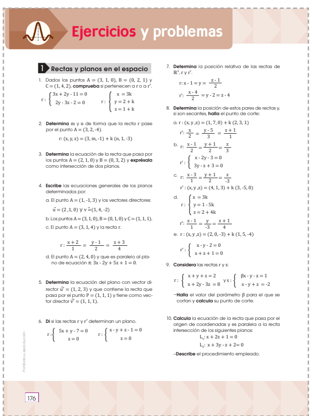


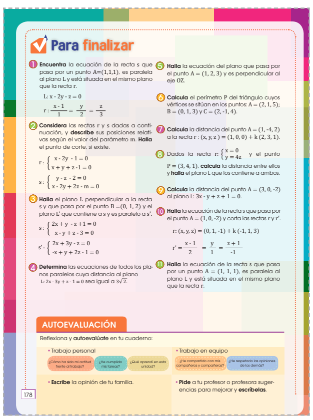












Prohibida su reproducción

UNIDAD 5


5 Geometría en el espacio

CONTENIDOS:

1. Rectas en el espacio
   1.1. Ecuación vectorial
   1.2. Ecuaciones paramétricas
   1.3. Ecuaciones continuas
   1.4. Ecuaciones implícitas
   1.5. Posiciones relativas de dos rectas
   1.6. Posición de rectas respecto de la referencia
2. Planos en el espacio
   2.1. Ecuación vectorial
   2.2. Ecuaciones paramétricas
   2.3. Ecuación general
   2.4. Posición relativa de dos planos
   2.5. Posición relativa de tres planos
   2.6. Posición de planos respecto de la referencia
3. Posición relativa de recta y plano
4. Ángulos entre elementos del espacio
   4.1. Ángulo entre dos rectas
   4.2. Rectas perpendiculares
   4.3. Planos perpendiculares
   4.4. Ángulo entre recta y plano
5. Distancias entre elementos del espacio
   5.1. Distancia entre dos puntos
   5.2. Distancia de un punto a una recta
   5.3. Distancia de un punto a un plano
   5.4. Distancia entre dos rectas
   5.5. Distancia entre dos planos
   5.6. Distancia entre recta y plano

Prohibida su reproducción

150

http://goo.gl/t7UrC8

Noticia:

elpaís.com tiene una sección de juegos con la ciencia, en la que se publicó el siguiente artículo: *La importancia del juego en Matemática*. Lo puedes leer en: http://elpais.com/elpais/2015/08/19/ciencia/1439982619_073329.html.

Web:
El sobre mágico de Lewis Carroll. **Realiza** este juego con planos en: http://elpais.com/elpais/2015/07/02/ciencia/1435850002_183433.html.

EN CONTEXTO:

El uso de planos y líneas oblicuas sigue siendo predominante en el diseño arquitectónico contemporáneo. En esta unidad, estudiaremos cómo definir estos objetos en el espacio, y también, cómo comparar sus posiciones relativas.

151

Ejes temáticos	Contenidos	
Geometría en el espacio (150 - 179)	1. Rectas en el espacio	1.1. Ecuación vectorial 1.2. Ecuaciones paramétricas 1.3. Ecuaciones continuas 1.4. Ecuaciones implícitas 1.5. Posiciones relativas de dos rectas 1.6. Posición de rectas respecto de la referencia
	2. Planos en el espacio	2.1. Ecuación vectorial 2.2. Ecuaciones paramétricas 2.3. Ecuación general 2.4. Posición relativa de dos planos 2.5. Posición relativa de tres planos 2.6. Posición de planos respecto de la referencia
	3. Posición relativa de recta y plano	
	4. Ángulos entre elementos del espacio	4.1. Ángulo entre dos rectas 4.2. Rectas perpendiculares 4.3. Planos perpendiculares 4.4. Ángulo entre recta y plano
	5. Distancias entre elementos del espacio	5.1. Distancia entre dos puntos 5.2. Distancia de un punto a una recta 5.3. Distancia de un punto a un plano 5.4. Distancia entre dos rectas 5.5. Distancia entre dos planos 5.6. Distancia entre recta y plano

Prohibida su reproducción

Prohibida su reproducción

Objetivo del área por subnivel

O.M.5.5. Valorar, sobre la base de un pensamiento crítico, creativo, reflexivo y lógico, la vinculación de los conocimientos matemáticos con los de otras disciplinas científicas y los saberes ancestrales, para así plantear soluciones a problemas de la realidad y contribuir al desarrollo del entorno social, natural y cultural.

Objetivo integrador del área por subnivel

OI.5.5. Plantear actividades de emprendimiento en diversos ámbitos de su vida, evaluando los riesgos e impactos que comportan a través de la investigación, con el uso de las tecnologías y métodos científicos, planificando de forma adecuada sus proyectos.

OI.2.8. Construir hábitos de organización en sus tareas y actividades cotidianas, proponiendo razonamientos lógicos y críticos.

Logo Institucional	Nombre de la institución				Año lectivo		
Plan de unidad temática							
1. Datos informativos:							
Docente:	Nombre del docente que ingresa la información	Área/asignatura:	Matemática	Grado/Curso:	3° bachillerato	Paralelo:	
N.º de unidad de planificación:	5	Título de unidad de planificación:	GEOMETRIA EN EL ESPACIO	Objetivos específicos de la unidad de planificación:		Valorar sobre la base de un pensamiento crítico, creativo, reflexivo y lógico la vinculación de los conocimientos matemáticos con los de otras disciplinas científicas y los saberes ancestrales para plantear soluciones a problemas de la realidad y contribuir al desarrollo del entorno social, natural y cultural. Desarrollar la curiosidad y la creatividad en el uso de herramientas matemáticas al momento de enfrentar y solucionar problemas de la realidad nacional demostrando actitudes de orden, perseverancia y capacidades de investigación.	
Períodos	30				Semana de Inicio:		
2. Planificación							

<table>
<tr><td colspan="3">Destrezas con criterios de desempeño a ser desarrolladas:</td><td>Criterios de evaluación</td></tr>
<tr><td colspan="3">• Identificar la pendiente de una recta a partir de la ecuación vectorial de la recta para escribir la ecuación cartesiana de la recta y la ecuación general de la recta. R
• Determinar la posición relativa de dos rectas en R3 (rectas paralelas, que se cortan, perpendiculares) en la resolución de problemas (por ejemplo: trayectoria de aviones o de barcos para determinar si se interceptan).
• Calcular la distancia de un punto P a una recta (como la longitud del vector formado por el punto P y la proyección perpendicular del punto en la recta P´, utilizando la condición de ortogonalidad del vector dirección de la recta y el vector (PP) en la resolución de problemas (distancia entre dos rectas paralelas).
• Determinar la ecuación de la recta bisectriz de un ángulo como aplicación de la distancia de un punto a una recta.
• Aplicar el producto escalar entre dos vectores, la norma de un vector, la distancia entre dos puntos, el ángulo entre dos vectores y la proyección ortogonal de un vector sobre otro para resolver problemas geométricos, reales o hipotéticos en R
• Realizar las operaciones de adición entre elementos de R3 y de producto por un número escalar de manera geométrica y analítica aplicando propiedades de los números reales y reconocer a los vectores como elementos geométricos de R3
• Calcular el producto escalar entre dos vectores y la norma de un vector para determinar distancia entre dos puntos A y B en R como la norma del vector AB .
• Escribir y reconocer la ecuación vectorial y paramétrica de una recta a partir de un punto de la recta y un vector dirección o a partir de dos puntos de la recta y graficarlas en R
• Determinar la ecuación vectorial de un plano a partir de un punto del plano y dos vectores dirección; a partir de tres puntos del plano; a partir de una recta contenida en el plano y un punto.
• Determinar si dos planos son paralelos (cuando no hay solución) o perpendiculares (si los vectores normales a los planos son perpendiculares) para resolver aplicaciones geométricas en R</td><td>CE.M.5.6. Emplea vectores geométricos en el plano y operaciones en R, con aplicaciones en física y en la ecuación de la recta; utiliza métodos gráficos, analíticos y tecnológicos.</td></tr>
<tr><td>Actividades de aprendizaje</td><td>Recursos</td><td>Indicadores de logro</td><td>Técnicas e instrumentos de evaluación</td></tr>
<tr><td>• Debatir la necesidad que tienen los ingenieros civiles de dominar los conceptos de distancias entre planos y rectas en el espacio, en la construcción de edificios y otras estructuras imortantes en nuestra realidad nacional.
• Diferenciar los conceptos entre ecuaciones contínuas y ecuaciones implícitas
• Comparar las definiciones de espacio bidimensional y espacio tridimensional
• Usar una parametrización adecuada aplicada a rectas en el espacio.
• Identificar las ecuaciones relacionadas con las posiciones relativas de las rectas y tambien con los planos.
• Usar estos conceptos en el cálulo de distancias entre puntos, lineas y planos
• Reconocer el uso de métodos deductivos o inductivos para determinar las ecuaciones respectivas en las actividades realizadas.
• Producir predicciones usando los modelos matemáticos estudiados.</td><td>- Texto
- Cuaderno
- Videos (sitios web)
- Pizarra
- Calculadora</td><td>I.M.5.6.1. Grafica vectores en el plano; halla su módulo y realiza operaciones de suma, resta y producto por un escalar; resuelve problemas aplicados a la Geometría y a la Física. (I.2.)
I.M.5.6.2. Realiza operaciones en el espacio vectorial R; calcula la distancia entre dos puntos, el módulo y la dirección de un vector; Reconoce cuando dos vectores son ortogonales; y aplica este conocimiento en problemas físicos, Apoyado en las TIC. (I.3.)
I.M.5.6.3. Determina la ecuación de la recta de forma vectorial y paramétrica; identifica su pendiente, la distancia a un punto y la posición relativa entre dos rectas, la ecuación de una recta bisectriz, sus aplicaciones reales, la validez de sus resultados y el aporte de las TIC. (I.3.)</td><td>Comprobar el desarrollo de las destrezas necesarias para el manejo de vectores en el plano y sus características, graficación, norma, Operaciones con vectores algebraicas, en forma gráfica y en forma analítica, así como para la resolución de problemas de aplicación. El estudiante debe ser capaz de calcular el producto de un número por un vector, el producto escalar entre vectores, la ortogonalidad, la distancia entre dos puntos, el ángulo entre dos vectores; determinar la posición relativa de dos rectas; describir la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola (tanto en su forma cartesiana como en su forma paramétrica), y, en general, resolver aplicaciones geométricas de vectores en R</td></tr>
<tr><td colspan="4">Elementos del perfil de salida</td></tr>
<tr><td colspan="4">I.2. Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos información posibles.
I.3. Sabemos comunicarnos de manera clara en nuestra lengua y en otras, utilizamos varios lenguajes como el numérico, el digital, el artístico y el corporal; asumimos con responsabilidad nuestros discursos.</td></tr>
</table>

Elaborado	Revisado	Aprobado
Docente:	Director del área :	Vicerrector:
Firma:	Firma:	Firma:
Fecha:	Fecha:	Fecha:

Objetivos del área por subnivel

- O.M.5.5. Valorar, sobre la base de un pensamiento crítico, creativo, reflexivo y lógico, la vinculación de los conocimientos matemáticos con los de otras disciplinas científicas y los saberes ancestrales, para así plantear soluciones a problemas de la realidad y contribuir al desarrollo del entorno social, natural y cultural.

Objetivos Integradores de subnivel

- OI.5.5. Plantear actividades de emprendimiento en diversos ámbitos de su vida, evaluando los riesgos e impactos que comportan a través de la investigación, con el uso de las tecnologías y métodos científicos, planificando de forma adecuada sus proyectos.
- OI.2.8. Construir hábitos de organización en sus tareas y actividades cotidianas, proponiendo razonamientos lógicos y críticos.

Técnicas e instrumentos de evaluación

- Comprobar el desarrollo de las destrezas necesarias para el manejo de vectores en el plano y sus características, graficación, norma, Operaciones con vectores algebraicas, en forma gráfica y en forma analítica, así como para la resolución de problemas de aplicación. El estudiante debe ser capaz de calcular el producto de un número por un vector, el producto escalar entre vectores, la ortogonalidad, la distancia entre dos puntos, el ángulo entre dos vectores; determinar la posición relativa de dos rectas; describir la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola (tanto en su forma cartesiana como en su forma paramétrica), y, en general, resolver aplicaciones geométricas de vectores en R

Indicadores para la evaluación del criterio

- I.M.5.6.1. Grafica vectores en el plano; halla su módulo y realiza operaciones de suma, resta y producto por un escalar; resuelve problemas aplicados a la Geometría y a la Física. (I.2.)
- I.M.5.6.2. Realiza operaciones en el espacio vectorial R; calcula la distancia entre dos puntos, el módulo y la dirección de un vector;
- Reconoce cuando dos vectores son ortogonales; y aplica este conocimiento en problemas físicos,
- Apoyado en las TIC. (I.3.)
- I.M.5.6.3. Determina la ecuación de la recta de forma vectorial y paramétrica; identifica su pendiente, la distancia a un punto y la posición relativa entre dos rectas, la ecuación de una recta bisectriz, sus aplicaciones reales, la validez de sus resultados y el aporte de las TIC. (I.3.)

Prohibida su reproducción

Criterio de evaluación

- CE.M.5.6. Emplea vectores geométricos en el plano y operaciones en R, con aplicaciones en física y en la ecuación de la recta; utiliza métodos gráficos, analíticos y tecnológicos.

Elementos del perfil de salida a los que se contribuye

- I.2. Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para
- Resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos información posibles.
- I.3. Sabemos comunicarnos de manera clara en nuestra lengua y en otras, utilizamos varios lenguajes como el numérico, el digital, el artístico y el corporal; asumimos con
- Responsabilidad nuestros discursos.

Básicos imprescindibles

Básicos deseables

Bloques curriculares	Destrezas con criterio de desempeño
Geometría en el espacio	Identificar la pendiente de una recta a partir de la ecuación vectorial de la recta para escribir la ecuación cartesiana de la recta y la ecuación general de la recta. R
	Determinar la posición relativa de dos rectas en R3 (rectas paralelas, que se cortan, perpendiculares) en la resolución de problemas (por ejemplo: trayectoria de aviones o de barcos para determinar si se interceptan).
	Calcular la distancia de un punto P a una recta (como la longitud del vector formado por el punto P y la proyección perpendicular del punto en la recta P´, utilizando la condición de ortogonalidad del vector dirección de la recta y el vector (PP) en la resolución de problemas (distancia entre dos rectas paralelas).
	Determinar la ecuación de la recta bisectriz de un ángulo como aplicación de la distancia de un punto a una recta.
	Resolver y plantear aplicaciones de la ecuación vectorial, paramétrica y cartesiana de la recta con apoyo de las TIC.
	Aplicar el producto escalar entre dos vectores, la norma de un vector, la distancia entre dos puntos, el ángulo entre dos vectores y la proyección ortogonal de un vector sobre otro para resolver problemas geométricos, reales o hipotéticos en R
	Realizar las operaciones de adición entre elementos de R3 y de producto por un número escalar de manera geométrica y analítica aplicando propiedades de los números reales y reconocer a los vectores como elementos geométricos de R3
	Calcular el producto escalar entre dos vectores y la norma de un vector para determinar distancia entre dos puntos A y B en R como la norma del vector AB
	Escribir y reconocer la ecuación vectorial y paramétrica de una recta a partir de un punto de la recta y un vector dirección o a partir de dos puntos de la recta y graficarlas en R
	Determinar la ecuación vectorial de un plano a partir de un punto del plano y dos vectores dirección; a partir de tres puntos del plano; a partir de una recta contenida en el plano y un punto.
	Determinar la ecuación de la recta formada como intersección de dos planos como solución del sistema de ecuaciones planteado por las ecuaciones de los planos.
	Determinar si dos planos son paralelos (cuando no hay solución) o perpendiculares (si los vectores normales a los planos son perpendiculares) para resolver aplicaciones geométricas en R

Prohibida su reproducción

AMPLIACIÓN DE CONTENIDOS

Rectas en el plano

- Dados el punto A = (a_1, a_2) y el vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$, las diferentes ecuaciones de la recta que pasa por A y con vector director $\vec{v}$ son:

Nombre	Ecuación
Vectorial	$(x, y) = (a_1, a_2) + k\,(v_1, v_2)\,,\ k \in \mathbb{R}$
Paramétrica	$\left.\begin{array}{l} x = a_1 + kv_1 \\ y = a_2 + kv_2 \end{array}\right\},\ k \in \mathbb{R}$
Continua	$\dfrac{x - a_1}{v_1} = \dfrac{y - a_2}{v_2}$
Punto-pendiente	$y - a_2 = m(x - a_1)\,,\ m = \dfrac{v_2}{v_1}$
General	$Ax + By + C = 0$ $(A = v_2\,;\ B = -v_1\,;\ C = v_1 a_2 - v_2 a_1)$

- Para conocer la posición relativa de dos rectas en el plano, resolvemos el sistema formado por sus ecuaciones: si tiene una única solución, las rectas son secantes; si no tiene solución, son paralelas; si existen infinitas soluciones, son coincidentes.

Teorema de Rouché-Frobenius

- Un sistema de ecuaciones lineales es compatible si y sólo si el rango de la matriz asociada al sistema, A, y el de la matriz ampliada, A′, son iguales:

Sistema compatible ⇔ rang (A) = rang (A′)

Recta que pasa por el punto $P = (p_1, p_2)$ y tiene vector director $\vec{v} = (v_1, v_2)$	
Ecuaciones paramétricas	$\left.\begin{array}{l} x = p_1 + \lambda v_1 \\ y = p_2 + \lambda v_2 \end{array}\right\}\ \lambda \in \mathbb{R}$
Ecuación general o implícita	$Ax + By + C = 0$, con $A = v_2$, $B = -v_1$ y $C = v_1 p_2 - v_2 p_1$

Plano del espacio que pasa por el punto $P = (p_1, p_2, p_3)$ y tiene vectores directores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$	
Ecuaciones paramétricas	$\left.\begin{array}{l} x = p_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = p_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = p_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{array}\right\}\ \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$
Ecuación general o implícita	$Ax + By + Cz + D = 0$, siendo A, B, C y D los coeficientes que se obtienen al desarrollar: $\begin{vmatrix} x - p_1 & u_1 & v_1 \\ y - p_2 & u_2 & v_2 \\ z - p_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$

Recta que pasa por el punto $P = (p_1, p_2, p_3)$ y tiene vector director $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$	
Ecuaciones paramétricas	$\left.\begin{array}{l} x = p_1 + \lambda v_1 \\ y = p_2 + \lambda v_2 \\ z = p_3 + \lambda v_3 \end{array}\right\}\ \lambda \in \mathbb{R}$
Ecuaciones implícitas	$\left.\begin{array}{l} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{array}\right\}$ siendo $Ax + By + Cz + D = 0$ y $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ las ecuaciones de dos planos cuya intersección es la recta.

Prohibida su reproducción

p
V
F

Tabla 1.

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Tabla 2.

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Tabla 3.

Combinación de proposiciones

Para construir proposiciones complejas, hemos de considerar todas las combinaciones posibles de los valores de verdad y falsedad de las proposiciones simples con las que vayamos a tratar. Así, para una proposición tendremos todas las combinaciones que aparecen en la tabla 1; para dos proposiciones, las que aparecen en la tabla 2; y para tres proposiciones, las que aparecen en la tabla 3.

Observa que el número total de combinaciones puede calcularse mediante combinatoria. Si tenemos i proposiciones, el número total de combinaciones posible es el número de variaciones con repetición de dos elementos tomados de i en i: $VR_{2,i} = 2^i$.

Operaciones lógicas fundamentales: tablas de verdad

Cuando combinamos dos proposiciones simples mediante una conectiva, el valor de verdad o falsedad de la combinación dependerá del de las proposiciones que las forman. En el caso de dos proposiciones, tenemos las siguientes características:

	Negación	Conjunción	Disyunción	Condicional	Bicondicional
Tabla	p | ¬p V | F **F** | **V**	p q | p ∧ q **V V** | **V** V F | F F V | F F F | F	p q | p ∨ q **V V** | **V** **V F** | **V** **F V** | **V** F F | F	p q | p → q **V V** | **V** V F | F **F V** | **V** **F F** | **V**	p q | p ↔ q **V V** | **V** V F | F F V | F **F F** | **V**
Características	¬*p* es falso si *p* es verdadero, y viceversa, ¬*p* es verdadero si *p* es falso.	*p* ∧ *q* sólo es verdadero cuando todas las proposiciones que lo forman son verdaderas. En caso contrario, es falso.	*p* ∨ *q* es verdadero cuando al menos uno de sus miembros lo es. Y sólo es falso en el caso de que los dos miembros sean a la vez falsos.	*p* → *q* es verdadero siempre, excepto cuando *p*, el antecedente, es verdadero y *q*, el consecuente, falso.	La verdad o falsedad de una proposición implica la verdad o falsedad de la otra. De ahí que en la tabla aparezca el valor *V* siempre que *p* y *q* tienen el mismo valor.
Ejemplos	Si el enunciado «25 es múltiplo de 5» es verdadero, entonces el enunciado «25 no es múltiplo de 5» es falso, y viceversa.	«25 es múltiplo de 5 y de 7» sólo es verdadero si 25 es múltiplo de 5 y también es múltiplo de 7. Si una de las dos cosas, o las dos a la vez, no se cumplen, todo el enunciado complejo será falso.	La proposición «25 es múltiplo de 5 o de 7» será verdad si lo es de 5, si lo es de 7 o si lo es de ambos. Y sólo será falsa en el caso que no sea múltiplo de 5 ni de 7.	Un enunciado complejo como «si apruebo, me compran un coche» es siempre verdadero, menos cuando se da el antecedente *(he aprobado)*, pero no se cumple el consecuente *(no me han comprado un coche)*.	«Aprobaré si y solamente si estudio» es una proposición que es falsa en el caso de que no apruebe y haya estudiado, o bien apruebe sin haber estudiado.

Para determinar la validez de un razonamiento, pueden aplicarse **tablas de verdad** como las que aparecen en la tabla superior. Observa que una tabla de este tipo es una matriz que muestra los posibles valores de verdad de una proposición compleja.

Prohibida su reproducción

FÍJATE

- Todas las leyes lógicas son tautologías y todas las tautologías pueden expresarse como leyes lógicas.
- En los esquemas utilizamos letras mayúsculas *(A, B, C…)* en lugar de las propias de la lógica de enunciados *(p, q, r…),* porque las mayúsculas simbolizan tanto proposiciones simples *(A = p)* como complejas *(A = (p ∧ q)).*

Leyes del cálculo proposicional

Otra manera de validar un razonamiento sin necesidad de construir constantemente tablas de verdad es utilizar las *reglas de inferencia.* Estas reglas se representan mediante un *esquema de inferencia* o en forma de **ley lógica** y permiten asegurar la corrección formal de una inferencia o razonamiento. Así, el resultado obtenido es siempre una tautología. Por ello la ley lógica acostumbra a expresarse $P \Rightarrow Q$, dado que siempre es formalmente correcta.

Las leyes lógicas son muchas, puesto que hay una por cada razonamiento válido. Sin embargo, cabría destacar aquellas que juegan un papel fundamental en la *inferencia lógica,* y por tanto en la matemática, como son las denominadas **leyes del cálculo proposicional.** Estas leyes son:

Nombre	Ley	Descripción
Doble negación	$A \Leftrightarrow \neg(\neg A)$	Negar dos veces algo es igual que afirmarlo. Y, al revés, afirmar algo equivale a negarlo dos veces. *Soy feliz* equivale a *no soy infeliz.*
Eliminación de la conjunción o simplificación	$A \wedge B \Rightarrow A$ $A \wedge B \Rightarrow B$	Si dos premisas *A* y *B* se dan simultáneamente, tanto se puede concluir *A* como *B.* *El Sol da luz y calor, luego el Sol da luz.* *El Sol da luz y calor, luego el Sol da calor.*
Introducción de la disyunción	$A \Rightarrow A \vee B$	Si se dispone de una proposición como premisa, puede añadirse disyuntivamente cualquier otra proposición. *La velocidad es un vector, luego la velocidad es un vector o llueve.*
Ley del bicondicional	$(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]$	A partir de un bicondicional, podemos concluir dos condicionales, y viceversa. *Aprendo si y sólo si estudio* equivale a *Si aprendo, entonces estudio y, si estudio, entonces aprendo.*
Ley del dilema	$[(A \Rightarrow B) \wedge (C \Rightarrow D) \wedge (A \vee C)] \Leftrightarrow (B \vee D)$	Si una disyunción es verdadera, y cada uno de sus miembros tiene una consecuencia, entonces es cierta la disyunción de esas consecuencias. *Si estudio, aprobaré y, si salgo, me divertiré. Estudiaré o saldré.* Todo esto equivale a *Aprobaré o me divertiré.*
Leyes de De Morgan	$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$	La negación de una conjunción es la disyunción de cada uno de sus componentes negados. La negación de una disyunción es la conjunción de cada uno de sus componentes negados. De *No es cierto que las matemáticas sean difíciles y que la pintura sea fácil* podemos concluir que *Las matemáticas son fáciles o la pintura es difícil.* *No es cierto que corra o vuele* nos permite concluir que *Ni corre ni vuela.*

Prohibida su reproducción

Nombre	Ley	Descripción
Silogismo disyuntivo	$[(A \vee B) \wedge \neg A] \Rightarrow B$	La disyunción de dos proposiciones y la negación de una de ellas implica la otra. *Si llueve o hace sol pero no llueve, entonces hace sol.*
Condicional-conjunción	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$	Un condicional es la negación de la conjunción del antecedente con la negación del consecuente. *Si gira, entonces se mueve* equivale a *No es cierto que gire y no se mueva.*
Condicional-disyunción	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$	Un condicional es la negación de la disyunción entre la negación del antecedente y el consecuente. *Si está quieto, entonces no se mueve* equivale a *No está quieto o no se mueve.*
Modus ponens	$[(A \Rightarrow B) \wedge A] \Rightarrow B$	Dado un condicional y su antecedente como premisas, se concluye el consecuente. *Si pensar conlleva existir, y pienso, entonces existo.*
Modus tollens	$[(A \Rightarrow B) \wedge \neg B] \Rightarrow \neg A$	De un condicional y la negación del consecuente se concluye la negación del antecedente. *Si la tortilla es española, entonces lleva patatas, y esta tortilla no las lleva, luego esta tortilla no es española.*
Ley de la transitividad	$[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$	Si *A* tiene como consecuencia *B*, y *B* tiene como consecuencia *C*, entonces puede concluirse que *A* tiene como consecuencia *C*. *Si una recta* r *es paralela a otra recta* s, *y* s *es paralela a otra recta* t, *entonces* r *es paralela a* t.
Conmutatividad	$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$ $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow A)$	El orden en la conjunción, en la disyunción y en el bicondicional de las premisas no altera la verdad.
Asociatividad	$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$ $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$ $[(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C] \Leftrightarrow [A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)]$	La asociación de las premisas en la conjunción, en la disyunción y en el bicondicional no altera la verdad.
Distributividad (conjunción, disyunción)	$(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]$	La conjunción de una disyunción es la disyunción de las conjunciones. La disyunción de una conjunción es la conjunción de las disyunciones.
Distributividad (conjunción, disyunción, condicional)	$[A \wedge (B \vee C)] \Leftrightarrow [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)]$ $[A \vee (B \wedge C)] \Leftrightarrow [(A \vee B) \wedge (A \vee C)]$	La implicación de una conjunción es la conjunción de las implicaciones. La implicación de una disyunción es la disyunción de las implicaciones.
Idempotencia	$A \wedge A \Leftrightarrow A$ $A \vee A \Leftrightarrow A$	Si algo es cierto, su conjunción o su disyunción también lo son.

Prohibida su reproducción

Funciones monótonas

1.º Ordenamos las premisas y las conectamos mediante conjunciones. Aplicándoles las leyes lógicas, debemos obtener la conclusión.

Si lo conseguimos, habremos demostrado que el razonamiento es formalmente válido.

2.º En líneas sucesivas colocamos el resultado de ir aplicando las leyes lógicas sobre las premisas. Junto a cada línea de la deducción anotamos la ley que se ha utilizado.

3.º Al llegar a la **conclusión** del razonamiento, la deducción estará completa.

Por ejemplo:

$$[(p \Rightarrow \neg q) \wedge p \wedge (q \vee r)] \Rightarrow$$

(Modus ponens)

$$\Rightarrow [\neg q \wedge (q \vee r)] \Rightarrow$$

(Silogismo disyuntivo)

$$\Rightarrow r$$

Proceso axiomático-deductivo

Cuando utilizamos unas reglas de inferencia para transformar unos enunciados (premisas) en otro enunciado (conclusión), estamos efectuando una deducción. Si, además, las premisas son *axiomas* (proposiciones tautológicas, es decir, consideradas verdaderas), el proceso recibe el nombre de **proceso axiomático-deductivo.** Las conclusiones obtenidas se denominan *teoremas.*

Así, el proceso axiomático-deductivo consiste en la derivación u obtención de teoremas a partir de ciertos axiomas y de unas reglas de inferencia dadas, las *leyes del cálculo proposicional.*

Un **sistema axiomático** es el conjunto configurado por los axiomas y las reglas de inferencia adoptados. Así, habrá tantos sistemas axiomáticos como asociaciones *axiomas/reglas de inferencia* podamos formular. Cualquier sistema debe tener *independencia* (ninguno de los axiomas puede derivarse de los restantes, y ninguna de las leyes de cálculo puede derivarse, tampoco, de las restantes), *consistencia* (los axiomas y las leyes de cálculo adoptados sólo pueden dar lugar a tautologías) y *plenitud* (todas las fórmulas correctas son deducibles a partir de los axiomas y las leyes del cálculo proposicional definidas).

Una vez fijado el sistema axiomático, denominamos *demostración de un teorema* $P \Rightarrow Q$ al proceso por el que la proposición condicional $P \rightarrow Q$ se deriva de los axiomas y, en su caso, de los teoremas demostrados con anterioridad, mediante la aplicación de las leyes del cálculo proposicional adoptadas. Los tres procesos deductivos más habituales en matemáticas son:

Demostración directa	Contrarrecíproco	Reducción al absurdo
Partimos de las premisas y, mediante la aplicación de las reglas de cálculo pertinentes, llegamos a la conclusión.	Demostramos la negación de las premisas a partir de la negación de la conclusión, es decir, demostramos $P \Rightarrow Q$ al demostrar $\neg Q \Rightarrow \neg P$.	Partimos de la conjunción de la premisa con la negación de la conclusión y llegamos a una contradicción. Así demostramos $A \Rightarrow B$ al demostrar $(A \wedge \neg B) \Rightarrow (C \wedge \neg C)$.
Demuestra que si un número n *es divisor de otros dos,* a *y* b, *su cuadrado es divisor del producto de ambos.* Hemos de demostrar: $[n \mid a \wedge n \mid b] \Rightarrow [n^2 \mid a \cdot b]$ Si un número *n* es divisor de otro número *a,* existe un tercer número k_1 que multiplicado por *n* nos da *a:* $[(n \mid a) \wedge (n \mid b)] \Rightarrow$ $\Rightarrow [(\exists k_1 \in \mathbb{R} / a = k_1 \cdot n) \wedge$ $\wedge (\exists k_2 \in \mathbb{R} / b = k_2 \cdot n)] \Rightarrow$ $\Rightarrow [a \cdot b = (k_1 \cdot n) \cdot (k_2 \cdot n) = (k_1 \cdot k_2) \cdot n^2] \Rightarrow$ $\Rightarrow [n^2 \mid a \cdot b]$ Como el producto de *a* y *b* es n^2 multiplicado por un número, llegamos a demostrar que n^2 es divisor de $a \cdot b$.	*Por ejemplo, dadas tres rectas del plano* r, s *y* t, *tales que* r *y* s *sean paralelas, demostrar que si* r *y* t *también son paralelas, entonces* s *y* t *son paralelas.* Hemos de demostrar: $[(r \parallel s) \wedge (r \parallel t)] \Rightarrow (s \parallel t)$ Vamos a partir del supuesto que no se cumpla la conclusión. Entonces *s* y *t* tendrán algún punto en común y, como *s* y *r* son paralelas, también *r* y *t* tendrán algún punto común y, por tanto, no serán paralelas. $\neg(s \parallel t) \Rightarrow (s \cap t \neq \emptyset) \Rightarrow$ $\Rightarrow (r \cap t \neq \emptyset) \Rightarrow \neg(r \parallel t)$ Como la conclusión es falsa, *s* y *t* son paralelas, $s \parallel t$.	*Por ejemplo, dadas tres rectas del plano* r, s *y* t, *tales que* r *y* t *sean paralelas, demostrar que si* s *y* t *también son paralelas, entonces* r *y* s *son paralelas.* Hemos de demostrar: $[(r \parallel t) \wedge (s \parallel t)] \Rightarrow (r \parallel s)$ Suponemos que *r* y *s* no son paralelas. Entonces, tienen un punto *P* en común. Como *r* y *s* son paralelas a *t,* eso significaría que existen dos rectas paralelas diferentes que pasan por el mismo punto. Como esto es absurdo, debe ser falso que *r* y *s* no sean paralelas. Así pues, lo son. $\neg(r \parallel s) \Rightarrow (r \cap s = P) \Rightarrow$ $\Rightarrow [(P \in r \parallel t) \wedge (P \in s \parallel t)] \Rightarrow (r \parallel s)$

Prohibida su reproducción

Nombre: ______ Fecha: ______

Geometría afín

1 Determina la ecuación paramétrica y la continua de la recta que pasa por el punto $A = (3, -2, 1)$ y es paralela al vector $\vec{v} = (1, 4, -3)$, y halla tres puntos pertenecientes a esta recta.

2 Los puntos $A = (3, 5, -7)$ y $B = (1, 0, -2)$ determinan una recta. Exprésala con las ecuaciones vectorial, paramétrica, continua e implícita.

3 Halla las ecuaciones de los planos siguientes:

a) Pasa por los puntos $A = (1, 2, 3)$, $B = (-4, 3, 2)$ y $C = (0, 3, -8)$.

b) Pasa por el punto $A = (6, -4, -3)$ y contiene la recta $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-1} = z$.

c) Pasa por el punto $A = (4, -1, 2)$ y su vector normal es $\vec{n} = (-1, 7, 0)$.

d) El plano XZ del sistema de coordenadas cartesiano.

4 Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas y halla el punto de corte, si es posible:

a) $r: \frac{x}{-1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-4}{2}$ y $s: x = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{4}$

b) $r: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x - 2y - z = 3 \end{cases}$

5 Estudia la posición relativa de las rectas r y s, en función de los valores que pueda tomar el parámetro m.

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-9}{6-m} = \frac{z-4}{1} \text{ y } s: \frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{m+2} = \frac{z-2}{1}$$

6 Determina la posición relativa de los planos $\pi_1: x + y - 2z = 0$ y $\pi_2: -x + y + z = -2$.

7 Determina la posición relativa de los planos $\pi_1: -x + y - 1 = 0$, $\pi_2: 3x + 5y - z = 4$ y $\pi_3: -x + y + z = 4$.

8 Halla la posición relativa de la recta $r: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-2}$ con cada uno de los planos del ejercicio anterior.

9 Dada la recta $r: \begin{cases} x = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$ y el plano $\pi: x + 3y + mz + 2 = 0$, halla el valor de m para que la recta sea paralela al plano.

10 ¿Para qué valores del parámetro m la recta $x = y + 1 = \frac{11 - mz}{3}$ es paralela al plano $2x + y + z = 9$? Calcula el punto de intersección de la recta y el plano para $m = 2$.

11 Sean los planos $\pi_1: (m+1)x + 4y + z = 4$; $\pi_2: 3x + (m-1)y = -1$; $\pi_3: 3x + 7y + 2z = 9$. Calcula el valor de m para que tengan una recta en común.

12 Sean las rectas:

$$r: \begin{cases} x - z = 1 \\ y - 2z = 1 \end{cases} \text{ y } s: \frac{x-1}{4} = y = z - 4$$

Calcula la ecuación general del plano que pasa por el punto $(1, 2, 3)$ y sea paralelo a ambas rectas. Calcula, asimismo, la ecuación de un segundo plano que pase por el punto $(1, 2, 3)$ y sea perpendicular a la recta r.

13 Halla la ecuación de la recta perpendicular al plano $\pi: 2x - y + z + 3 = 0$ que pasa por el punto del plano $(-1, 3, a)$.

14 Dadas las rectas $r: x - 2 = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$

$s: x - 1 = \frac{y+7}{2} = \frac{z+5}{3}$ y el punto $P = (1, 1, -1)$ halla la ecuación de la recta que pasa por P y corta a r y s. Para conseguirlo:

a) Halla la ecuación general o cartesiana del plano π que contiene la recta r y el punto P.

b) Halla el punto de intersección M del plano π con la recta s.

c) Determina la ecuación de la recta que pasa por P y M.

d) Comprueba que la recta determinada en el apartado anterior es la que se buscaba.

Prohibida su reproducción

UNIDAD 6. GEOMETRÍA AFÍN

1. *a)* La ecuación paramétrica es:

$$r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -2 + 4\lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases}$$

La ecuación continua es:

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{-3}$$

b) Para hallar puntos de una recta, sólo tenemos que dar valores al parámetro λ. Proporcionando los valore 1,2 y 3 obtenemos los puntos B = (4, 2, −2), C = (5, 6, −5) y D = (6, 22, −17).

2. Para hallar una recta necesitamos un punto, que puede ser el punto A, y un vector director que lo determinan A y B, $\overrightarrow{AB} = (-2, -5, 5)$. Las ecuaciones que determinan esta recta r son:

$$(x, y, z) = (3, 5, -7) + \lambda(-2, -5, 5)$$

$$\begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 5 - 5\lambda \\ z = -7 + 5\lambda \end{cases}$$

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z+7}{5}$$

$$\begin{cases} 5x - 2y - 5 = 0 \\ 5x + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

3. *a)* Determinamos los vectores:

$$\overrightarrow{AB} = (-5, 1, -1) \text{ y } \overrightarrow{AC} = (-1, 1, -11)$$

Calculamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -5 & -1 \\ y-2 & 1 & 1 \\ z-3 & -1 & -11 \end{vmatrix} = 0$$

La ecuación del plano resultante es:

$$\pi: -10x - 10y + 30 = 0$$

b) Tenemos el punto A y el vector director de la recta, nos falta un vector que podemos determinar con el punto A y el punto de la recta (3, −1, 0).

Utilizando el método del apartado anterior obtenemos la ecuación del plano $\pi: -2x - 3y + z + 3 = 0$.

c) La ecuación cartesiana del plano es $-1 \cdot x_0 + 7 \cdot y_0 + 0 \cdot z_0 + d = 0$. Imponemos las coordenadas del punto A y obtenemos la ecuación $-1 \cdot 4 + 7 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + d = 0$, de donde obtenemos d = 3.

Luego $\pi: -x + 7y + 3 = 0$.

d) El plano XZ tiene como vectores directores (1, 0, 0) y (0, 0, 1) y sabemos que el plano pasa por el punto O = (0, 0, 0). Utilizamos el procedimiento del apartado *a)* y obtenemos que el plano que buscamos es π: y = 0.

4. *a)* Los vectores directores de las rectas son linealmente independientes pues $-\frac{1}{1} \neq \frac{3}{1} \neq \frac{2}{4}$.

Escogemos un punto A de r y un punto A′ de s y vemos si $\{\vec{v}, \vec{v}', [\overrightarrow{AA'}]\}$ son linealmente dependientes o independientes.

$$A = (0, -2, 4) \quad A' = (0, 1, -2) \quad \overrightarrow{AA'} = (0, 3, -6)$$

Y calculamos el determinante de los tres vectores:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 42 \neq 0$$

Dado que el rang $\{\vec{v}, \vec{v}', \overrightarrow{AA'}\} = 3$ las rectas se cruzan.

b) Consideramos las matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Calculamos el rango de las matrices mediante los determinantes. $|M| = -2$ y $|M'| = 0$. De manera que rang (M) = rang (M)′ = 3 las rectas se cortan, es decir, son secantes.

Para hallar el punto de corte resolvemos el sistema de ecuaciones y obtenemos que el punto de corte es $P = \left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}\right)$.

5. Comprobamos si los vectores directores son linealmente dependientes.

$$\frac{2}{2} = \frac{6-m}{2+m} = \frac{1}{1}$$

- Para m = 2, los vectores son linealmente dependientes, de manera que las rectas o son paralelas o coinciden.
  Escogemos el punto A = (1, 9, 4) de r y vemos si pertenece a s, sustituyendo las coordenadas del punto en la ecuación de la recta s:

$$\frac{1+3}{2} \neq \frac{9-5}{4} = \frac{4-2}{1}$$

Puesto que el punto de r no pertenece a s, las rectas r y s para m = 2 son paralelas.

Prohibida su reproducción

- Para $m \neq 2$ los vectores son linealmente independientes y el $\text{rang}\{\vec{v}, \vec{v}', \overrightarrow{AA'}\} = 2$ donde $\overrightarrow{AA'} = (-4, -4, -2)$. Luego las rectas se cortarán.

6. Comprobamos si los vectores normales de los planos son linealmente independientes:

$$\frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{-2}{1}$$

Vemos que los vectores son linealmente independientes, de manera que los planos son secantes, es decir, se cortan.

7. Las matrices asociadas son:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Calculamos su rango mediante determinantes. Vemos que rang (M) = rang (M′) = 3 por lo que los planos se cortan.

8. Escribimos la expresión implícita de la recta r.

$$r: \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ -2x + z - 2 = 0 \end{cases}$$

Estudiaremos los rangos de las matrices M de coeficientes y la ampliada M′ asociadas a los tres planos.

a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

El rang(M) = rang(M′) = 3, por lo tanto la recta y el plano se cortan.

b) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \quad M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & -1 & 4 \end{array}\right)$

El rang(M) = rang(M′) = 3, por lo tanto la recta y el plano se cortan.

c) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$

El rang(M) = rang(M′) = 2, por lo tanto la recta está contenida en el plano.

9. Para que recta y plano sean paralelos debe cumplirse rang(M) = 2 y rang(M′) = 3. Escribimos la matriz M y la matriz ampliada M′ asociada al sistema

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & m \end{pmatrix} \quad M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & m & -2 \end{array}\right)$$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & m \end{vmatrix} = m + 3$$

Como $m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -3$ tenemos que para este valor de m rang(M) = 2 y rang(M′) = 3, por lo tanto la recta y el plano son paralelos.

10. A partir de la ecuación continua de la recta:

$$x = y + 1 = \frac{11 - mz}{3}$$

se pueden obtener las ecuaciones implícitas:

$$\begin{cases} x = y + 1 \\ x = \dfrac{11 - mz}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ 3x = 11 - mz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ 3x + mz = 11 \end{cases}$$

Si el plano y la recta son paralelos, el sistema formado por sus ecuaciones será incompatible. Para que esto ocurra se requiere que rang(M) < 3 (M matriz de coeficientes), lo que implica que det(M) = 0. Veamos los valores de m que anulan det(M):

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & m \end{vmatrix} = -2m - m + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3m + 3 = 0 \Rightarrow m = 1$$

Para este valor de m podría ocurrir que la recta pertenezca al plano. Para verlo, tomamos un punto cualquiera de la recta. Observando su ecuación continua (con m = 1), tomamos, por ejemplo, (0, –1, 11).

Sustituyendo en $2x + y + z = 9$, comprobamos que no pertenece al plano: $2 \cdot 0 + (-1) + 11 \neq 9$

Por tanto, para que la recta sea paralela se requiere que m = 1; en los demás casos la recta intersectará al plano.

Para m = 2 resolveremos por Cramer el siguiente sistema:

$$\begin{array}{l} 2x + y + z = 9 \\ x - y = 1 \\ 3x + 2z = 11 \end{array} \Leftrightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 11 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 11 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}} = 2 \; ; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}} = 1$$

Por tanto, cuando m = 2 la recta corta al plano en el punto (3, 2, 1).

Prohibida su reproducción

Para que los planos tengan una recta común se requiere que el sistema que forman sea compatible e indeterminado. Veamos los valores de m que anulan el determinante:

$$|M| = 0; \quad \begin{vmatrix} m+1 & 4 & 1 \\ 3 & m-1 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 2m^2 - 3m - 2 = 0$$

$$m = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \begin{cases} 2 \\ -0,5 \end{cases}$$

El sistema será compatible y determinado (S.C.D.) para $m \neq -0{,}5$; 2. Debemos ver a qué valor de m (–0,5 ó 2) corresponde un sistema compatible indeterminado (S.C.I.).

Para m = 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 7 & 2 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 + F_2 - 2F_1]{F_2 \to -(F_2 - F_1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Para m = –0,5:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0,5 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & -1,5 & 0 & -1 \\ 3 & 7 & 2 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 10F_1 + \frac{2}{3}F_2]{F_1 \to 2F_1,\ F_2 \to -(F_2 - 6F_1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 2 & 8 \\ 0 & 51 & 12 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

12. Sean $\vec{u}$ un vector director de r y $\vec{v}$ uno de s, tales que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean linealmente independientes; entonces, el plano por (1, 2, 3) paralelo a r y s es $\pi\,[(1, 2, 3);\ \vec{u}, \vec{v}\,]$. Hallamos $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

De la ecuación de la recta r se pueden obtener fácilmente las ecuaciones paramétricas:

$$r: \begin{cases} x - z = 1 \\ y - 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 0 + \lambda \end{cases}$$

De donde deducimos que $\vec{u} = (1, 2, 1)$ es un vector director de la recta r.

La forma continua de la ecuación de la recta s nos indica que uno de sus vectores directores es $\vec{v} = (4, 1, 1)$.

Observamos que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes, así calculamos la ecuación general del plano por (1, 2, 3) con la dirección de (1, 2, 1) y (4, 1, 1):

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 4 \\ y-2 & 2 & 1 \\ z-3 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= x - 1 + 3(y-2) - 7(z-3) = 0$$

Lo cual se puede escribir ordenadamente:

$$x + 3y - 7z + 14 = 0$$

El plano perpendicular a r que pasa por (1, 2, 3) tiene por vector normal $\vec{u} = (1, 2, 1)$, por lo que su ecuación será de la forma $x + 2y + z + A = 0$.

Calculamos el valor de A imponiendo que (1, 2, 3) sea del plano:

$$1 + 2 \cdot 2 + 3 + A = 0 \Leftrightarrow A = -8$$

Por lo que la ecuación del plano es:

$$x + 2y + z - 8 = 0$$

13. Si el punto (–1, 3, a) es del plano, ha de cumplir su ecuación:

$$2 \cdot (-1) - 3 + a + 3 = 0 \Leftrightarrow a = -2$$

El vector director de la recta buscada ha de ser paralelo al vector característico del plano, lo que permite coger como vector director este mismo vector. Así, la ecuación de la recta es:

$$(x, y, z) = (-1, 3, 2) + \lambda(-2, 1, 1)$$

14. *a)* La ecuación del plano π se puede encontrar de dos maneras diferentes.

$$\left.\begin{array}{l} A + B - C + D = 0 \\ 2Q - B + D = 0 \\ 3A + B - C + D = 0 \end{array}\right\}$$

que tiene como solución A = 0, B = D, C = 2D. Tomando D = 1, por ejemplo, obtenemos la ecuación buscada: $y + 2z + 1 = 0$.

b) Las ecuaciones paramétricas de la recta s son:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -7 + 2\lambda \\ z = -5 + 3\lambda \end{cases}$$

Sustituyendo en las ecuaciones del plano anterior, tenemos:

$$(-7 + 2\lambda) + 2(-5 + 3\lambda) + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8\lambda - 16 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2.$$

Luego, el punto de corte es:

$$M = (1 + 2, -7 + 4, -5 + 6) = (3, -3, 1)$$

c) La ecuación continua de la recta es:

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-1}{-3-1} = \frac{z+1}{1+1} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+1}{2}$$

d) Por construcción, esta recta pasa por P = (1, 1, –1) y corta a s en M = (3, –3, 1). Para comprobar que también corta a r, podemos ver si el sistema formado por las ecuaciones continuas de las rectas es compatible determinado.

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{-1} \\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{-4} = \dfrac{z+1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 5 \\ y + 2z = -1 \\ 2x + y = 3 \\ x - z = 2 \end{cases}$$

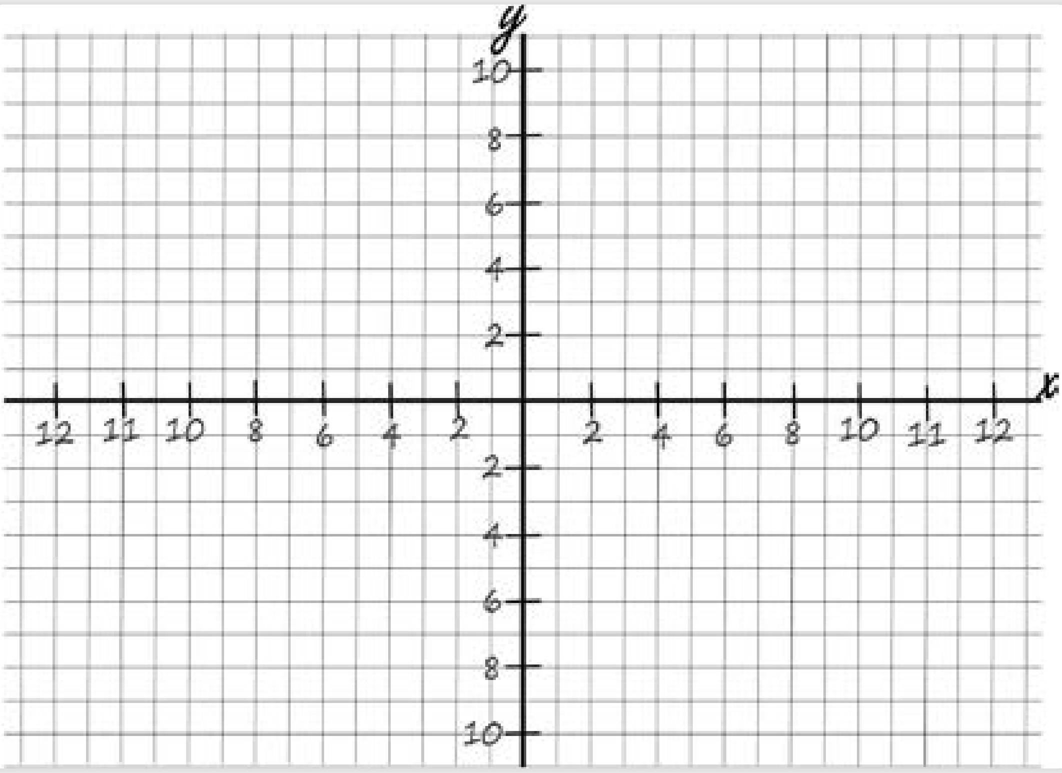
Prohibida su reproducción

Nombre: ______________________ Fecha: ______________

1. Realiza una maqueta con materiales reciclables, en el que se crucen dos planos con un ángulo agudo de 40 grados, resalta la recta que se forma con un color diferente de los planos.

   En cada plano, con la ayuda del docente, dibuja vectores en cada plano (dos por cada plano) y determina sus distancias con una regla.

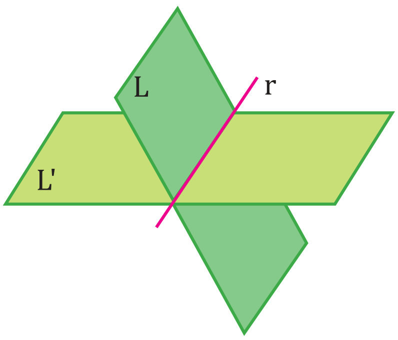
   Luego colócalo en un eje cartesiano, para que con la ayuda del profesor determines las ecuaciones aproximadas de dichos planos.



Trabajo inclusivo

SOLUCIONARIO

Los planos son secantes, es decir, se cortan según una recta.



Prohibida su reproducción

CICLO DEL APRENDIZAJE

¿Cómo dinamizo el aula?

Experiencia concreta

- Debatir la necesidad que tienen los ingenieros civiles de dominar los conceptos de distancias entre planos y rectas en el espacio, en la construcción de edificios y otras estructuras imortantes en nuestra realidad nacional.

Observación reflexiva

- Diferenciar los conceptos entre ecuaciones contínuas y ecuaciones implícitas
- Comparar las definiciones de espacio bidimensional y espacio tridimensional
- Usar una parametrización adecuada aplicada a rectas en el espacio.

Conceptualización

- Identificar las ecuaciones relacionadas con las posiciones relativas de las rectas y tambien con los planos.

Aplicación

- Usar estos conceptos en el cálulo de distancias entre puntos, lineas y planos
- Reconocer el uso de métodos deductivos o inductivos para determinar las ecuaciones respectivas en las actividades realizadas.
- Producir predicciones usando los modelos matemáticos estudiados.

Prohibida su reproducción

BANCO DE PREGUNTAS

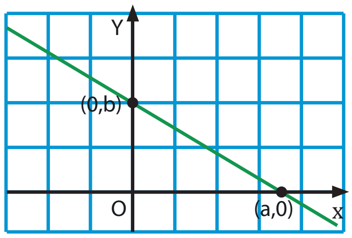
1. Qué es una ecuación paramétrica?

   Es una ecuación que permite representar una curva o superficie en el plano o en el espacio, mediante valores que recorren un intervalo de números reales, mediante una variable , llamada parámetro, considerando cada coordenada de un punto como una función dependiente del parámetro.

2. Cuál es la ecuación canónica de la recta?

   - Si la recta corta a los ejes en los puntos (a, 0) y (0, b), podemos escribir la recta como:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



   - A esta expresión la conocemos como ecuación canónica o segmentaria de la recta.

3. Cuáles son las ecuaciones implícitas de la recta?

$$\left.\begin{array}{r} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{array}\right\}$$

   A estas ecuaciones las denominamos ecuaciones implícitas de la recta.

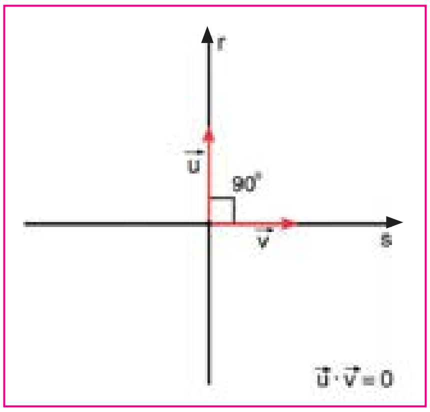
4. Qué matemático francés fue el fundador de la geometría descriptiva?

   Gaspard Monge

5. Cuáles son las condiciones vectoriales, para que dos rectas en el espacio sean perpendiculares?

   Dos rectas r y s son perpendiculares si el producto escalar de sus vectores directores respectivos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es cero.

$$r \perp s \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$



Prohibida su reproducción

Geometría afín

Vector fijo de origen A y extremo B, $\overrightarrow{AB}$: par ordenado (A, B).

Vector libre: conjunto de vectores equipolentes a uno dado. Su dirección, módulo y sentido son los de uno cualquiera de sus representantes.

Operaciones con vectores libres:

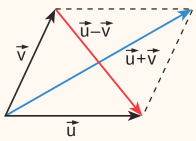
Sea $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

Adición

$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$

Multiplicación por un número real

$$k\vec{u} = (k u_1, k u_2, k u_3)$$



$\vec{u}$ es combinación lineal de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ si $\exists\, k_1, k_2, ..., k_n \in \mathbb{R}$, tales que: $\vec{u} = k_1\,\vec{u}_1 + k_2\,\vec{u}_2 + ... + k_n\,\vec{u}_n$

n vectores son **linealmente independientes** si ninguno de ellos puede expresarse como combinación lineal de los demás. En caso contrario, son **linealmente dependientes.**

Rango de n vectores: máximo número de vectores linealmente independientes del conjunto de n vectores.

Ecuaciones de la recta r (A; $\vec{v}$):

Ecuación vectorial: $\vec{p} = \vec{a} + k\vec{v},\ k \in \mathbb{R}$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{matrix} x = a_1 + k v_1 \\ y = a_2 + k v_2 \\ z = a_3 + k v_3 \end{matrix}\right\}$

Ecuaciones continuas: $\dfrac{x - a_1}{v_1} = \dfrac{y - a_2}{v_2} = \dfrac{z - a_3}{v_3}$

Ecuaciones implícitas: $\left\{\begin{matrix} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{matrix}\right.$

Prohibida su reproducción

2. PLANOS EN EL ESPACIO

Para determinar un plano en el espacio, son precisos un punto y dos direcciones diferentes. Estas direcciones vienen dadas por dos vectores no paralelos a los que denominamos vectores directores del plano.

Consideremos el plano L que pasa por el punto A y tiene los vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Lo simbolizaremos por $L(A; \vec{u}, \vec{v})$.

Veamos, a continuación, diferentes formas de expresarlo.

2.1. Ecuación vectorial

Observa en la figura el plano $L\ (A; \vec{u}, \vec{v})$.

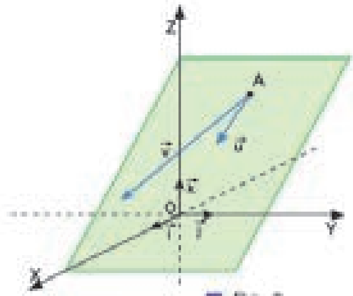


Fig. 3.

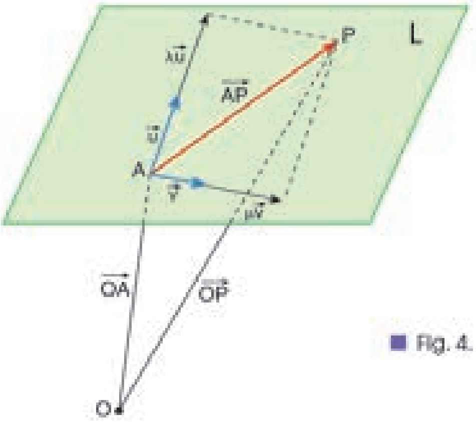


Fig. 4.

Si $A = (-1, 1, 3)$,

$\vec{u} = (1, 0, -1)$ y

$\vec{v} = (3, -2, 1)$

Ecuación vectorial de $\pi\ (A; \vec{u}, \vec{v})$:

$$p = a + \lambda \vec{u} + \mu\vec{v}$$

$$(x, y, z) = (-1, 1, 3) + \lambda(1, 0, -1) + \mu\,(3, -2, 1)$$

Dado un punto genérico P del plano, el vector $\overrightarrow{AP}$ resulta de la suma de múltiplos de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Por tanto, $\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ con λ y $\mu \in \mathbb{R}$.

Además, se cumple:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

Sean $\vec{p}$ y $\vec{a}$ los vectores posición de P y A, respectivamente. Puesto que $\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, a la igualdad anterior la podemos escribir como:

$$\vec{p} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

A esta expresión la conocemos como ecuación vectorial del plano.

Sean (x, y, z), (a_1, a_2, a_3),(u_1, u_2, u_3) y (v_1, v_2, v_3) las componentes de $\vec{p}$,$\vec{a}$,$\vec{u}$ y $\vec{v}$ respectivamente. Entonces, podemos expresar la ecuación anterior como:

$$(x, y, z) = (a_1,a_2,a_3) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu\,(v_1, v_2, v_3)$$

Prohibida su reproducción

Ecuaciones del plano π $(A;\, \vec{u},\, \vec{v})$:

Ecuación vectorial: $\vec{p} = \vec{a} + \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = a_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = a_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{array}\right\}$

Ecuación general: $Ax + By + Cz + D = 0$

Posiciones relativas:

Sea M la matriz del sistema formado, en cada caso, por las ecuaciones implícitas de las rectas y las ecuaciones generales de los planos, y M′ la matriz ampliada correspondiente.

Posición relativa de dos rectas, $r\ (A;\, \vec{v})$ *y* $r'\ (A';\, \vec{v}\,')$:

Coincidentes	Paralelas	Se cortan	Se cruzan
rang (M) = 2 rang (M′) = 2	rang (M) = 2 rang (M′) = 3	rang (M) = 3 rang (M′) = 3	rang (M) = 3 rang (M′) = 4
$\vec{v} = k\,\vec{v}\,'$ $\forall P \in r,\ P \in r'$	$\vec{v} = k\,\vec{v}\,'$ $\forall P \in r,\ P \notin r'$	$\vec{v} \neq k\,\vec{v}\,'$ $\lvert \vec{v}, \vec{v}\,', [\overrightarrow{AA'}] \rvert = 0$	$\vec{v} \neq k\,\vec{v}\,'$ $\lvert \vec{v}, \vec{v}\,', [\overrightarrow{AA'}] \rvert \neq 0$

Posición relativa de dos planos, $\pi\ (A;\, \vec{u}, \vec{v})$ *y* $\pi'\ (A';\, \vec{u}\,', \vec{v}\,')$:

Coincidentes	rang (M) = 1 rang (M′) = 1	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$
Paralelos	rang (M) = 1 rang (M′) = 2	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$
Secantes	rang (M) = 2 rang (M′) = 2	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$ o $\frac{A}{A'} \neq \frac{C}{C'}$ o $\frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$

Ecuación de un **haz de planos secantes:**

$$\pi_r\!: \alpha\,\pi + \beta\,\pi', \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (\text{siendo } r = \pi \cap \pi')$$

Ecuación de un **haz de planos paralelos:**

$$Ax + By + Cz + K = 0,\ K \in \mathbb{R}$$

Posición relativa de recta y plano, $r\ (A;\, \vec{v})$ *y* $\pi\ (A';\, \vec{u}\,', \vec{v}\,')$:

r contenida en π	r y π paralelos	r y π secantes
rang (M) = 2 rang (M′) = 2	rang (M) = 2 rang (M′) = 3	rang (M) = 3 rang (M′) = 3
$\vec{v} = k_1\,\vec{u}\,' + k_2\,\vec{v}\,'$ $\forall P \in r,\ P \in \pi$	$\vec{v} = k_1\,\vec{u}\,' + k_2\,\vec{v}\,'$ $\forall P \in r,\ P \notin \pi$	$\vec{v} \neq k_1\,\vec{u}\,' + k_2\,\vec{v}\,'$ $\lvert \vec{v}, \vec{u}, \vec{v} \rvert \neq 0$

Geometría métrica

Producto escalar, $\vec{u} \cdot \vec{v}$**:**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \lvert\vec{u}\rvert\ \lvert\vec{v}\rvert \cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) & \text{si } \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ son no nulos} \\ 0 & \text{si } \vec{u} \text{ o } \vec{v} \text{ es el vector nulo} \end{cases}$$

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0\,; \quad \lvert\vec{u}\rvert = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{v}}$$

$$\lvert \vec{u} \cdot \vec{v} \rvert = \lvert\vec{u}\rvert\, \lvert \mathrm{Proy}_{\vec{u}}\vec{v} \rvert = \lvert\vec{v}\rvert\, \lvert \mathrm{Proy}_{\vec{v}}\,\vec{u} \rvert$$

Si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ en una base ortonormal:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1\,v_1 + u_2\,v_2 + u_3\,v_3$$

$$\lvert\vec{u}\rvert = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2}$$

$$\cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{u_1\,v_1 + u_2\,v_2 + u_3\,v_3}{\sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2}\ \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2}}$$

Producto vectorial, $\vec{u} \times \vec{v}$**:**

- Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son no nulos:
  - — Módulo: $\lvert \vec{u} \times \vec{v} \rvert = \lvert\vec{u}\rvert\,\lvert\vec{v}\rvert$ sen $(\vec{u}, \vec{v})$.
  - — Dirección: simultáneamente perpendicular a las de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
  - — Sentido: el de avance de un sacacorchos que gira de $\vec{u}$ hacia $\vec{v}$ recorriendo el ángulo más pequeño.
- Si $\vec{u} = 0$ o $\vec{v} = 0$: $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$

El módulo del producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ coincide con el área del paralelogramo construido sobre ellos.

Producto mixto, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$**:**

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$$

El valor absoluto del producto mixto de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ coincide con el volumen del paralelepípedo construido sobre ellos.

Ángulos entre elementos del espacio:

Entre dos rectas, $r(A;\, \vec{u})$ *y* $r'(B;\, \vec{v})$:

$$\alpha = \text{arc cos}\,\frac{\lvert\vec{u} \cdot \vec{v}\rvert}{\lvert\vec{u}\rvert\,\lvert\vec{v}\rvert} \qquad \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$r \perp s \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Entre dos planos $\pi\ (A;\, \vec{u}, \vec{v})$: $Ax + By + Cz + D$ *y* $\pi'\ (B;\, \vec{u}\,', \vec{v}\,')$: $A'x + B'y + C'z + D'$*, con vectores normales* $\vec{n}$ *y* $\vec{n}\,'$:

$$\alpha = \text{arc cos}\,\frac{\lvert\vec{n} \cdot \vec{n}\,'\rvert}{\lvert\vec{n}\rvert\,\lvert\vec{n}\,'\rvert} \qquad \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\pi \perp \pi' \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}\,' = 0 \Leftrightarrow AA' + BB' + CC' = 0$$

Entre recta y plano, $r\ (A;\vec{v})$ *y* $\pi\ (A';\, \vec{u}\,';\, \vec{v}\,')$:

$$\alpha = \text{arc sen}\,\frac{\lvert\vec{v} \cdot \vec{n}\rvert}{\lvert\vec{v}\rvert\,\lvert\vec{n}\rvert} \qquad \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$r \perp \pi \Leftrightarrow \frac{v_1}{A} = \frac{v_2}{B} = \frac{v_3}{C}$$

Distancias entre elementos del espacio:

Entre dos puntos, $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$.

$$d\,(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Del punto $P = (p_1, p_2, p_3)$ a la recta $r\ (Q;\, \vec{v})$.

$$d\,(P, r) = \frac{\lvert [\overrightarrow{QP}] \times \vec{v} \rvert}{\lvert\vec{v}\rvert}$$

Del punto $P = (p_1, p_2, p_3)$ al plano π: $Ax + By + Cz + D = 0$

$$d\,(P, \pi) = \frac{\lvert Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D \rvert}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Entre dos rectas, $r\ (A;\, \vec{v})$ y $r'\ (A';\, \vec{v}\,')$.

$$d\,(r, r') = \frac{\lvert [[\overrightarrow{AA'}], \vec{v}, \vec{v}\,'] \rvert}{\lvert \vec{v} \times \vec{v}\,' \rvert}$$

Prohibida su reproducción

3. POSICIÓN RELATIVA DE RECTA Y PLANO

Para determinar las posiciones relativas de una recta $r(A';\vec{v})$ y un plano $L(P;\vec{u},\vec{v})$, expresaremos la recta mediante sus ecuaciones implícitas, y el plano, mediante su ecuación general.

$$r: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D = 0 \end{cases} \qquad L: Ax + By + Cz + D = 0$$

A continuación, consideramos el sistema formado por las tres ecuaciones y escribimos la matriz M y la matriz ampliada M', asociadas con dicho sistema:

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \qquad M' = \left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & -D_3 \end{array}\right)$$

Si al reducir las matrices:

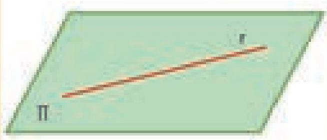
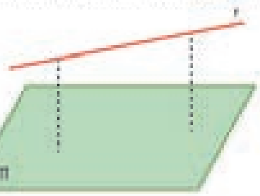
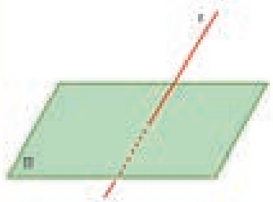
M tiene dos filas no nulas. M' tiene dos filas no nulas. **Sistema consistente indeterminado**: Sus soluciones dependen de un parámetro. La recta está contenida en el plano. 	M tiene dos filas no nulas. M' tiene tres filas no nulas. **Sistema inconsistente**: No hay puntos comunes. La recta y el plano son paralelos. 	M tiene tres filas no nulas. M' tiene tres filas no nulas. **Sistema consistente determinado**: La recta y el plano son secantes. 

Tabla 7.

En caso de que la recta y el plano vengan dados por sus ecuaciones vectoriales o paramétricas, es conveniente determinar sus posiciones relativas a partir de sus vectores directores.

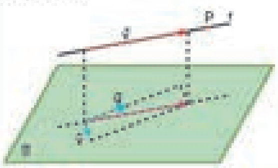
<table>
<tr><th>Recta contenida en el plano</th><th>Recta y plano paralelos</th><th>Recta y plano secantes</th></tr>
<tr><td colspan="2">Si el vector director de la recta es suma de múltiplos de los vectores directores del plano, la recta está contenida en el plano o es paralela a él. En este caso, el rango de la matriz formada por las componentes de los tres vectores será 2.
Para distinguir cada caso, bastará tomar un punto cualquiera de la recta y sustituir sus coordenadas en la ecuación del plano</td><td rowspan="2">Si al vector director de la recta no lo podemos expresar como suma de múltiplos de los vectores directores del plano, la recta y el plano serán secantes.
En este caso, la matriz formada por las componentes de los tres vectores será de rango 3.
</td></tr>
<tr><td>Si verifica dicha ecuación, la recta está contenida en el plano.
</td><td>Si no la verifica, la recta es paralela al plano.
</td></tr>
</table>

Tabla 8.

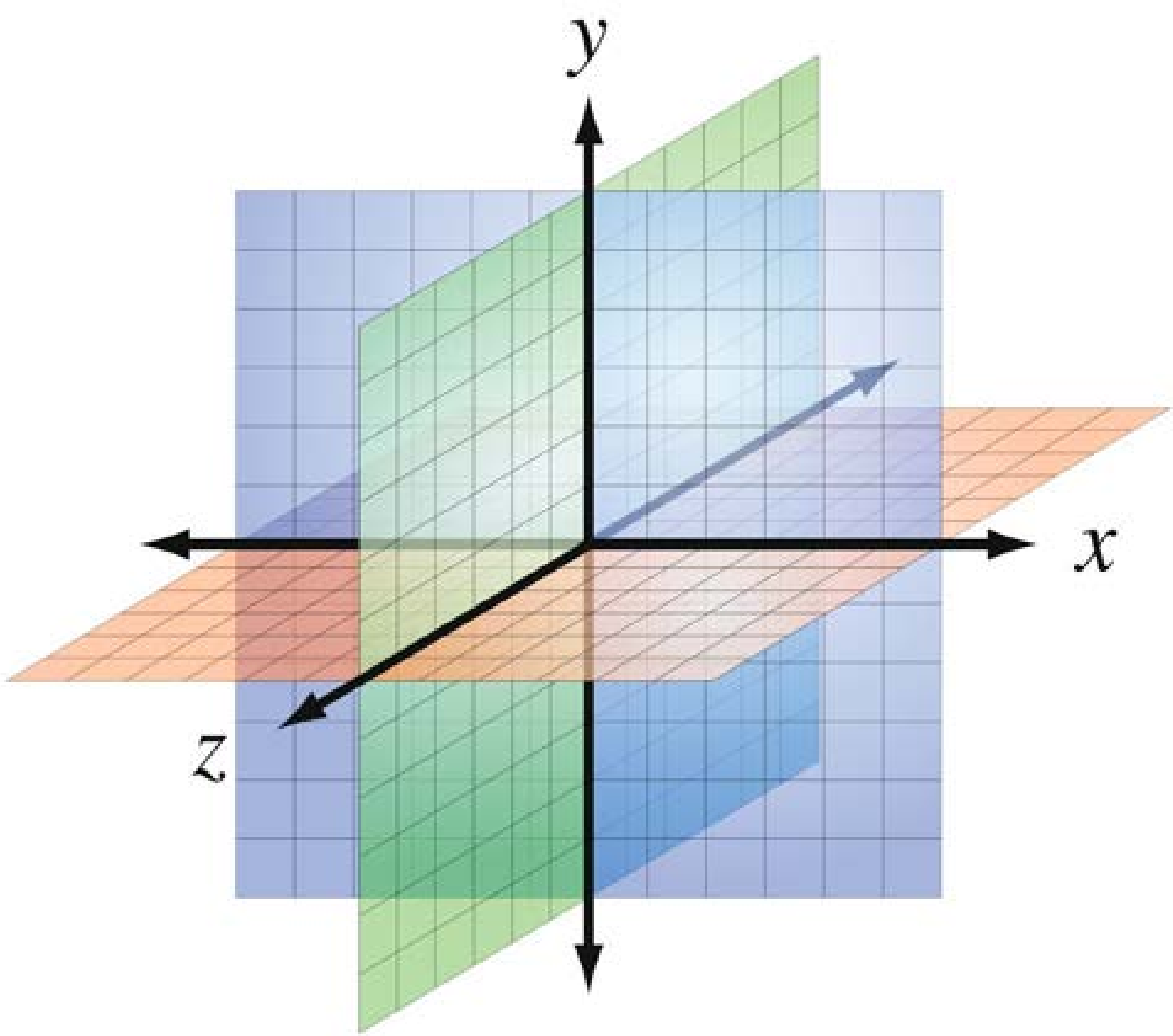
Prohibida su reproducción

Como en esta unidad, las construcciones geométricas son más complicadas para el docente, se recomienda el uso de un proyector, para que con una computadora presente a los estudiantes de manera más ágil los temas pertinentes a esta unidad.

Los organizadores gráficos es un buen recurso comparativo, en el momento de abordar los temas de posiciones relativas.

El uso de talleres con gráficos prediseñados, es de gran utilidad para alcanzar las destrezas deseadas.

Se recomienda al docente que junto con sus alumnos realice modelos en tres dimensiones (maquetas) con materiales como madera, plástico u otros materiales reciclables, de los ejes de coordenadas ortogonales para poder visualizar mejor a los planos en este espacio.



https://goo.gl/UvWgU7

Prohibida su reproducción

Página 150 y 151

5 Geometría en el espacio

CONTENIDOS:

Noticia:

elpaís.com tiene una sección de juegos con la ciencia, en la que se publicó el siguiente artículo: *La importancia del juego en Matemática*. Lo puedes leer en: http://elpais.com/elpais/2015/08/19/ciencia/1439982619_073329.html.

Web:

El sobre mágico de Lewis Carroll. **Realiza** este juego con planos en: http://elpais.com/elpais/2015/07/02/ciencia/1435850002_183433.html.

EN CONTEXTO:

El uso de planos y líneas oblicuas sigue siendo predominante en el diseño arquitectónico contemporáneo. En esta unidad, estudiaremos cómo definir estos objetos en el espacio, y también, cómo comparar sus posiciones relativas.

http://goo.gl/t7UrC8

Prohibida su reproducción

150 151

Orientación didáctica

- Para anticipar posibles dificultades en los contenidos de la unidad, el profesor o profesora puede utilizar las siguientes propuestas: repasar los conceptos y operaciones de vectores en el espacio tridimensional, así como una revisión de los conceptos principales y operativos de sistemas de ecuaciones lineales y matrices elementales.

  El profesor puede sugerir la participación de estudiantes en el pizarrón, siguiendo los procedimientos completos de los ejercicios con mayor dificultad, y de esta forma asegura conocimientos previos y anticipa posibles dificultades en los contenidos de la unidad.

  Se sugiere también que el docente les pida a los estudiantes que justifiquen sus respuestas.

Prohibida su reproducción

Solucionario

7. Estudia la posición relativa de los siguientes pares de planos.

a) $\pi: \; 3x - y + 2z = 0$
$\pi': \; 6x - 2y + 4z - 1 = 0$

b) $\pi: \; 2x - y + 3z + 4 = 0$
$\pi': \; x + 3y - 2z + 1 = 0$

c) $\pi: \; 5x - 2y + 3z + 7 = 0$
$\pi': \; 2x - 3y + 7z - 1 = 0$

d) $\pi: \; z + 1 = 0$
$\pi': \; z = 1$

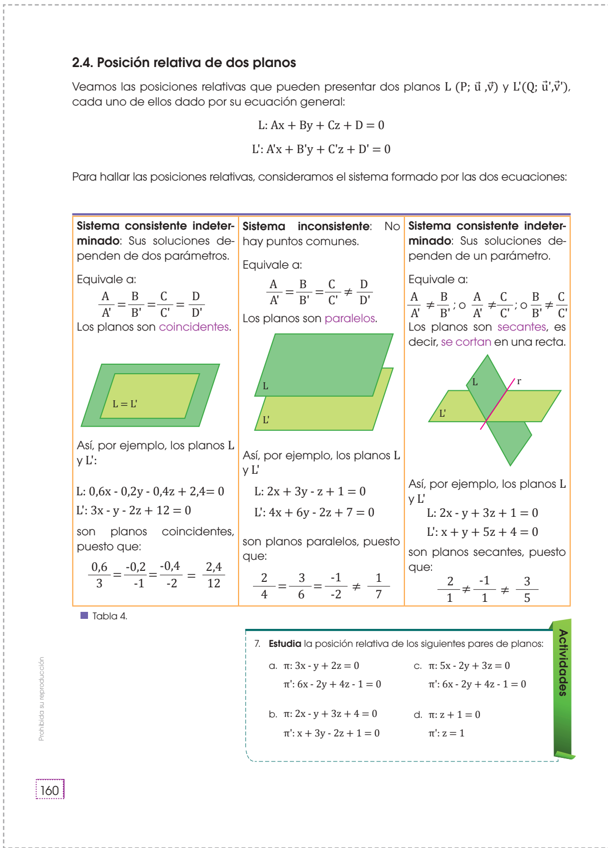
a) paralelos;

b) se cortan

c) se cortan

d) paralelos

Página 160



2.4. Posición relativa de dos planos

Veamos las posiciones relativas que pueden presentar dos planos L $(P; \vec{u}, \vec{v})$ y L'$(Q; \vec{u}', \vec{v}')$, cada uno de ellos dado por su ecuación general:

$$L: Ax + By + Cz + D = 0$$

$$L': A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

Para hallar las posiciones relativas, consideramos el sistema formado por las dos ecuaciones:

Sistema consistente indeterminado: Sus soluciones dependen de dos parámetros. Equivale a: $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$ Los planos son coincidentes.	**Sistema inconsistente**: No hay puntos comunes. Equivale a: $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$ Los planos son paralelos.	**Sistema consistente indeterminado**: Sus soluciones dependen de un parámetro. Equivale a: $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$; o $\frac{A}{A'} \neq \frac{C}{C'}$; o $\frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$ Los planos son secantes, es decir, se cortan en una recta.
L = L'	L L'	L r L'
Así, por ejemplo, los planos L y L': $L: 0{,}6x - 0{,}2y - 0{,}4z + 2{,}4 = 0$ $L': 3x - y - 2z + 12 = 0$ son planos coincidentes, puesto que: $\frac{0{,}6}{3} = \frac{-0{,}2}{-1} = \frac{-0{,}4}{-2} = \frac{2{,}4}{12}$	Así, por ejemplo, los planos L y L' $L: 2x + 3y - z + 1 = 0$ $L': 4x + 6y - 2z + 7 = 0$ son planos paralelos, puesto que: $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{-1}{-2} \neq \frac{1}{7}$	Así, por ejemplo, los planos L y L' $L: 2x - y + 3z + 1 = 0$ $L': x + y + 5z + 4 = 0$ son planos secantes, puesto que: $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{3}{5}$

Tabla 4.

Actividades

7. **Estudia** la posición relativa de los siguientes pares de planos:

a. $\pi: 3x - y + 2z = 0$
$\pi': 6x - 2y + 4z - 1 = 0$

b. $\pi: 2x - y + 3z + 4 = 0$
$\pi': x + 3y - 2z + 1 = 0$

c. $\pi: 5x - 2y + 3z = 0$
$\pi': 6x - 2y + 4z - 1 = 0$

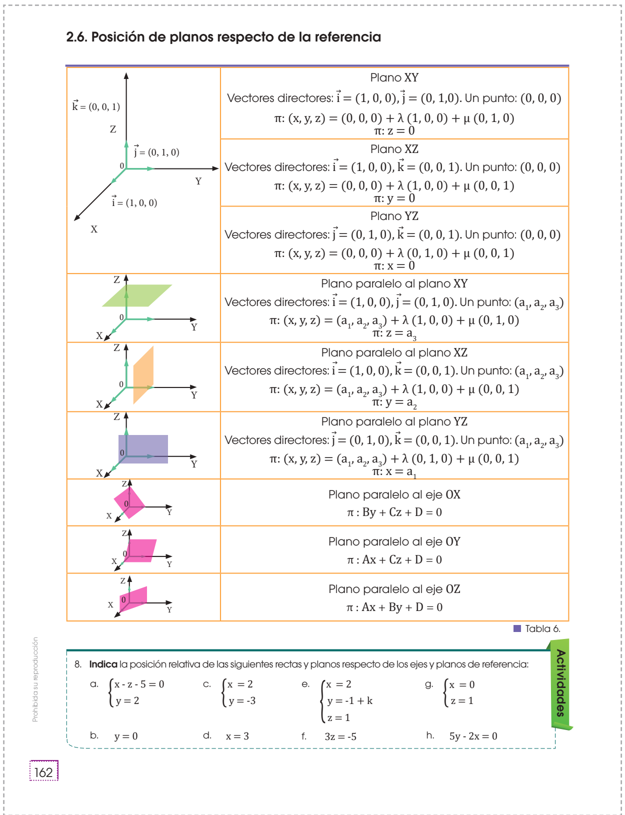
d. $\pi: z + 1 = 0$
$\pi': z = 1$

Prohibida su reproducción

160

Prohibida su reproducción

Página 162



2.6. Posición de planos respecto de la referencia

$\vec{k} = (0, 0, 1)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{i} = (1, 0, 0)$	Plano XY Vectores directores: $\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0)$. Un punto: $(0, 0, 0)$ $\pi: (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda (1, 0, 0) + \mu (0, 1, 0)$ $\pi: z = 0$
	Plano XZ Vectores directores: $\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{k} = (0, 0, 1)$. Un punto: $(0, 0, 0)$ $\pi: (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda (1, 0, 0) + \mu (0, 0, 1)$ $\pi: y = 0$
	Plano YZ Vectores directores: $\vec{j} = (0, 1, 0), \vec{k} = (0, 0, 1)$. Un punto: $(0, 0, 0)$ $\pi: (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda (0, 1, 0) + \mu (0, 0, 1)$ $\pi: x = 0$
	Plano paralelo al plano XY Vectores directores: $\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0)$. Un punto: (a_1, a_2, a_3) $\pi: (x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda (1, 0, 0) + \mu (0, 1, 0)$ $\pi: z = a_3$
	Plano paralelo al plano XZ Vectores directores: $\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{k} = (0, 0, 1)$. Un punto: (a_1, a_2, a_3) $\pi: (x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda (1, 0, 0) + \mu (0, 0, 1)$ $\pi: y = a_2$
	Plano paralelo al plano YZ Vectores directores: $\vec{j} = (0, 1, 0), \vec{k} = (0, 0, 1)$. Un punto: (a_1, a_2, a_3) $\pi: (x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda (0, 1, 0) + \mu (0, 0, 1)$ $\pi: x = a_1$
	Plano paralelo al eje 0X $\pi : By + Cz + D = 0$
	Plano paralelo al eje 0Y $\pi : Ax + Cz + D = 0$
	Plano paralelo al eje 0Z $\pi : Ax + By + D = 0$

Tabla 6.

Actividades

8. **Indica** la posición relativa de las siguientes rectas y planos respecto de los ejes y planos de referencia:

a. $\begin{cases} x - z - 5 = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$ e. $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + k \\ z = 1 \end{cases}$ g. $\begin{cases} x = 0 \\ z = 1 \end{cases}$

b. $y = 0$ d. $x = 3$ f. $3z = -5$ h. $5y - 2x = 0$

Prohibida su reproducción

Solucionario

2. Indica la posición relativa de las siguientes rectas y planos respecto de los ejes y planos de referencia.

a. $\begin{cases} x - z - 5 = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$

b. $y = 0$ d. $x = 3$

e. $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + k \\ z = 1 \end{cases}$ g. $\begin{cases} x = 0 \\ z = 1 \end{cases}$

f. $3z = -5$ h. $5y - 2x = 0$

a) Recta paralela al plano XZ;

b) Plano XZ;

c) Recta paralela al eje 0Z;

d) Plano paralelo a YZ;

e) Recta paralela al eje 0Y;

f) Recta paralela al plano XY;

g) Recta paralela al eje 0Y;

h) Plano corta los tres planos de referencia

Prohibida su reproducción

Solucionario

Determinamos la posición relativa entre r y π estudiando la compatibilidad del sistema formado por las ecuaciones implícitas de r y la ecuación general de π:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=-3 \\ 2x-z=0 \\ 3x+y-z=-4 \end{array}\right\}$$

Calculamos el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rang } (M) < 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rang } (M) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rang } (M') = 3$$

Como rang (M) = 2 y rang (M′) = 3, la recta y el plano son paralelos.

La distancia del plano a la recta coincide con la distancia del plano a un punto cualquiera de ella, por ejemplo al punto P, cuya primera coordenada es x = 0:

$$\left.\begin{array}{r} 0+y+3=0 \\ 2\cdot 0-z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} y=-3 \\ z=0 \end{array} \Rightarrow P=(0,-3,0)$$

Así:

$$d\ (r, \pi) = d\ (P, \pi) = \frac{|3\cdot 0 - 3 - 0 + 4|}{\sqrt{3^2+1^2+(-1)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}}{11}$$

a) Como π debe contener a r y ser paralelo a s, se cumple:

$$A = (-1, 0, 0) \in \pi$$

Además, $\vec{u} = (2, 3, -2)$ junto con $\vec{v} = (1, 3, 1)$ son vectores directores de π.

Así, la ecuación general de π es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 2 & 1 \\ y & 3 & 3 \\ z & -2 & 1 \end{vmatrix} = 9x - 4y + 3z + 9 = 0$$

Página 173

5.6. Distancia entre recta y plano

Observamos las posiciones relativas de una recta y un plano para deducir cómo calcular las distancias.

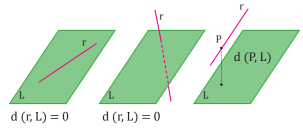


Fig. 19.

- Si la recta está incluida en el plano o si la recta y el plano son secantes, su distancia es cero, $d(r, L) = 0$
- Si la recta y el plano son paralelos, calculamos su distancia tomando un punto P cualquiera de la recta r y hallando su distancia al plano L.

$$d(r, L) = d(P, L) \text{ donde } P \in r$$

Ejemplo 14

Hallemos la distancia entre:

a. La recta $r: x - 2 = y = z + 1$ y el plano $L: x + y - 2z + 3 = 0$.

b. La recta $r: (x, y, z) = (2, 1, 0) + \lambda(1, 4, -3)$ y el plano $L: x + y + 2z - 1 = 0$.

Resolvemos:

a. Escribimos las ecuaciones implícitas de la recta r y consideramos la matriz M y la matriz ampliada M', asociadas al sistema formado por las ecuaciones de r y L, para hallar su posición relativa.

$$r: \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x - z - 3 = 0 \end{cases} \qquad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \qquad M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como M tiene dos filas no nulas y M' tiene tres, r y L son paralelos.
Para hallar la distancia de r a L, calculamos la distancia de un punto de la recta al plano L; consideramos, por ejemplo, $P = (2, 0, -1)$.

$$d|r, L'| = d(P, L) = \frac{|1\cdot 2 + 1\cdot 0 + (-2)\cdot(-1) + 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{7}{\sqrt{6}} = \frac{7\sqrt{6}}{6}$$

b. Consideramos el vector director de la recta, $\vec{v} = (1, 4, -3)$, y el vector normal del plano, $\vec{n} = (1, 1, 2)$, y efectuamos su producto escalar:

$$(1, 4, -3) \cdot (1, 1, 2 \geq -1 \neq 0$$

La recta y el plano no son paralelos y, por tanto, $d(r, L) = 0$.

Actividades

9. **Determina**, la distancia entre la recta r y el plano x.

$$r: \begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \qquad x: 3x + y - z + 4 = 0$$

10. Sean las rectas $r: \frac{x+1}{2} - \frac{y}{3} - \frac{z}{-2}$ y $s: x = \frac{y+1}{3} - z$

  a. **Halla** la ecuación general del plano x que contiene a r y es paraleo a s.
  b. **Determina** la distancia del plano x a la recta s.

Prohibida su reproducción

b) Por hipótesis, π es paralelo a s, luego la distancia entre π y s coincidirá con la distancia entre π y cualquier punto de s, por ejemplo P = (0, –1, 0):

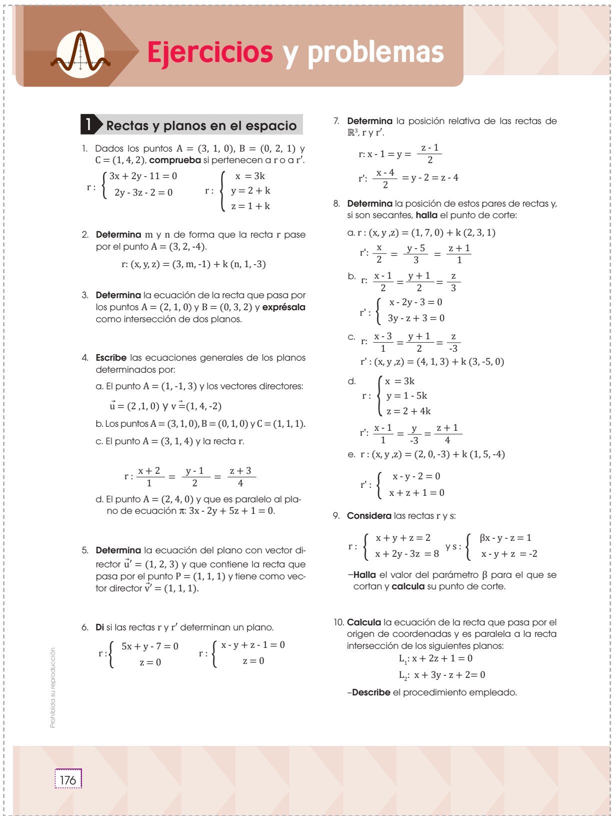
$$d\ (\pi, s) = d\ (\pi, P) =$$

$$= \frac{|9\cdot 0 - 4\cdot(-1) + 3\cdot 0 + 9|}{\sqrt{9^2 + (-4)^2 + 3^2}} =$$

$$= \frac{13}{\sqrt{106}} = \frac{13\sqrt{106}}{106}$$

Prohibida su reproducción

Página 176


Ejercicios y problemas

1 Rectas y planos en el espacio

1. Dados los puntos $A = (3, 1, 0)$, $B = (0, 2, 1)$ y $C = (1, 4, 2)$, **comprueba** si pertenecen a r o a r′.

$$r: \begin{cases} 3x + 2y - 11 = 0 \\ 2y - 3z - 2 = 0 \end{cases} \qquad r: \begin{cases} x = 3k \\ y = 2 + k \\ z = 1 + k \end{cases}$$

2. **Determina** m y n de forma que la recta r pase por el punto $A = (3, 2, -4)$.

$$r: (x, y, z) = (3, m, -1) + k\,(n, 1, -3)$$

3. **Determina** la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A = (2, 1, 0)$ y $B = (0, 3, 2)$ y **exprésala** como intersección de dos planos.

4. **Escribe** las ecuaciones generales de los planos determinados por:

a. El punto $A = (1, -1, 3)$ y los vectores directores: $\vec{u} = (2, 1, 0)$ y $\vec{v} = (1, 4, -2)$

b. Los puntos $A = (3, 1, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ y $C = (1, 1, 1)$.

c. El punto $A = (3, 1, 4)$ y la recta r.

$$r: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{4}$$

d. El punto $A = (2, 4, 0)$ y que es paralelo al plano de ecuación π: $3x - 2y + 5z + 1 = 0$.

5. **Determina** la ecuación del plano con vector director $\vec{u}' = (1, 2, 3)$ y que contiene la recta que pasa por el punto $P = (1, 1, 1)$ y tiene como vector director $\vec{v}' = (1, 1, 1)$.

6. **Di** si las rectas r y r′ determinan un plano.

$$r: \begin{cases} 5x + y - 7 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad r: \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

7. **Determina** la posición relativa de las rectas de $\mathbb{R}^3$, r y r′.

$$r: x - 1 = y = \frac{z-1}{2}$$

$$r': \frac{x-4}{2} = y - 2 = z - 4$$

8. **Determina** la posición de estos pares de rectas y, si son secantes, **halla** el punto de corte:

a. $r: (x, y, z) = (1, 7, 0) + k\,(2, 3, 1)$

$$r': \frac{x}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+1}{1}$$

b. $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$

$$r': \begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ 3y - z + 3 = 0 \end{cases}$$

c. $r: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$

$r': (x, y, z) = (4, 1, 3) + k\,(3, -5, 0)$

d. $r: \begin{cases} x = 3k \\ y = 1 - 5k \\ z = 2 + 4k \end{cases}$

$$r': \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z+1}{4}$$

e. $r: (x, y, z) = (2, 0, -3) + k\,(1, 5, -4)$

$$r': \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$$

9. **Considera** las rectas r y s:

$$r: \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y - 3z = 8 \end{cases} \text{ y } s: \begin{cases} \beta x - y - z = 1 \\ x - y + z = -2 \end{cases}$$

–**Halla** el valor del parámetro β para el que se cortan y **calcula** su punto de corte.

10. **Calcula** la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a la recta intersección de los siguientes planos:

$$L_1: x + 2z + 1 = 0$$

$$L_2: x + 3y - z + 2 = 0$$

–**Describe** el procedimiento empleado.

Prohibida su reproducción

176

Solucionario

Dados los puntos $A = (3, 1, 0)$, $B = (0, 2, 1)$ y $C = (1, 4, 2)$, comprueba si pertenecen a r o a r'.

$$r: \begin{cases} 3x + 2y - 11 = 0 \\ 2y - 3z - 2 = 0 \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x = 3k \\ y = 2 + k \\ z = 1 + k \end{cases}$$

Determina m y n de forma que la recta r pase por el punto $A = (3, 2, -4)$.

$$r: \ (x, y, z) = (3, m, -1) + k\,(n, 1, -3)$$

Sol.: $m = 1$; $n = 0$

Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A = (2, 1, 0)$ y $B = (0, 3, 2)$ y exprésala como intersección de dos planos.

Sol.: $r: \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}$

Escribe las ecuaciones generales de los planos determinados por:

a) El punto $A = (1, -1, 3)$ y los vectores directores: $\vec{u} = (2, 1, 0)$ y $\vec{v} = (1, 4, -2)$.

b) Los puntos $A = (3, 1, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ y $C = (1, 1, 1)$.

c) El punto $A = (3, 1, 4)$ y la recta r.

$$r: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{4}$$

d) El punto $A = (2, 4, 0)$ y que es paralelo al plano de ecuación π: $3x - 2y + 5z + 1 = 0$.

Sol.: *a)* $2x - 4y - 7z + 15 = 0$; *b)* $y - 1 = 0$; *c)* $14x + 13y - 10z - 15 = 0$; *d)* $3x - 2y + 5z + 2 = 0$

Determina si los puntos $A = (3, 1, 2)$, $B = (0, 1, 2)$, $C = (4, 4, 1)$ y $D = (1, 1, 1)$ son coplanarios.

Determina la ecuación del plano con vector director $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y que contiene la recta que pasa por el punto $P = (1, 1, 1)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (1, 1, 1)$.

Sol.: π: $(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda\,(1, 2, 3) + \mu\,(1, 1, 1)$

Di si las rectas r y r′ determinan un plano.

$$r: \begin{cases} 5x + y - 7 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad r: \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Prohibida su reproducción

Solucionario

Determina la posición de estos pares de rectas y, si son secantes, halla el punto de corte:

a) $r: (x, y, z) = (1, 7, 0) + k\,(2, 3, 1)$

$$r': \frac{x}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+1}{1}$$

b) $$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{3}$$

$$r': \begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ 3y - z + 3 = 0 \end{cases}$$

c) $$r: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$$

$$r': (x, y, z) = (4, 1, 3) + k\,(3, -5, 0)$$

d) $$r: \begin{cases} x = 3k \\ y = 1 - 5k \\ z = 2 + 4k \end{cases}$$

$$r': \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z+1}{4}$$

e) $r: (x, y, z) = (2, 0, -3) + k\,(1, 5, -4)$

$$r': \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$$

Sol.: *e)* $P = (2, 0, -3)$

Considera las rectas *r* y *s:*

$$r: \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y - 3z = 8 \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} \beta x - y - z = 1 \\ x - y + z = -2 \end{cases}$$

Halla el valor del parámetro β para el que se cortan y calcula su punto de corte.

Sol.: $\beta = 2$; $P = (1, 2, -1)$

Calcula la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a la recta intersección de los siguientes planos:

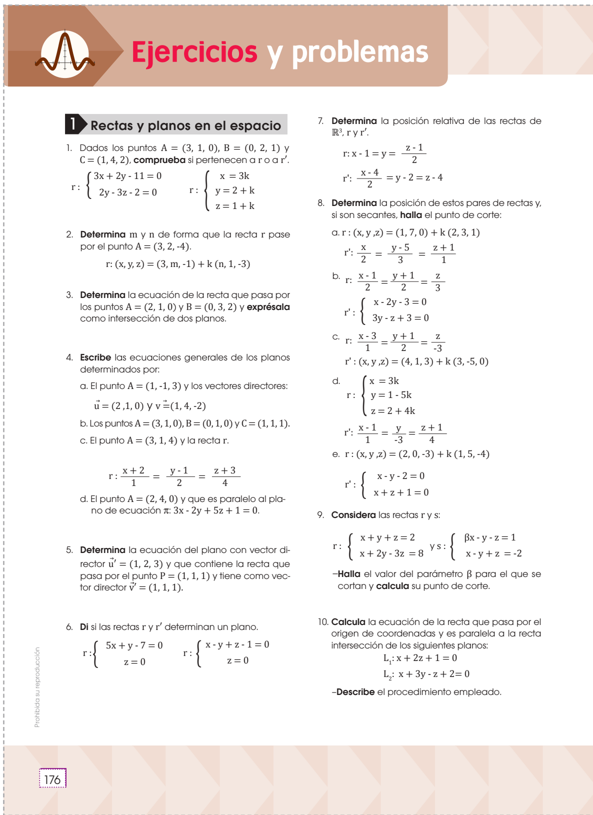
$$\pi_1: x + 2z + 1 = 0$$

$$\pi_2: x + 3y - z + 2 = 0$$

— Describe el procedimiento empleado.

Sol.: *r:* $(x, y, z) = (0, 0, 0) + k\,(-2, 1, 1)$

Página 176



Ejercicios y problemas

1 Rectas y planos en el espacio

1. Dados los puntos $A = (3, 1, 0)$, $B = (0, 2, 1)$ y $C = (1, 4, 2)$, **comprueba** si pertenecen a r o a r'.

$$r: \begin{cases} 3x + 2y - 11 = 0 \\ 2y - 3z - 2 = 0 \end{cases} \qquad r: \begin{cases} x = 3k \\ y = 2 + k \\ z = 1 + k \end{cases}$$

2. **Determina** m y n de forma que la recta r pase por el punto $A = (3, 2, -4)$.

$$r: (x, y, z) = (3, m, -1) + k\,(n, 1, -3)$$

3. **Determina** la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A = (2, 1, 0)$ y $B = (0, 3, 2)$ y **exprésala** como intersección de dos planos.

4. **Escribe** las ecuaciones generales de los planos determinados por:

a. El punto $A = (1, -1, 3)$ y los vectores directores: $\vec{u} = (2, 1, 0)$ y $\vec{v} = (1, 4, -2)$

b. Los puntos $A = (3, 1, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ y $C = (1, 1, 1)$.

c. El punto $A = (3, 1, 4)$ y la recta r.

$$r: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{4}$$

d. El punto $A = (2, 4, 0)$ y que es paralelo al plano de ecuación $\pi: 3x - 2y + 5z + 1 = 0$.

5. **Determina** la ecuación del plano con vector director $\vec{u}' = (1, 2, 3)$ y que contiene la recta que pasa por el punto $P = (1, 1, 1)$ y tiene como vector director $\vec{v}' = (1, 1, 1)$.

6. **Di** si las rectas r y r' determinan un plano.

$$r: \begin{cases} 5x + y - 7 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad r: \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

7. **Determina** la posición relativa de las rectas de $\mathbb{R}^3$, r y r'.

$$r: x - 1 = y = \frac{z-1}{2}$$

$$r': \frac{x-4}{2} = y - 2 = z - 4$$

8. **Determina** la posición de estos pares de rectas y, si son secantes, **halla** el punto de corte:

a. $r: (x, y, z) = (1, 7, 0) + k\,(2, 3, 1)$

$$r': \frac{x}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+1}{1}$$

b. $$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$$

$$r': \begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ 3y - z + 3 = 0 \end{cases}$$

c. $$r: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$$

$$r': (x, y, z) = (4, 1, 3) + k\,(3, -5, 0)$$

d. $$r: \begin{cases} x = 3k \\ y = 1 - 5k \\ z = 2 + 4k \end{cases}$$

$$r': \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z+1}{4}$$

e. $r: (x, y, z) = (2, 0, -3) + k\,(1, 5, -4)$

$$r': \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$$

9. **Considera** las rectas r y s:

$$r: \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y - 3z = 8 \end{cases} \text{ y } s: \begin{cases} \beta x - y - z = 1 \\ x - y + z = -2 \end{cases}$$

–**Halla** el valor del parámetro β para el que se cortan y **calcula** su punto de corte.

10. **Calcula** la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a la recta intersección de los siguientes planos:

$$L_1: x + 2z + 1 = 0$$

$$L_2: x + 3y - z + 2 = 0$$

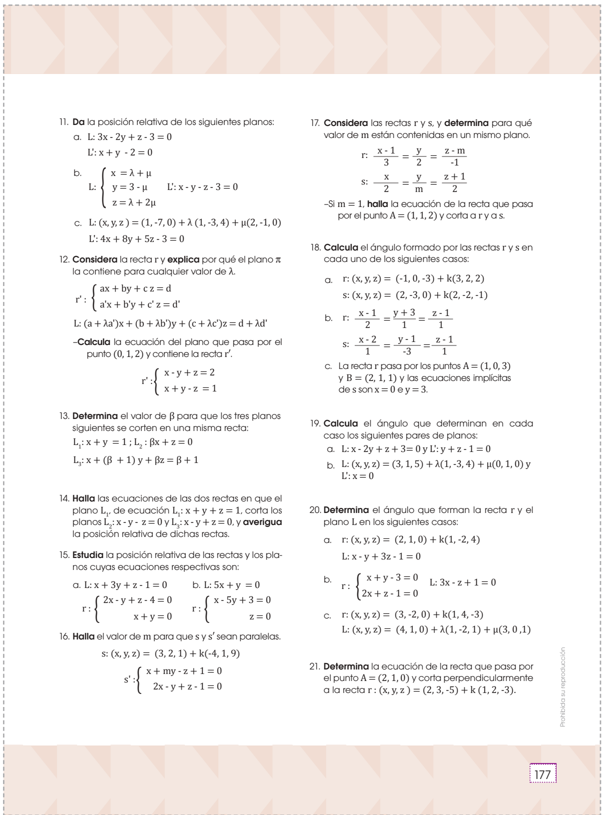
–**Describe** el procedimiento empleado.

Prohibida su reproducción

176

Prohibida su reproducción

Página 177



11. **Da** la posición relativa de los siguientes planos:

a. L: $3x - 2y + z - 3 = 0$

L': $x + y - 2 = 0$

b. L: $\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = 3 - \mu \\ z = \lambda + 2\mu \end{cases}$ L': $x - y - z - 3 = 0$

c. L: $(x, y, z) = (1, -7, 0) + \lambda(1, -3, 4) + \mu(2, -1, 0)$

L': $4x + 8y + 5z - 3 = 0$

12. **Considera** la recta r y **explica** por qué el plano π la contiene para cualquier valor de λ.

$$r': \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

L: $(a + \lambda a')x + (b + \lambda b')y + (c + \lambda c')z = d + \lambda d'$

–**Calcula** la ecuación del plano que pasa por el punto $(0, 1, 2)$ y contiene la recta r'.

$$r': \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

13. **Determina** el valor de β para que los tres planos siguientes se corten en una misma recta:

$L_1: x + y = 1$; $L_2: \beta x + z = 0$

$L_3: x + (\beta + 1)y + \beta z = \beta + 1$

14. **Halla** las ecuaciones de las dos rectas en que el plano L_1, de ecuación $L_1: x + y + z = 1$, corta los planos $L_2: x - y - z = 0$ y $L_3: x - y + z = 0$, y **averigua** la posición relativa de dichas rectas.

15. **Estudia** la posición relativa de las rectas y los planos cuyas ecuaciones respectivas son:

a. L: $x + 3y + z - 1 = 0$ b. L: $5x + y = 0$

$r: \begin{cases} 2x - y + z - 4 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ $r: \begin{cases} x - 5y + 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

16. **Halla** el valor de m para que s y s′ sean paralelas.

$$s: (x, y, z) = (3, 2, 1) + k(-4, 1, 9)$$

$$s': \begin{cases} x + my - z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

17. **Considera** las rectas r y s, y **determina** para qué valor de m están contenidas en un mismo plano.

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-m}{-1}$$

$$s: \frac{x}{2} = \frac{y}{m} = \frac{z+1}{2}$$

–Si $m = 1$, **halla** la ecuación de la recta que pasa por el punto $A = (1, 1, 2)$ y corta a r y a s.

18. **Calcula** el ángulo formado por las rectas r y s en cada uno de los siguientes casos:

a. r: $(x, y, z) = (-1, 0, -3) + k(3, 2, 2)$

s: $(x, y, z) = (2, -3, 0) + k(2, -2, -1)$

b. r: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{1}$

s: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{1}$

c. La recta r pasa por los puntos $A = (1, 0, 3)$ y $B = (2, 1, 1)$ y las ecuaciones implícitas de s son $x = 0$ e $y = 3$.

19. **Calcula** el ángulo que determinan en cada caso los siguientes pares de planos:

a. L: $x - 2y + z + 3 = 0$ y L': $y + z - 1 = 0$

b. L: $(x, y, z) = (3, 1, 5) + \lambda(1, -3, 4) + \mu(0, 1, 0)$ y L': $x = 0$

20. **Determina** el ángulo que forman la recta r y el plano L en los siguientes casos:

a. r: $(x, y, z) = (2, 1, 0) + k(1, -2, 4)$

L: $x - y + 3z - 1 = 0$

b. $r: \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 2x + z - 1 = 0 \end{cases}$ L: $3x - z + 1 = 0$

c. r: $(x, y, z) = (3, -2, 0) + k(1, 4, -3)$

L: $(x, y, z) = (4, 1, 0) + \lambda(1, -2, 1) + \mu(3, 0, 1)$

21. **Determina** la ecuación de la recta que pasa por el punto $A = (2, 1, 0)$ y corta perpendicularmente a la recta $r: (x, y, z) = (2, 3, -5) + k(1, 2, -3)$.

Prohibida su reproducción

177

Solucionario

Da la posición relativa de los siguientes planos:

a) $\pi: 3x - 2y + z - 3 = 0$

$\pi': x + y - 2 = 0$

b) $\pi: \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = 3 - \mu \\ z = \lambda + 2\mu \end{cases}$ $\pi': x - y - z - 3 = 0$

c) $\pi: (x, y, z) = (1, -7, 0) + \lambda(1, -3, 4) + \mu(2, -1, 0)$

$\pi': 4x + 8y + 5z - 3 = 0$

a) Secantes; b) Paralelos; c) Paralelos

Considera la recta r y explica por qué el plano π la contiene para cualquier valor de λ.

$$r: \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

$$\pi: (a + \lambda a')x + (b + \lambda b')y + (c + \lambda c')z = d + \lambda d'$$

— Calcula la ecuación del plano que pasa por el punto (0, 1, 2) y contiene la recta r'.

$$r': \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

Sol.: $x - 3y + 3z - 3 = 0$

Determina el valor de β para que los tres planos siguientes se corten en una misma recta:

$\pi_1: x + y = 1$; $\pi_2: \beta x + z = 0$

$\pi_3: x + (\beta + 1)y + \beta z = \beta + 1$

Sol.: $\beta = 0$ o $\beta = -1$

Halla las ecuaciones de las dos rectas en que el plano π_1, de ecuación $\pi_1: x + y + z = 1$, corta los planos $\pi_2: x - y - z = 0$ y $\pi_3: x - y + z = 0$, y averigua la posición relativa de dichas rectas.

Demostrar

15. **Estudia** la posición relativa de las rectas y los planos cuyas ecuaciones respectivas son:

a. L: $x + 3y + z - 1 = 0$ b. L: $5x + y = 0$

$r: \begin{cases} 2x - y + z - 4 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ $r: \begin{cases} x - 5y + 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Prohibida su reproducción

Solucionario

Halla el valor de m para que s y s' sean paralelas.

$$s: (x, y, z) = (3, 2, 1) + k\,(-4, 1, 9)$$

$$s': \begin{cases} x + my - z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Sol.: $m = 13$

Estudia las posiciones relativas del plano π y de la recta r según los valores del parámetro m.

$$\pi: mx - 3y + 2z = 1 \qquad r: \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x - y + mz = 1 \end{cases}$$

Sol.: $m = 1$, r contenida en π; $m = -10$, r y π paralelos; $m \in \mathbb{R} - \{1, -10\}$, secantes

Considera las rectas r y s, y determina para qué valor de m están contenidas en un mismo plano.

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-m}{-1}$$

$$s: \frac{x}{2} = \frac{y}{m} = \frac{z+1}{2}$$

— Si $m = 1$, halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A = (1, 1, 2)$ y corta a r y a s.

Sol.: $m = 0$; $r': \begin{cases} x - y + z - 2 = 0 \\ x - 4y + z + 1 = 0 \end{cases}$

46. Calcula el ángulo formado por las rectas r y s en cada uno de los siguientes casos:

a) $r: (x, y, z) = (-1, 0, -3) + k\,(3, 2, 2)$

$s: (x, y, z) = (2, -3, 0) + k\,(2, -2, -1)$

b) $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z-1}{1}$

$s: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z-1}{1}$

c) La recta r pasa por los puntos $A = (1, 0, 3)$ y $B = (2, 1, 1)$ y las ecuaciones implícitas de s son $x = 0$ e $y = 3$.

Sol.: *a)* $\alpha = 90°$; *b)* $\alpha = 90°$; *c)* $\alpha = 35{,}3°$

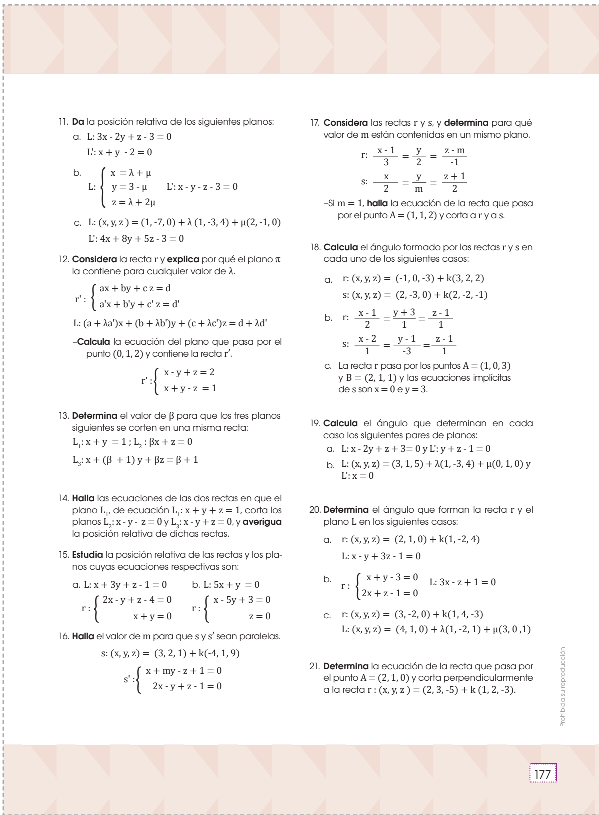
47. Calcula el ángulo que determinan en cada caso los siguientes pares de planos:

a) $\pi: x - 2y + z + 3 = 0$ y $\pi': y + z - 1 = 0$

b) $\pi: (x, y, z) = (3, 1, 5) + \lambda\,(1, -3, 4) + \mu\,(0, 1, 0)$ y $\pi': x = 0$

Sol.: *a)* $\alpha = 73{,}2°$; *b)* $\alpha = 14{,}0°$

Página 177


11. **Da** la posición relativa de los siguientes planos:

a. $L: 3x - 2y + z - 3 = 0$
$L': x + y - 2 = 0$

b. $L: \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = 3 - \mu \\ z = \lambda + 2\mu \end{cases} \quad L': x - y - z - 3 = 0$

c. $L: (x, y, z) = (1, -7, 0) + \lambda\,(1, -3, 4) + \mu(2, -1, 0)$
$L': 4x + 8y + 5z - 3 = 0$

12. **Considera** la recta r y **explica** por qué el plano π la contiene para cualquier valor de λ.

$$r': \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

$L: (a + \lambda a')x + (b + \lambda b')y + (c + \lambda c')z = d + \lambda d'$

–**Calcula** la ecuación del plano que pasa por el punto $(0, 1, 2)$ y contiene la recta r'.

$$r': \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

13. **Determina** el valor de β para que los tres planos siguientes se corten en una misma recta:

$L_1: x + y = 1$; $L_2: \beta x + z = 0$
$L_3: x + (\beta + 1)y + \beta z = \beta + 1$

14. **Halla** las ecuaciones de las dos rectas en que el plano L_1, de ecuación $L_1: x + y + z = 1$, corta los planos $L_2: x - y - z = 0$ y $L_3: x - y + z = 0$, y **averigua** la posición relativa de dichas rectas.

15. **Estudia** la posición relativa de las rectas y los planos cuyas ecuaciones respectivas son:

a. $L: x + 3y + z - 1 = 0$, $r: \begin{cases} 2x - y + z - 4 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

b. $L: 5x + y = 0$, $r: \begin{cases} x - 5y + 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

16. **Halla** el valor de m para que s y s′ sean paralelas.

$$s: (x, y, z) = (3, 2, 1) + k(-4, 1, 9)$$

$$s': \begin{cases} x + my - z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

17. **Considera** las rectas r y s, y **determina** para qué valor de m están contenidas en un mismo plano.

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-m}{-1}$$

$$s: \frac{x}{2} = \frac{y}{m} = \frac{z+1}{2}$$

–Si $m = 1$, **halla** la ecuación de la recta que pasa por el punto $A = (1, 1, 2)$ y corta a r y a s.

18. **Calcula** el ángulo formado por las rectas r y s en cada uno de los siguientes casos:

a. $r: (x, y, z) = (-1, 0, -3) + k(3, 2, 2)$
$s: (x, y, z) = (2, -3, 0) + k(2, -2, -1)$

b. $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z-1}{1}$
$s: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z-1}{1}$

c. La recta r pasa por los puntos $A = (1, 0, 3)$ y $B = (2, 1, 1)$ y las ecuaciones implícitas de s son $x = 0$ e $y = 3$.

19. **Calcula** el ángulo que determinan en cada caso los siguientes pares de planos:

a. $L: x - 2y + z + 3 = 0$ y $L': y + z - 1 = 0$

b. $L: (x, y, z) = (3, 1, 5) + \lambda(1, -3, 4) + \mu(0, 1, 0)$ y $L': x = 0$

20. **Determina** el ángulo que forman la recta r y el plano L en los siguientes casos:

a. $r: (x, y, z) = (2, 1, 0) + k(1, -2, 4)$
$L: x - y + 3z - 1 = 0$

b. $r: \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 2x + z - 1 = 0 \end{cases} \quad L: 3x - z + 1 = 0$

c. $r: (x, y, z) = (3, -2, 0) + k(1, 4, -3)$
$L: (x, y, z) = (4, 1, 0) + \lambda(1, -2, 1) + \mu(3, 0, 1)$

21. **Determina** la ecuación de la recta que pasa por el punto $A = (2, 1, 0)$ y corta perpendicularmente a la recta $r: (x, y, z) = (2, 3, -5) + k\,(1, 2, -3)$.

Prohibida su reproducción

177

48. Determina el ángulo que forman la recta r y el plano π en los siguientes casos:

a) $r: (x, y, z) = (2, 1, 0) + k\,(1, -2, 4)$

$\pi: x - y + 3z - 1 = 0$

b) $r: \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 2x + z - 1 = 0 \end{cases} \qquad \pi: 3x - z + 1 = 0$

c) $r: (x, y, z) = (3, -2, 0) + k\,(1, 4, -3)$

$\pi: (x, y, z) = (4, 1, 0) + \lambda\,(1, -2, 1) + \mu\,(3, 0, 1)$

Sol.: *a)* $\alpha = 80{,}7°$; *b)* $\alpha = 40{,}2°$; *c)* $\alpha = 20{,}8°$

49. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $A = (2, 1, 0)$ y corta perpendicularmente a la recta $r: (x, y, z) = (2, 3, -5) + k\,(1, 2, -3)$.

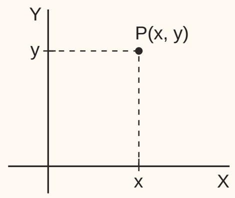
Sol.: $r': (x, y, z) = (2, 1, 0) + k\,(19, 10, 13)$

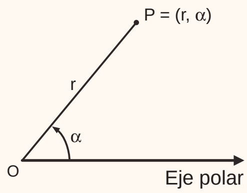
Prohibida su reproducción

AMPLIACIÓN DE CONTENIDOS

Las siguientes ilustraciones te serán de gran utilidad, a la hora de realizar los ejercios propuestos en esta unidad, podrás visualizar las diferencias que hay entre las posiones relativas de las rectas y los diferentes tipos de figuras conicas que hemos tratado en este bloque.

Sistemas de coordenadas

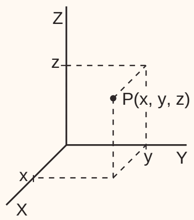




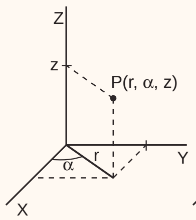
Cambios de coordenadas cartesianas-polares:

$$x = r\cos\alpha \; ; \; y = r\,\text{sen}\,\alpha$$

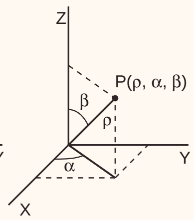
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \; \alpha = \text{arc tg}\,\frac{y}{x}$$



Cartesianas



Cilíndricas



Esféricas

Cambios de coordenadas cartesianas-cilíndricas:

$$x = r\cos\alpha \; ; \; y = r\,\text{sen}\,\alpha \; ; \; z = z$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \; \alpha = \text{arc tg}\,\frac{y}{x} \; ; \; z = z$$

Cambios de coordenadas cartesianas-esféricas:

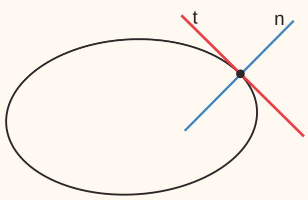
$$x = \rho\,\text{sen}\,\beta\cos\alpha \quad ; \quad y = \rho\,\text{sen}\,\beta\,\text{sen}\,\alpha \quad ; \quad z = \rho\cos\beta$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \; \alpha = \text{arc tg}\,\frac{y}{x} \; ; \; \beta = \text{arc tg}\,\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

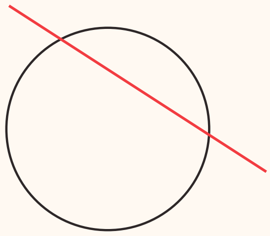
Posición relativa de una recta y una cónica

Una recta es tangente a una cónica si la corta en un punto.

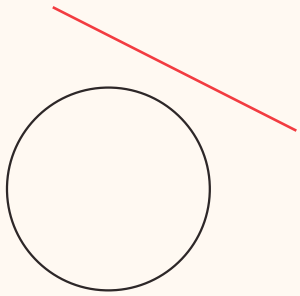
La recta normal a una cónica en un punto es la recta perpendicular a la recta tangente en ese punto.



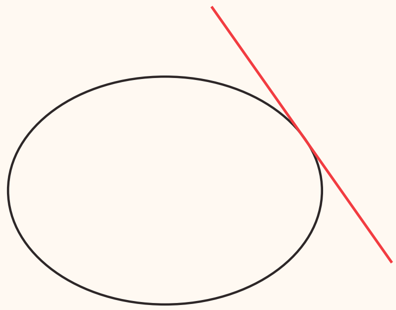
- Si el sistema formado por la ecuación de la cónica y la ecuación de la recta tiene dos soluciones, la recta es secante a la cónica.



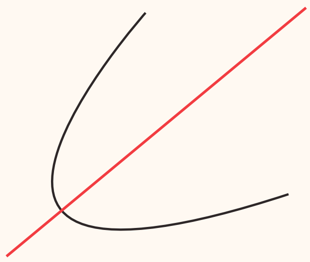
- Si el sistema tiene solución doble, la recta es tangente a la cónica.



- Si el sistema no tiene solución, la recta es exterior a la cónica.



- Si el sistema tiene una única solución, la recta corta a la cónica pero no es tangente.



Funciones

Límites:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \; \exists\,\delta > 0 \mid 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Límites finitos y operaciones

— El límite, si existe, es único.

Prohibida su reproducción

Las leyes de Kepler describen la cinemática del movimiento de los planetas en torno al Sol.

Primera ley

Los planetas describen órbitas elípticas estando el Sol en uno de sus focos

Una elipse es una figura geométrica que tiene las siguientes características:

Semieje mayor a=(r2+r1)/2

Semieje menor b

Semidistancia focal c=(r2-r1)/2

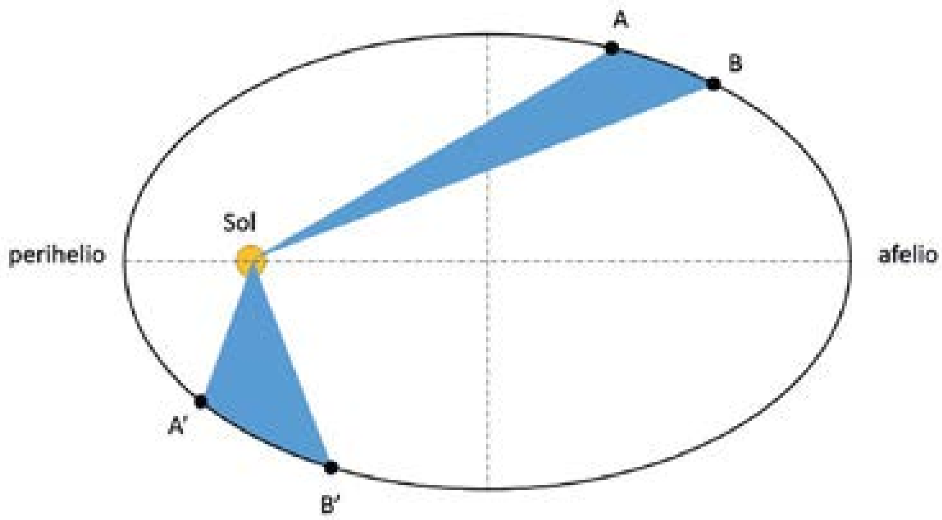
La relación entre los semiejes es a2=b2+c2

La excentricidad se define como el cociente e=c/a=(r2-r1)/(r2+r1)

Segunda ley

El vector posición de cualquier planeta respecto del Sol, barre áreas iguales de la elipse en tiempos iguales.

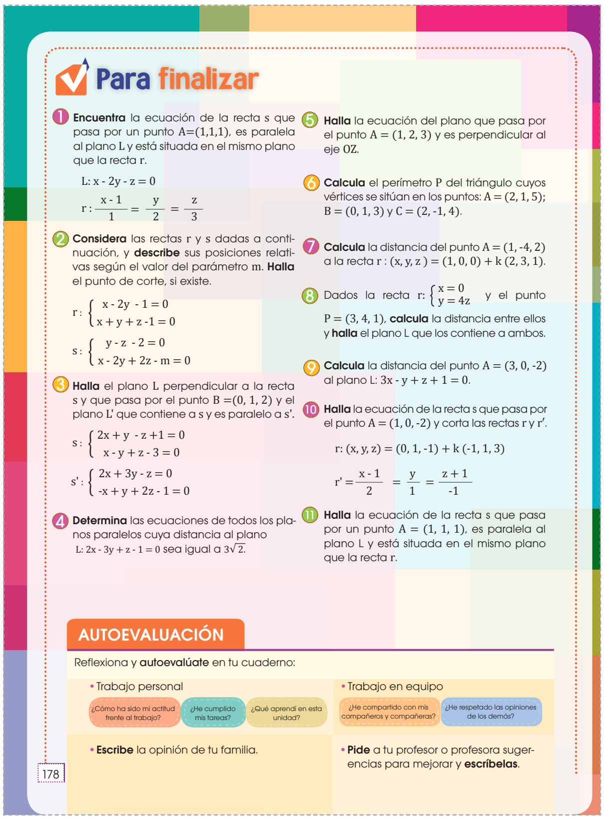
La ley de las áreas es equivalente a la constancia del momento angular, es decir, cuando el planeta está más alejado del Sol (afelio) su velocidad es menor que cuando está más cercano al Sol (perihelio). En el afelio y en el perihelio, el momento angular L es el producto de la masa del planeta, por su velocidad y por su distancia al centro del Sol.
http://goo.gl/gWRgS0



http://goo.gl/mPXVay

Prohibida su reproducción

Página 178



Para finalizar

1. **Encuentra** la ecuación de la recta s que pasa por un punto $A=(1,1,1)$, es paralela al plano L y está situada en el mismo plano que la recta r.

$$L: x - 2y - z = 0$$

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

2. **Considera** las rectas r y s dadas a continuación, y **describe** sus posiciones relativas según el valor del parámetro m. **Halla** el punto de corte, si existe.

$$r: \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} y - z - 2 = 0 \\ x - 2y + 2z - m = 0 \end{cases}$$

3. **Halla** el plano L perpendicular a la recta s y que pasa por el punto $B = (0, 1, 2)$ y el plano L' que contiene a s y es paralelo a s'.

$$s: \begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0 \\ x - y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

$$s': \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ -x + y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

4. **Determina** las ecuaciones de todos los planos paralelos cuya distancia al plano $L: 2x - 3y + z - 1 = 0$ sea igual a $3\sqrt{2}$.

5. **Halla** la ecuación del plano que pasa por el punto $A = (1, 2, 3)$ y es perpendicular al eje OZ.

6. **Calcula** el perímetro P del triángulo cuyos vértices se sitúan en los puntos: $A = (2, 1, 5)$; $B = (0, 1, 3)$ y $C = (2, -1, 4)$.

7. **Calcula** la distancia del punto $A = (1, -4, 2)$ a la recta $r: (x, y, z) = (1, 0, 0) + k(2, 3, 1)$.

8. Dados la recta $r: \begin{cases} x = 0 \\ y = 4z \end{cases}$ y el punto $P = (3, 4, 1)$, **calcula** la distancia entre ellos y **halla** el plano L que los contiene a ambos.

9. **Calcula** la distancia del punto $A = (3, 0, -2)$ al plano $L: 3x - y + z + 1 = 0$.

10. **Halla** la ecuación de la recta s que pasa por el punto $A = (1, 0, -2)$ y corta las rectas r y r'.

$$r: (x, y, z) = (0, 1, -1) + k(-1, 1, 3)$$

$$r' = \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

11. **Halla** la ecuación de la recta s que pasa por un punto $A = (1, 1, 1)$, es paralela al plano L y está situada en el mismo plano que la recta r.

AUTOEVALUACIÓN

Reflexiona y **autoevalúate** en tu cuaderno:

- Trabajo personal
  - ¿Cómo ha sido mi actitud frente al trabajo?
  - ¿He cumplido mis tareas?
  - ¿Qué aprendí en esta unidad?
- Trabajo en equipo
  - ¿He compartido con mis compañeros y compañeras?
  - ¿He respetado las opiniones de los demás?
- **Escribe** la opinión de tu familia.
- **Pide** a tu profesor o profesora sugerencias para mejorar y **escríbelas**.

178

Solucionario

1. Encuentra la ecuación de la recta s que pasa por un punto A=(1,1,1), es paralela al plano L y está situada en el mismo plano que la recta r.

$L:x-2y-z=0$

$r:(x-1)/1=y/2=z/3$

$<x,y,z\geq <1,1,1>+k<1,0,1>$

2. Considera las rectas r y s, dadas a continuación, y describe sus posiciones relativas según el valor del parámetro m. Halla el punto de corte, si existe.

r:{(x-2z-1=0@x+y+z-1=0)

s: {(y-z-2=0@x-2y+2z-m=0)

Sin respuesta

3. Halla el plano L perpendicular a la recta s y que pasa por el punto B=(0,1,2) y el plano L' que contiene a s y es paralelo a s'.

s: {(2x+y-z+1=0@x-y+z-3=0) s': {(2x+3y-z=0@-x+y+2z-1=0)

$L:y+z-3=0;L':8x+7y-7z+11=0$

4. Determina las ecuaciones de todos los planos paralelos cuya distancia al plano L:2x-3y+z-1=0 sea igual a $3\sqrt{2}$

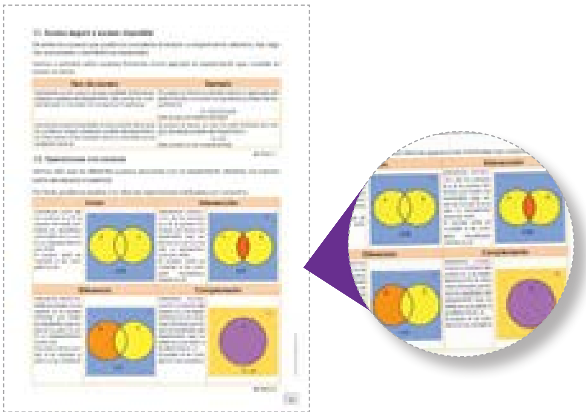
$L:2x-3y+z-1-6\sqrt{7}=0$, $L:2x-3y+z+1+6\sqrt{7}=0$

5. BUSCAR
6. BUSCAR
7. BUSCAR
8. BUSCAR

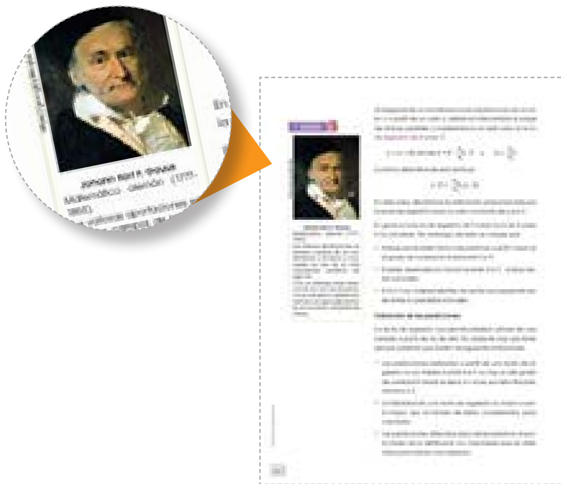
Prohibida su reproducción

Funciones y límites

6 Probabilidad

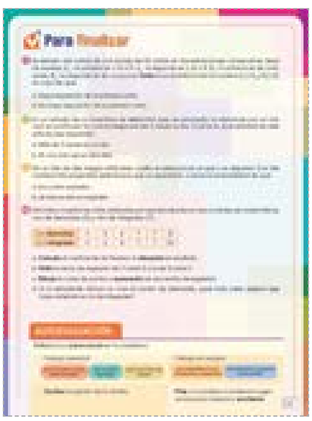


6 Resumen



Johann Karl F. Gauss

Problemas resueltos



Para finalizar

ZONA

Prohibida su reproducción

UNIDAD 6

Eje temático	Contenidos	
Probabilidad	1. Sucesos	1.1. Suceso seguro y suceso imposible. 1.2. Operaciones con sucesos 1.3. Sucesos compatibles y sucesos incompatibles 1.4. Sistema completo de sucesos
	2. Probabilidad	2.1. Definición experimental 2.2. Definición axiomática 2.3. Propiedades de la probabilidad
	3. Probabilidad condicionada	3.1. Concepto 3.2. Propiedades de la probabilidad condicionada 3.3. Sucesos dependientes y sucesos independientes 3.4. Teorema de la probabilidad total 3.5. Teorema de Bayes
	4. Variables aleatorias	4.1. Concepto 4.2. Tipos de variable aleatoria
	5. Distribución de probabilidad de una variable aleatoria	5.1. Concepto
	6. Distribución de probabilidad de una variable continúa	6.1. Función de densidad
	7. Parámetros descriptivos	7.1. Esperanza 7.2. Varianza
	8. Distribuciones discretas	8.1. Distribución de Bernoulli 8.2. Distribución binomial 8.3. Distribución de Poisson
	9. Variables aleatorias	9.1. Organización de datos 9.2. Análisis de datos 9.3. Interpretación gráfica de la relación entre variables 9.4. Coeficiente de Pearson 9.5. Regresión lineal

Prohibida su reproducción

Objetivo del área por subnivel

Prohibida su reproducción

O.M.5.1. Proponer soluciones creativas a situaciones concretas de la realidad nacional y mundial mediante la aplicación de las operaciones básicas de los diferentes conjuntos numéricos, y el uso de modelos funcionales, algoritmos apropiados, estrategias y métodos formales y no formales de razonamiento matemático, que lleven a juzgar con responsabilidad la validez de procedimientos y los resultados en un contexto.

Objetivo integrador del área por subnivel

OI.5.1. Analizar los diversos proyectos políticos, las propuestas de cambio democrático en una sociedad intercultural y sus efectos en diferentes ámbitos, a partir del reconocimiento de las características del origen, expansión y desarrollo, así como las limitaciones de la propia y otras culturas y su interrelación, y la importancia de sus aportes tecnológicos, económicos y científicos.

OI.5.12. Participar en procesos interdisciplinares de experimentación y creación colectiva, responsabilizándose del trabajo compartido, respetando y reconociendo los aportes de los demás durante el proceso y en la difusión de los resultados obtenidos.

Logo Institucional	Nombre de la institución				Año lectivo		
PLAN DE UNIDAD TEMÁTICA							
1. DATOS INFORMATIVOS:							
Docente:	Nombre del docente que ingresa la información	Área/asignatura:	MATEMÁTICA	Grado/Curso:	2° BACHILLERATO	Paralelo:	
N.º de unidad de planificación:	6	Título de unidad de planificación:	**ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD**	Objetivos específicos de la unidad de planificación:		Valorar sobre la base de un pensamiento crítico, creativo, reflexivo y lógico la vinculación de los conocimientos matemáticos con los de otras disciplinas científicas y los saberes ancestrales para plantear soluciones a problemas de la realidad y contribuir al desarrollo del entorno social, natural y cultural. Desarrollar la curiosidad y la creatividad en el uso de herramientas matemáticas al momento de enfrentar y solucionar problemas de la realidad nacional demostrando actitudes de orden, perseverancia y capacidades de investigación	
PERÍODOS	18				SEMANA DE INICIO:		
2. PLANIFICACIÓN							

DESTREZAS CON CRITERIOS DE DESEMPEÑO A SER DESARROLLADAS:	CRITERIOS DE EVALUACIÓN
• Realizar operaciones con sucesos: unión, intersección, diferencia y complemento, leyes de De Morgan en la resolución de problemas. • Aplicar los métodos de conteo: permutaciones, combinaciones para determinar la probabilidad de eventos simples y a partir de ellos la probabilidad de eventos compuestos en la resolución de problemas. • Identificar variables aleatorias de manera intuitiva y de manera formal como una función real y aplicando la función aditiva de conjuntos, determinar la función de probabilidad en la resolución de problemas. • Reconocer experimentos en los que se requiere utilizar la probabilidad condicionada mediante el análisis de la dependencia de los eventos involucrados y calcular la probabilidad de un evento sujeto a varias condiciones aplicando el teorema de Bayes • en la resolución de problemas. • Identificar variables aleatorias discretas en problemas de texto y reconocer la distribución de Poisson como ejemplo de variables aleatorias discretas y sus aplicaciones. • Reconocer un experimento de Bernoulli en diferentes contextos (control de calidad, análisis de datos, entre otros) y la distribución binomial en problemas de texto identificando los valores de p y q. • Calcular probabilidades binomiales con la fórmula (o con el apoyo de las TIC), la media, la varianza de distribuciones binomiales y graficar. • Analizar las formas de las gráficas de distribuciones binomiales en ejemplos de aplicación con el apoyo de las TIC, y juzgar en contexto la validez y pertinencia de los resultados obtenidos. • Determinar la recta de regresión lineal que pasa por el centro de gravedad de la distribución para predecir valores de la variable dependiente utilizando la recta de regresión lineal o calcular otra recta de regresión intercambiando las variables para predecir la otra variable. • Utilizar el método de mínimos cuadrados para determinar la recta de regresión en la resolución de problemas hipotéticos o reales con apoyo de las TIC. • Juzgar la validez de las soluciones obtenidas en el método de mínimos cuadrados al determinar la recta de regresión en la resolución de problemas hipotéticos o reales dentro del contexto del problema con el apoyo de las TIC.	CE.M.5.10. Emplea técnicas de conteo y teoría de probabilidades para calcular la posibilidad de que un determinado evento ocurra; identifica variables aleatorias; resuelve problemas con o sin TIC; contrasta los procesos, y discute sus resultados.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	RECURSOS	INDICADORES DE LOGRO	TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN
• Aplicar el principio de duplicación en teoría exponencial, como introducción al tema de funciones exponenciales. • Debatir en clase el fenómeno de duplicación de bacterias, para poner en contexto las relaciones númericas. • Diferenciar los conceptos de funcion exponencial y logarítmica • Reflexionar acerca de la importancia de estos modelos en el crecimiento poblacional del Ecuador y el mundo. • En caso de límites, reflexionar el caso de existencia de asíntotas y su interpretación gráfica. • Atravez de un gráfico de la relación crecimiento poblacional en función del tiempo	- Texto - Calculadora - Enlaces web - Pizarra	I.M.5.10.1. Identifica los experimentos y eventos de un problema y aplica las reglas de adición, complemento y producto de manera pertinente; se apoya en las técnicas de conteo y en la tecnología para el cálculo de probabilidades, y juzga la validez de sus hallazgos de acuerdo a un determinado contexto. (I.4.) I.M.5.10.2. Identifica variables aleatorias discretas y halla la media, varianza y desviación típica; reconoce un experimento de Bernoulli y la distribución binomial para emplearlos en la resolución de problemas cotidianos y el cálculo de probabilidades; realiza gráficos Con el apoyo de las TIC. (I.3.)	Comprobar la capacidad del estudiante para operar entre elementos de R, suma, producto de un escalar por un vector, producto escalar entre vectores; hallar la norma de un vector; determinar la ecuación vectorial de un plano; determinar la ecuación de la recta formada por la intersección entre dos planos, y determinar si dos planos son paralelos o perpendiculares.

ELEMENTOS DEL PERFIL DE SALIDA
I.3. Sabemos comunicarnos de manera clara en nuestra lengua y en otras, utilizamos varios lenguajes como el numérico, el digital, el artístico y el corporal; asumimos con Responsabilidad nuestros discursos. I.4. Actuamos de manera organizada, con autonomía e independencia; aplicamos el razonamiento lógico, crítico y complejo; y practicamos la humildad intelectual en un aprendizaje a lo largo de la vida.

ELABORADO	REVISADO	APROBADO
Docente:	Director del área :	Vicerrector:
Firma:	Firma:	Firma:
Fecha:	Fecha:	Fecha:

Prohibida su reproducción

Objetivos generales del área que se evalúan

- Valorar sobre la base de un pensamiento crítico, creativo, reflexivo y lógico la vinculación de los conocimientos matemáticos con los de otras disciplinas científicas y los saberes ancestrales para plantear soluciones a problemas de la realidad y contribuir al desarrollo del entorno social, natural y cultural.
- Desarrollar la curiosidad y la creatividad en el uso de herramientas matemáticas al momento de enfrentar y solucionar problemas de la realidad nacional demostrando actitudes de orden, perseverancia y capacidades de investigación.

Objetivos del área por subnivel

- O.M.5.6. Desarrollar la curiosidad y la creatividad a través del uso de herramientas matemáticas al momento de enfrentar y solucionar problemas de la realidad nacional, demostrando actitudes de orden, perseverancia y capacidades de investigación.

Objetivos integradores de subnivel

OI.5.6. Aplicar perspectivas multidisciplinares a la resolución colaborativa de situaciones problemáticas, partiendo del análisis de procesos sociales, naturales, económicos y artísticos, por medio del uso técnico y responsable de diversas fuentes, la fundamentación científica, la experimentación y la tecnología.

OI.2.7. Comunicarse en forma efectiva a través del lenguaje artístico, corporal, oral y escrito, con los códigos adecuados, manteniendo pautas básicas de comunicación y enriqueciendo sus producciones con recursos multimedia.

Criterio de evaluación

- CE.M.5.10. Emplea técnicas de conteo y teoría de probabilidades para calcular la posibilidad de que un determinado evento ocurra; identifica variables aleatorias; resuelve problemas con o sin TIC; contrasta los procesos, y discute sus resultados.

Indicadores para la evaluación del criterio

I.M.5.10.1. Identifica los experimentos y eventos de un problema y aplica las reglas de adición, complemento y producto de manera pertinente; se apoya en las técnicas de conteo y en la tecnología para el cálculo de probabilidades, y juzga la validez de sus hallazgos de acuerdo a un determinado contexto. (I.4.)

I.M.5.10.2. Identifica variables aleatorias discretas y halla la media, varianza y desviación típica; reconoce un experimento de Bernoulli y la distribución binomial para emplearlos en la resolución de problemas cotidianos y el cálculo de probabilidades; realiza gráficos Con el apoyo de las TIC. (I.3.)

Prohibida su reproducción

Orientaciones metodológicas para la evaluación del criterio

- Comprobar el desarrollo de las destrezas necesarias para la aplicación de la estadística descrptiva, medidas de tendencia central y de dispersión, para el análisis de datos agrupados y no agrupados. Además de calcular e interpretar el coeficiente de variación, determinar los cuantiles y deciles, y realizar sus representaciones gráficas.

Básicos imprescindibles | Básicos deseables

Eje temático	Destrezas con criterio de desempeño
ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD	• Resolver y plantear problemas de aplicación de las medidas de tendencia central y de dispersión para datos agrupados con apoyo de las TIC.
	• Juzgar la validez de las soluciones obtenidas en los problemas de aplicación de las medidas de tendencia central y de dispersión para datos agrupados dentro del contexto del problema, con apoyo de las TIC.
	• Calcular e interpretar el coeficiente de variación de un conjunto de datos (agrupados y no agrupados).
	• Reconocer los experimentos y eventos en un problema de texto y aplicar el concepto de probabilidad y los axiomas de probabilidad en la resolución de problemas.
	• Determinar la probabilidad empírica de un evento repitiendo el experimento aleatorio tantas veces como sea posible (50, 100,... veces) con apoyo de las TIC.
	• Realizar operaciones con sucesos: unión, intersección, diferencia y complemento, leyes de De Morgan en la resolución de problemas.
	• Aplicar los métodos de conteo: permutaciones, combinaciones para determinar la probabilidad de eventos simples y a partir de ellos la probabilidad de eventos compuestos en la resolución de problemas.
	• Reconocer experimentos en los que se requiere utilizar la probabilidad condicionada mediante el análisis de la dependencia de los eventos involucrados y calcular la probabilidad de un evento sujeto a varias condiciones aplicando el teorema de Bayes en la resolución de problemas.
	• Reconocer variables aleatorias discretas cuyo recorrido es un conjunto discreto en ejemplos numéricos y experimentos y la distribución de probabilidad para una variable aleatoria discreta como una función real a partir del cálculo de probabilidades acumuladas definidas bajo ciertas condiciones dadas.
	• Calcular e interpretar la media, la varianza y la desviación estándar de una variable aleatoria discreta.
	• Juzgar la validez de las soluciones obtenidas en los problemas que involucren el trabajo con probabilidades y variables aleatorias discretas dentro del contexto del problema.

Prohibida su reproducción

DETERMINACIÓN DEL AZAR

El nacimiento de la probabilidad se atribuye frecuentemente a B. Pascal (1623-1662) y a P. de Fermat (1601-1665) y, concretamente, a la correspondencia que mantuvieron sobre juegos de azar a instancias del caballero de Méré.

Sin embargo, existen escritos de épocas anteriores que ya presentan ideas fundamentales sobre probabilidad. Entre otras obras destacan: Liber de ludo alea de G. Cardano (1501-

1576), Sulla scoperta dei dadi de G. Galilei (1564-1642) y Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita de L. Pacioli (1445-1514), donde enuncia el problema del reparto.Pascal señaló en 1654 la existencia de una materia inexplorada: la repartición del azar en los juegos. Los problemas que aborda, sin embargo, superan esta cuestión e introducen los principios de la teoría de probabilidad.

Además, se convierten en fuente de reflexiones jurídicas sobre problemas de reparto. Ch. Huygens (1629-1695) elaboró entre 1650 y 1660 De ratiociniis in ludo aleae, donde aparece el principio de la esperanza matemática y se introduce el muestreo con y sin reemplazamiento.

En la misma línea de trabajo apareció en 1713 el Arts conjectandi, de Jacques Bernoulli (1654-1705), quien elaboró la ley de los grandes números. Daniel Bernoulli (1700-1782), sobrino del anterior, desarrolló la primera teoría probabilística de los errores de observación en astronomía.del reparto.

Pascal señaló en 1654 la existencia de una materia inexplorada: la repartición del azar en los juegos. Los problemas que aborda, sin embargo, superan esta cuestión e introducen los principios de la teoría de probabilidad.

Además, se convierten en fuente de reflexiones jurídicas sobre problemas de reparto.

Ch. Huygens (1629-1695) elaboró entre 1650 y 1660 De ratiociniis in ludo aleae, donde aparece el principio de la esperanza matemática y se introduce el muestreo con y sin reemplazamiento.

En la misma línea de trabajo apareció en 1713 el Arts conjectandi, de Jacques Bernoulli (1654-1705), quien elaboró la ley de los grandes números.

Daniel Bernoulli (1700-1782), sobrino del anterior, desarrolló la primera teoría probabilística de los errores de observación en astronomía.

Apenas cimentada la teoría de la probabilidad, comenzaron sus aplicaciones en la construcción de tablas de mortalidad, rentas vitalicias...

Esto originó, a finales del siglo XVII, la aparición de las primeras compañías de seguros.

Prohibida su reproducción

Muchas obras de arte han representado el mundo de los juegos de azar. En la imagen el grabado A game of whist, *de I. R. G. Cruickshank.*

DESARROLLO DE LA PROBABILIDAD

A. de Moivre (1667-1754) publicó las características de la distribución normal en su Doctrine of Chances. Moivre elaboró además el teorema

de la probabilidad compuesta, la aproximación de la distribución binomial por la normal y el primer teorema central del límite. T. Bayes (1702-1763) elaboró el teorema que lleva su nombre sobre probabilidad inversa. A finales del siglo XVIII y principios del XIX C. Gauss (1777-1855) y A. M. Legendre (1752-1833) realizaron grandes progresos en probabilidad, progresos que fueron recogidos y sistematizados por P. S. Laplace (1749-1827) en una obra de más de 800 páginas. Laplace introdujo novedades, como el método de los mínimos cuadrados y la segunda ley de los errores.

Hubo que esperar hasta 1933 para que A. N. Kolmogorov (1903-1988) desarrollara su teoría axiomática de la probabilidad, inspirada en la teoría de la medida.

De esta manera la probabilidad deja de tener una definición puramente experimental y entra a formar parte de la matemática formal.

CENSOS Y DATOS ESTADÍSTICOS

La aparición de la palabra estadística es reciente, aunque la recogida de datos, primera fase de cualquier estudio estadístico, se remonta a la más lejana antigüedad

Prohibida su reproducción

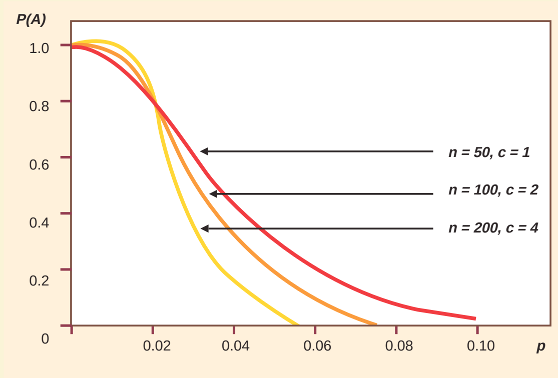
Planes de muestreo

Desde la Segunda Guerra Mundial, los planes de muestreo para aceptación se han convertido en procedimientos estándar para asegurar la calidad de los productos manufacturados. Con este propósito se ha desarrollado una gran variedad de sistemas de planes de muestreo para aceptación. Tres de los sistemas más empleados son MIL-STD-105D, MIL-STD-414 y el *Dodge-Romig Sampling Inspection Tables.*

Un plan básico de muestreo para aceptación consiste en seleccionar n artículos de un lote de tamaño N y aceptar el lote si el número de artículos defectuosos es menor o igual a un número de aceptación c, previamente estipulado.

Un factor muy importante en un plan de muestreo es la probabilidad de aceptar el lote $P(A)$ dada una proporción supuesta conocida de artículos defectuosos p.

Las gráficas que muestran dicha probabilidad en función de p reciben el nombre de *curvas características de operación,* CO.



La paradoja de San Petersburgo

La esperanza matemática de un juego de azar se calcula multiplicando el valor de cada premio por la probabilidad de éste y sumando todos estos productos. Los hermanos Bernoulli plantearon en el siglo XVIII un juego similar al siguiente: se lanza una moneda hasta que salga una cruz. Si sale en la primera tirada, el jugador A paga al B un euro; si sale en la segunda, dos euros; si sale en la tercera, cuatro euros; y así sucesivamente. ¿Cuál es la esperanza matemática del jugador B? O, lo que es lo mismo, ¿cuánto tiene que pagar de antemano el jugador B al A para que el juego resulte equitativo?

El premio que recibe el jugador B depende de la tirada n en que aparece la primera cruz, por lo que puede ser:

$$1, 2, 4, 8, \dots, 2^{n+1} \text{ euros}$$

Por otra parte, la probabilidad de que salga cruz en la tirada 1, 2, 3, ..., n es, respectivamente:

$$\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \dots, \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Por lo tanto, la esperanza matemática es:

$$1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + 2^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \dots = \infty$$

En resumen, el jugador B tendría que pagar al A infinitos euros, para que éste osase jugar a un juego tan peligroso para sus ahorros. De no hacerlo así, el jugador B siempre jugaría con ventaja, al menos en teoría.

Prohibida su reproducción

Estrategias de resolución de problemas

La resolución de problemas permite poner en práctica los conocimientos adquiridos en la materia de Matemáticas. Pero también es un fin en sí misma, al permitir afrontar y resolver múltiples situaciones tanto de otras materias (Física, Economía…) como de la realidad cotidiana.

Cada problema puede considerarse un reto y un medio eficaz para aprender a pensar. Las personas, dentro y fuera del ámbito escolar, utilizamos diversos procedimientos para resolver los problemas. Existe, sin embargo, un *método general de resolución de problemas* que puede servirte de pauta para resolver otros muchos. Sus fases son:

— *Comprensión del enunciado:* nos aproximamos al problema, identificamos todos sus términos, organizamos los datos que aparecen y dibujamos los que son susceptibles de representación.

— *Planificación de la resolución:* elaboramos conjeturas y seleccionamos la estrategia de resolución, así como las técnicas matemáticas que vamos a utilizar.

— *Ejecución del plan de resolución:* realizamos lo preparado en la fase anterior.

— *Revisión del resultado y del proceso seguido:* interpretamos las posibles soluciones, contextualizamos los resultados, reflexionamos sobre el proceso, revisamos y/o modificamos el plan si es necesario, y estudiamos otras posibles soluciones y planes alternativos.

Además de la pauta general, ten en cuenta los siguientes consejos que te ayudarán a comprender el enunciado:

- Léelo con atención para evitar saltarte información y observar posibles ambigüedades.
- Repasa los conceptos matemáticos que intervienen en el enunciado.
- Apunta los datos de que dispones. Puede ser útil disponerlos en forma de tabla o elaborar un dibujo y anotarlos en él.
- Analiza si existe información superflua. En caso afirmativo, elimínala.

A continuación, te presentamos algunas de las **estrategias de resolución de problemas** más comunes. En las páginas 316 a 320 de tu libro de 1.º de Bachillerato tienes un ejemplo resuelto de cada una de ellas.

1 RESOLUCIÓN GRÁFICA

Muchas veces, la construcción de un gráfico que refleje las condiciones y los datos del enunciado conduce directamente a la solución del problema.

2 ENSAYO-ERROR

Esta estrategia consiste en experimentar con posibles soluciones hasta dar con la correcta. Para ello, seguimos estos pasos:

— Escogemos una posible solución.

— Probamos si esta solución satisface las condiciones del problema.

— Modificamos la solución escogida en función del resultado obtenido y repetimos el proceso hasta obtener la solución correcta.

3 RAZONAMIENTO INVERSO

Esta estrategia se aplica en la resolución de problemas en los que conocemos el resultado final y queremos determinar un valor inicial o una serie de operaciones que nos conduzcan hasta él.

El método consiste en tomar el resultado como punto de partida e ir retrocediendo hasta llegar a la situación inicial.

4 ORGANIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN

En muchos problemas, la realización de un esquema o tabla sobre los que disponer las condiciones y los datos del enunciado puede abrirte el camino para abordar su resolución.

Prohibida su reproducción

5 DESCOMPOSICIÓN DEL PROBLEMA

En ocasiones, es difícil ver la relación existente entre los datos y las incógnitas del problema. En estos casos, una de las estrategias que ofrece más posibilidades de éxito es la descomposición del problema en problemas más sencillos. Para aplicarla, debes seguir estos pasos:

— Descomponer el problema inicial en subproblemas, sin perder de vista las relaciones existentes entre ellos.

— Resolver cada uno de los subproblemas.

— Resolver el problema inicial.

A veces, la solución del problema global coincidirá con la del último subproblema. Otras veces, será necesario combinar los resultados de los diferentes subproblemas para hallarla.

6 SIMPLIFICACIÓN Y BÚSQUEDA DE REGULARIDADES

En ocasiones, la simplificación de los datos o de las condiciones del problema proporciona un nuevo punto de vista para su resolución. Muchas veces, ese nuevo punto de vista surge de la existencia de regularidades que permanecían ocultas antes de proceder a la simplificación.

7 PARTICULARIZACIÓN DEL PROBLEMA

En casos complejos puede resultar de gran utilidad resolver primero el problema para situaciones particulares más sencillas.

8 EXPERIMENTACIÓN CON LA POSIBLE SOLUCIÓN

Este método, muy útil en geometría, consiste en suponer una posible solución del problema que se nos plantea y verificar que ésta satisface las condiciones del enunciado.

Si es así, ya hemos resuelto el problema. Si no es así, es posible que hayamos encontrado una pista que nos conduzca a la solución correcta.

9 BÚSQUEDA DE UN PROBLEMA SIMILAR RESUELTO

Esta estrategia consiste en la búsqueda de semejanzas entre el problema que se pretende resolver, o una parte de él, y otro resuelto con anterioridad.

Lógicamente, cuantos más problemas hayas resuelto anteriormente, más útil te será esta estrategia, puesto que aumenta la probabilidad de encontrar un problema similar.

10 MODIFICACIÓN DEL ENUNCIADO

A veces, puede modificarse el enunciado de un problema de manera que obtengamos otro equivalente cuya resolución resulte más fácil.

11 BÚSQUEDA DE UN CONTRAEJEMPLO

Esta estrategia se utiliza para demostrar la falsedad de un enunciado matemático. Puesto que un enunciado expresado de manera general ha de cumplirse siempre, si en un caso particular *(contraejemplo)* no se cumple, el enunciado ya no es válido.

12 REDUCCIÓN AL ABSURDO

Esta estrategia se utiliza para demostrar afirmaciones. Consiste en suponer la falsedad de lo que se quiere demostrar y llegar así a una contradicción.

La resolución de cualquier problema conlleva un proceso de razonamiento más o menos consciente. Además, para comprender y utilizar los desarrollos teóricos, participar en su construcción, obtener conclusiones, justificarlas y, si es preciso, demostrarlas, se utiliza el **razonamiento lógico.** Este tipo de razonamiento, dentro del cual se engloban algunas de las estrategias vistas, forma parte de la *lógica* y facilita, además, las deducciones y el descubrimiento de falacias.

Prohibida su reproducción

Construcción de una tabla de verdad

1. Dibujamos una cruz y en la parte superior izquierda escribimos todas las variables queintervienen.
2. Asignamos los valores de verdad a las variables, de modo que se reproduzcan todas las combinaciones posibles.
3. Escribimos en la parte superior derecha las fórmulas que componen el enunciado que se está analizando. Debemos escribirlas en orden, de modo que primero resolvamos los enunciados integrantes (los que se encuentran entre paréntesis y corchetes), para acabar con el enunciado que posee la conectiva principal.
4. Asignamos los valores de verdad de los enunciados compuestos. Nos basamos en las tablas de verdad de los símbolos lógicos que aparecen en ese enunciado.
5. Los valores de verdad que aparecen en la última columna son todos los valores de verdad que puede tener la fórmula que acabamos de analizar.

Distribución de Bernoulli

<u>*Experimento de Bernoulli:*</u> solo son posibles dos resultados: éxito o fracaso. Podemos definir una variable aleatoria discreta X tal que:

$$\text{éxito} \rightarrow 1$$
$$\text{fracaso} \rightarrow 0$$

"Which Bernoulli do you wish to see — 'Hydrodynamics' Bernoulli, 'Calculus' Bernoulli, 'Geodesic' Bernoulli, 'Large Numbers' Bernoulli or 'Probability' Bernoulli?"

http://goo.gl/NtcqZQ

Si la **probabilidad de éxito** es p y la de **fracaso** $1 - p$, podemos construir una función de probabilidad:

$$\boxed{P(x) = p^x (1-p)^{1-x} \qquad x = 0,1}$$

Un típico experimento de Bernoulli es el lanzamiento de una moneda con probabilidad p para cara y (1-p) para cruz.

2

Prohibida su reproducción

Nombre: ______________________ Fecha: ______________

1. **En una urna hay 15 bolas numeradas de 2 al 16. Extraemos una bola al azar y observamos el número que tiene.**

a) Describe los sucesos:

$A \equiv$ **"Obtener par"** $B \equiv$ **"Obtener impar"**

$C \equiv$ **"Obtener primo"** $D \equiv$ **"Obtener impar menor que 9"**

escribiendo todos sus elementos.

b) ¿Qué relación hay entre A y B? ¿Y entre C y D?

c) ¿Cuál es el suceso $A \cup B$? ¿y $C \cap D$?

2. **Sean A y B los sucesos tales que:**

$P[A] = 0{,}4$ $P[A' \cap B] = 0{,}4$ $P[A \cap B] = 0{,}1$

Calcula $P[A \cup B]$ y $P[B]$.

3. **Sean A y B dos sucesos de un espacio de probabilidad tales que:**

$P[A'] = 0{,}6$ $P[B] = 0{,}3$ $P[A' \cup B'] = 0{,}9$

a) ¿Son independientes A y B?

b) Calcula $P[A' / B]$.

Prohibida su reproducción

Nombre: ______________________ Fecha: ______________

4 **Dos personas eligen al azar, cada una de ellas, un número del 0 al 9. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos personas no piensen el mismo número?**

5. **En un viaje organizado por Europa para 120 personas, 48 de los que van saben hablar inglés, 36 saben hablar francés, y 12 de ellos hablan los dos idiomas.**

Escogemos uno de los viajeros al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que hable alguno de los dos idiomas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que hable francés, sabiendo que habla inglés?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que solo hable francés?

6. **Una urna, *A*, contiene 7 bolas numeradas del 1 al 7. En otra urna, *B*, hay 5 bolas numeradas del 1 al 5. Lanzamos una moneda equilibrada, de forma que, si sale cara, extraemos una bola de la urna *A* y, si sale cruz, la extraemos de *B*.**

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par?

b) Sabiendo que salió un número par, ¿cuál es la probabilidad de que fuera de la urna *A*?

7. **De una bolsa que tiene 10 bolas numeradas del 0 al 9, se extrae una bola al azar.**

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Describe los sucesos:

$A =$ **"Mayor que 6"** $B =$ **"No obtener 6"** $C =$ **"Menor que 6"**

escribiendo todos sus elementos.

c) Halla los sucesos $A \cup B$, $A \cap B$ **y** $B' \cap A'$.

8. **Sabiendo que:**

$P[A \cap B] = 0,2$ $P[B'] = 0,7$ $P[A \cap B'] = 0,5$

Calcula $P[A \cup B]$ **y** $P[A]$.

Recurso para la evaluación

Prohibida su reproducción

1. a) $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$

$B = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$

$C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

$D = \{3, 5, 7\}$

b) $B = A'$; $D \subset C$

c) $A \cup B = E$ (Espacio muestral); $C \cap D = D$

2. • $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = 0,4 + 0,5 - 0,1 = 0,8$

3. Por tanto, A y B no son independientes. $P[A'/B] = \dfrac{P[A' \cap B]}{P[B]} = \dfrac{0,2}{0,3} = 0,67$

4. $1 - \dfrac{1}{10} = \dfrac{9}{10} = 0,9$

5. a) Tenemos que hallar $P[I \cup F]$:

$$P[I \cup F] = P[I] + P[F] - P[I \cap F] = \frac{48 + 36 - 12}{120} = \frac{72}{120} = \frac{3}{5} = 0,6$$

b) $P[F/I] = \dfrac{12}{48} = \dfrac{1}{4} = 0,25$

c) $P[F \cap \text{no } I] = \dfrac{24}{120} = \dfrac{1}{5} = 0,2$

6. a) $P[\text{PAR}] = \dfrac{3}{14} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{29}{70}$

b) $P[A/\text{PAR}] = \dfrac{P[A \text{ y PAR}]}{P[\text{PAR}]} = \dfrac{3/14}{29/70} = \dfrac{15}{29}$

7. a) $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

b) $A = \{7, 8, 9\}$ $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

c) $$\left.\begin{aligned} A \cup B &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\} = B \\ A \cap B &= \{7, 8, 9\} = A \\ B' \cap A' &= \{6\} = B' \end{aligned}\right\} \text{ pues } A \subset B$$

8. $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = 0,7 + 0,3 - 0,2 = 0,8$

Prohibida su reproducción

Nombre: ______________________ Fecha: ______________

http://goo.gl/djVNrC

1. Con un juego de Barajas (del tipo que tienen: corazones, picas, tréboles y diamantes).

a) Cuenta el número total de cartas en una baraja

Sol. 52

b) Cuenta el número de cartas de cada tipo (corazones, picas, tréboles y diamantes)

Sol. 13

c) Calcula junto con el profesor la probabilidad de obtener al azar una carta roja

26/52

d) Calcula la probabilidad de obtener al azar una carta que sea trébol.

13/52

e) Calcula la probabilidad de obtener al azar una carta que sea un as de diamante.

1/52

Prohibida su reproducción

CICLO DEL APRENDIZAJE

¿Cómo dinamizo el aula?

Experiencia concreta

- Debatir en clase los fenomenos aleatorios, como los juegos de azar. Tambien debatir acerca de la posibilidad de predecir el clima.
- Analizar los datos obtenidos en un experimento realizado en clase, donde se use una variable aleatoria discreta.

Observación reflexiva

- Reflexionar acerca de la importancia de estos modelos matemáticos en la predicción de eventos.
- Al realizar gráficos indagar acerca de las variables y resultados obtenidos.
- Identificar los elementos para distinguir Esperanza y Varianza.

Conceptualización

- Diferenciar el campo de acción de la Estadística comparado con el campo de acción de la Probabilidad
- Comparar las definiciones entre una variable aleatoria y una variable contínua.

Aplicación

- Atravez de un ejercicio en clase, predecir las probabilidades involucradas, puede ser un juego de extraer objetos de diferentes colores dentro de una caja.
- Reconocer los parámetros descriptivos usados.
- Producir predicciones usando los modelos matemáticos estudiados.

Prohibida su reproducción

BANCO DE PREGUNTAS

1. Qué es el espacio muestral?

   Es el conjunto de todos los resultados posibles en un experimento aleatorio y determinista

2. A qué llamamos suceso, en probabilidades?

   A cualquier subconjunto del espacio muestral

3. Cuáles operaciones son posibles entre sucesos asociados a un experimento aleatorio?

   Unión, intersección, diferencia, complemento

4. A qué llamamos conjunto potencia en probabilidades?

   Al conjunto formado por todos los sucesos asociados con un experimento

5. Que es un axioma matemático?

   Es una afirmación que se acepta sin demostración

6. Cuál es la expresión que conocemos como el principio de la probabilidad compuesta o regla del producto

$$P\ (A \cap B) = P\ (B\ ) \cdot P\ (A|B\ )$$

   A esta expresión la conocemos como principio de la probabilidad compuesta o regla del producto.

7. Cuándo dos sucesos se dice que son independientes?

   Dados dos sucesos A y B, asociados con un mismo experimento aleatorio, diremos que A y B son independientes si se cumple:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

8. A qué llamamos a la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta?

   Llamamos función de probabilidad de una variable aleatoria discreta X a la función que asigna a cada número real x la probabilidad de que X tome el valor x:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to f(x) = P\ (X = x)$$

Prohibida su reproducción

Efectuar una deducción

1.º Ordenamos las premisas y las conectamos mediante conjunciones. Aplicándoles las leyes lógicas, debemos obtener la conclusión.

Si lo conseguimos, habremos demostrado que el razonamiento es formalmente válido.

2.º En líneas sucesivas colocamos el resultado de ir aplicando las leyes lógicas sobre las premisas. Junto a cada línea de la deducción anotamos la ley que se ha utilizado.

3.º Al llegar a la **conclusión** del razonamiento, la deducción estará completa.

Por ejemplo:

$[(p \Rightarrow \neg q) \wedge p \wedge (q \vee r)] \Rightarrow$

(*Modus ponens*)

$\Rightarrow [\neg q \wedge (q \vee r)] \Rightarrow$

(*Silogismo disyuntivo*)

$\Rightarrow \mathbf{r}$

Proceso axiomático-deductivo

Cuando utilizamos unas reglas de inferencia para transformar unos enunciados (premisas) en otro enunciado (conclusión) estamos efectuando una deducción. Si, además, las premisas son *axiomas* (proposiciones tautológicas, es decir, consideradas verdaderas), el proceso recibe el nombre de **proceso axiomático-deductivo.** Las conclusiones obtenidas se denominan *teoremas.*

Así, el proceso axiomático-deductivo consiste en la derivación u obtención de teoremas a partir de ciertos axiomas y de unas reglas de inferencia dadas, las *leyes del cálculo proposicional.*

Un **sistema axiomático** es el conjunto configurado por los axiomas y las reglas de inferencia adoptados. Así, habrá tantos sistemas axiomáticos como asociaciones *axiomas/reglas de inferencia* podamos formular. Cualquier sistema debe tener *independencia* (ninguno de los axiomas puede derivarse de los restantes, y ninguna de las leyes de cálculo puede derivarse, tampoco, de las restantes), *consistencia* (los axiomas y las leyes de cálculo adoptados sólo pueden dar lugar a tautologías) y *plenitud* (todas las fórmulas correctas son deducibles a partir de los axiomas y las leyes del cálculo proposicional definidas).

Una vez fijado el sistema axiomático, denominamos *demostración de un teorema* $P \Rightarrow Q$ al proceso por el que la proposición condicional $P \rightarrow Q$ se deriva de los axiomas y, en su caso, de los teoremas demostrados con anterioridad, mediante la aplicación de las leyes del cálculo proposicional adoptadas. Los tres procesos deductivos más habituales en matemáticas son:

Demostración directa	Contrarrecíproco	Reducción al absurdo
Partimos de las premisas y, mediante la aplicación de las reglas de cálculo pertinentes, llegamos a la conclusión.	Demostramos la negación de las premisas a partir de la negación de la conclusión, es decir, demostramos $P \Rightarrow Q$ al demostrar $\neg Q \Rightarrow \neg P$.	Partimos de la conjunción de la premisa con la negación de la conclusión y llegamos a una contradicción. Así demostramos $A \Rightarrow B$ al demostrar $(A \wedge \neg B) \Rightarrow (C \wedge \neg C)$.
Demuestra que si un número n *es divisor de otros dos,* a *y* b, *su cuadrado es divisor del producto de ambos.* Hemos de demostrar: $[n \mid a \wedge n \mid b] \Rightarrow [n^2 \mid a \cdot b]$ Si un número *n* es divisor de otro número *a,* existe un tercer número k_1 que multiplicado por *n* nos da *a:* $[(n \mid a) \wedge (n \mid b)] \Rightarrow$ $\Rightarrow [(\exists k_1 \in \mathbb{R} / a = k_1 \cdot n) \wedge$ $\wedge (\exists k_2 \in \mathbb{R} / b = k_2 \cdot n)] \Rightarrow$ $\Rightarrow [a \cdot b = (k_1 \cdot n) \cdot (k_2 \cdot n) = (k_1 \cdot k_2) \cdot n^2] \Rightarrow$ $\Rightarrow [n^2 \mid a \cdot b]$ Como el producto de *a* y *b* es n^2 multiplicado por un número, llegamos a demostrar que n^2 es divisor de $a \cdot b$.	*Por ejemplo, dadas tres rectas del plano* r, s *y* t, *tales que* r *y* s *sean paralelas, demostrar que si* r *y* t *también son paralelas, entonces* s *y* t *son paralelas.* Hemos de demostrar: $[(r \parallel s) \wedge (r \parallel t)] \Rightarrow (s \parallel t)$ Vamos a partir del supuesto que no se cumpla la conclusión. Entonces *s* y *t* tendrán algún punto en común y, como *s* y *r* son paralelas, también *r* y *t* tendrán algún punto común y, por tanto, no serán paralelas. $\neg(s \parallel t) \Rightarrow (s \cap t \neq \varnothing) \Rightarrow$ $\Rightarrow (r \cap t \neq \varnothing) \Rightarrow \neg(r \parallel t)$ Como la conclusión es falsa, *s* y *t* son paralelas, $s \parallel t$.	*Por ejemplo, dadas tres rectas del plano* r, s *y* t, *tales que* r *y* t *sean paralelas, demostrar que si* s *y* t *también son paralelas, entonces* r *y* s *son paralelas.* Hemos de demostrar: $[(r \parallel t) \wedge (s \parallel t)] \Rightarrow (r \parallel s)$ Suponemos que *r* y *s* no son paralelas. Entonces, tienen un punto *P* en común. Como *r* y *s* son paralelas a *t,* eso significaría que existen dos rectas paralelas diferentes que pasan por el mismo punto. Como esto es absurdo, debe ser falso que *r* y *s* no sean paralelas. Así pues, lo son. $\neg(r \parallel s) \Rightarrow (r \cap s = P) \Rightarrow$ $\Rightarrow [(P \in r \parallel t) \wedge (P \in s \parallel t)] \Rightarrow (r \parallel s)$

Prohibida su reproducción

Propiedades de las operaciones con sucesos

Podemos demostrar que las operaciones anteriores cumplen las propiedades de la siguiente tabla.

Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asociativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Idempotente	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Absorsión	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Identidad	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \Omega = A$
Involución	$A \cup \underline{A} = \Omega$	$A \cap \underline{A} = \emptyset$
Complementación	$\bar{\bar{A}} = A$	
Leyes de De Morgan	$\overline{A \cup B} = \bar{B} \cap \bar{A}$ $(A \cup B)^c = B^c \cap A^c$	$\overline{A \cap B} = \bar{B} \cup \bar{A}$ $(A \cap B)^c = B^c \cup A^c$

Tabla 3.

Ejemplo 2

Tomemos una carta de una baraja inglesa y observemos su palo. Efectuemos las siguientes operaciones con los sucesos P: sacar corazones, Q: no sacar espadas y R: no sacar ni diamantes ni espadas.

a. $\bar{R}$ b. $R \cup Q$ c. $R \cap Q$ d. $Q - P$

Si designamos por D (diamantes), C (corazones), E (espadas) y T (trebol) los cuatro palos de la baraja, tenemos que:

$$\Omega = \{D, C, E, T\}$$

Así pues:

$$P = \{C\} ; Q = \{D, C, T\} ; R = \{C, T\}$$

De esta manera:

a. $\bar{R} = \Omega - R = \{D, C, E, T\} - \{C, T\} = \{D, E\}$

b. $R \cup Q = \{C, T\} \cup \{D, C, T\} = \{D, C, T\}$

c. $R \cap Q = \{C, T\} \cap \{D, C, T\} = \{C, T\}$

d. $Q - P = \{D, C, T\} - \{C\} = \{D, T\}$

Ejemplo 3

Lanzemos un dado y observemos su puntuación. Comprobemos que se cumplen las leyes de De Morgan con los sucesos A: sacar 2 o 3 y B: sacar más de 4.

Expresamos los sucesos A, $\bar{A}$, B y $\bar{B}$ por extensión:

$A = \{2, 3\} ; \bar{A} = \{1, 4, 5, 6\}$ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B = \{5, 6\} ; \bar{B} = \{1, 2, 3, 4\}$

Así pues, para la primera ley de De Morgan:

$\overline{A \cup B} = \Omega - (A \cup B) = \Omega - (\{2, 3\} \cup \{5, 6\}) = \{1, 4\}$

$\bar{A} \cap \bar{B} = \{1, 4, 5, 6\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 4\}$

En efecto: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

De igual forma, para la segunda ley de De Morgan:

$\overline{A \cap B} = \Omega - (A \cap B) = \Omega - (\{2, 3\} \cap \{5, 6\}) = \Omega - \emptyset = \Omega$

$\bar{A} \cup \bar{B} = \{1, 4, 5, 6\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$

En efecto: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Llamamos conjunto potencia al conjunto formado por todos los sucesos asociados con un experimento. Lo representaremos por $P(\Omega)$.

Actividades

2. De una bolsa donde hay veinte bolas numeradas del 1 al 20, extraemos una. **Comprueba** que se cumplen las propiedades asociativa y distributiva con los sucesos A: obtener número par, B: obtener número primo y C: obtener un número tal que la suma de sus cifras sea 5.

Prohibida su reproducción

Nombre	Ley	Descripción
Silogismo disyuntivo	$[(A \vee B) \wedge \neg A] \Rightarrow B$	La disyunción de dos proposiciones y la negación de una de ellas implica la otra. *Si llueve o hace sol pero no llueve, entonces hace sol.*
Condicional-conjunción	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$	Un condicional es la negación de la conjunción del antecedente con la negación del consecuente. *Si gira, entonces se mueve* equivale a *No es cierto que gire y no se mueva.*
Condicional-disyunción	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$	Un condicional es la negación de la disyunción entre la negación del antecedente y el consecuente. *Si está quieto, entonces no se mueve* equivale a *No está quieto o no se mueve.*
Modus ponens	$[(A \Rightarrow B) \wedge A] \Rightarrow B$	Dado un condicional y su antecedente como premisas, se concluye el consecuente. *Si pensar conlleva existir, y pienso, entonces existo.*
Modus tollens	$[(A \Rightarrow B) \wedge \neg B] \Rightarrow \neg A$	De un condicional y la negación del consecuente se concluye la negación del antecedente. *Si la tortilla es española, entonces lleva patatas, y esta tortilla no las lleva, luego esta tortilla no es española.*
Ley de la transitividad	$[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$	Si *A* tiene como consecuencia *B*, y *B* tiene como consecuencia *C*, entonces puede concluirse que *A* tiene como consecuencia *C*. *Si una recta* r *es paralela a otra recta* s, *y* s *es paralela a otra recta* t, *entonces* r *es paralela a* t.
Conmutatividad	$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$ $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow A)$	El orden en la conjunción, en la disyunción y en el bicondicional de las premisas no altera la verdad.
Asociatividad	$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$ $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$ $[(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C] \Leftrightarrow [A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)]$	La asociación de las premisas en la conjunción, en la disyunción y en el bicondicional no altera la verdad.
Distributividad (conjunción, disyunción)	$[A \wedge (B \vee C)] \Leftrightarrow [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)]$ $[A \vee (B \wedge C)] \Leftrightarrow [(A \vee B) \wedge (A \vee C)]$	La conjunción de una disyunción es la disyunción de las conjunciones. La disyunción de una conjunción es la conjunción de las disyunciones.
Distributividad (conjunción, disyunción, condicional)	$[A \Rightarrow (B \vee C)] \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C)]$ $[A \Rightarrow (B \wedge C)] \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)]$	La implicación de una conjunción es la conjunción de las implicaciones. La implicación de una disyunción es la disyunción de las implicaciones.
Idempotencia	$A \wedge A \Leftrightarrow A$ $A \vee A \Leftrightarrow A$	Si algo es cierto, su conjunción o su disyunción también lo son.

Prohibida su reproducción

Efectuar una deducción

1.º Ordenamos las premisas y las conectamos mediante conjunciones. Aplicándoles las leyes lógicas, debemos obtener la conclusión.

Si lo conseguimos, habremos demostrado que el razonamiento es formalmente válido.

2.º En líneas sucesivas colocamos el resultado de ir aplicando las leyes lógicas sobre las premisas. Junto a cada línea de la deducción anotamos la ley que se ha utilizado.

3.º Al llegar a la **conclusión** del razonamiento, la deducción estará completa.

Por ejemplo:

$$[(p \Rightarrow \neg q) \wedge p \wedge (q \vee r)] \Rightarrow$$

(*Modus ponens*)

$$\Rightarrow [\neg q \wedge (q \vee r)] \Rightarrow$$

(*Silogismo disyuntivo*)

$$\Rightarrow \mathbf{r}$$

Proceso axiomático-deductivo

Cuando utilizamos unas reglas de inferencia para transformar unos enunciados (premisas) en otro enunciado (conclusión) estamos efectuando una deducción. Si, además, las premisas son *axiomas* (proposiciones tautológicas, es decir, consideradas verdaderas), el proceso recibe el nombre de **proceso axiomático-deductivo.** Las conclusiones obtenidas se denominan *teoremas.*

Así, el proceso axiomático-deductivo consiste en la derivación u obtención de teoremas a partir de ciertos axiomas y de unas reglas de inferencia dadas, las *leyes del cálculo proposicional.*

Un **sistema axiomático** es el conjunto configurado por los axiomas y las reglas de inferencia adoptados. Así, habrá tantos sistemas axiomáticos como asociaciones *axiomas/reglas de inferencia* podamos formular. Cualquier sistema debe tener *independencia* (ninguno de los axiomas puede derivarse de los restantes, y ninguna de las leyes de cálculo puede derivarse, tampoco, de las restantes), *consistencia* (los axiomas y las leyes de cálculo adoptados sólo pueden dar lugar a tautologías) y *plenitud* (todas las fórmulas correctas son deducibles a partir de los axiomas y las leyes del cálculo proposicional definidas).

Una vez fijado el sistema axiomático, denominamos *demostración de un teorema* $P \Rightarrow Q$ al proceso por el que la proposición condicional $P \rightarrow Q$ se deriva de los axiomas y, en su caso, de los teoremas demostrados con anterioridad, mediante la aplicación de las leyes del cálculo proposicional adoptadas. Los tres procesos deductivos más habituales en matemáticas son:

Demostración directa	Contrarrecíproco	Reducción al absurdo
Partimos de las premisas y, mediante la aplicación de las reglas de cálculo pertinentes, llegamos a la conclusión.	Demostramos la negación de las premisas a partir de la negación de la conclusión, es decir, demostramos $P \Rightarrow Q$ al demostrar $\neg Q \Rightarrow \neg P$.	Partimos de la conjunción de la premisa con la negación de la conclusión y llegamos a una contradicción. Así demostramos $A \Rightarrow B$ al demostrar $(A \wedge \neg B) \Rightarrow (C \wedge \neg C)$.
Demuestra que si un número n *es divisor de otros dos,* a *y* b, *su cuadrado es divisor del producto de ambos.* Hemos de demostrar: $[n \mid a \wedge n \mid b] \Rightarrow [n^2 \mid a \cdot b]$ Si un número n es divisor de otro número a, existe un tercer número k_1 que multiplicado por n nos da a: $[(n \mid a) \wedge (n \mid b)] \Rightarrow$ $\Rightarrow [(\exists k_1 \in \mathbb{R} / a = k_1 \cdot n) \wedge$ $\wedge (\exists k_2 \in \mathbb{R} / b = k_2 \cdot n)] \Rightarrow$ $\Rightarrow [a \cdot b = (k_1 \cdot n) \cdot (k_2 \cdot n) = (k_1 \cdot k_2) \cdot n^2] \Rightarrow$ $\Rightarrow [n^2 \mid a \cdot b]$ Como el producto de a y b es n^2 multiplicado por un número, llegamos a demostrar que n^2 es divisor de $a \cdot b$.	*Por ejemplo, dadas tres rectas del plano* r, s *y* t, *tales que* r *y* s *sean paralelas, demostrar que si* r *y* t *también son paralelas, entonces* s *y* t *son paralelas.* Hemos de demostrar: $[(r \parallel s) \wedge (r \parallel t)] \Rightarrow (s \parallel t)$ Vamos a partir del supuesto que no se cumpla la conclusión. Entonces s y t tendrán algún punto en común y, como s y r son paralelas, también r y t tendrán algún punto común y, por tanto, no serán paralelas. $\neg(s \parallel t) \Rightarrow (s \cap t \neq \emptyset) \Rightarrow$ $\Rightarrow (r \cap t \neq \emptyset) \Rightarrow \neg(r \parallel t)$ Como la conclusión es falsa, s y t son paralelas, $s \parallel t$.	*Por ejemplo, dadas tres rectas del plano* r, s *y* t, *tales que* r *y* t *sean paralelas, demostrar que si* s *y* t *también son paralelas, entonces* r *y* s *son paralelas.* Hemos de demostrar: $[(r \parallel t) \wedge (s \parallel t)] \Rightarrow (r \parallel s)$ Suponemos que r y s no son paralelas. Entonces, tienen un punto P en común. Como r y s son paralelas a t, eso significaría que existen dos rectas paralelas diferentes que pasan por el mismo punto. Como esto es absurdo, debe ser falso que r y s no sean paralelas. Así pues, lo son. $\neg(r \parallel s) \Rightarrow (r \cap s = P) \Rightarrow$ $\Rightarrow [(P \in r \parallel t) \wedge (P \in s \parallel t)] \Rightarrow (r \parallel s)$

Prohibida su reproducción

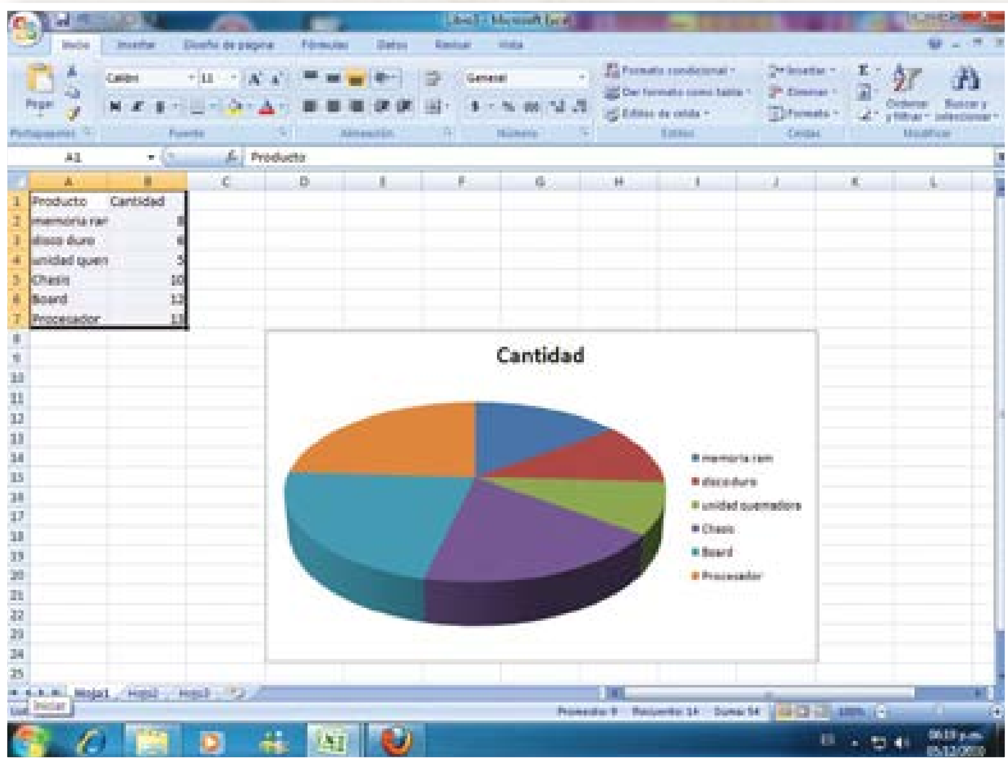
RECURSOS PROPIOS DEL ÁREA

La Hoja de Cálculo Exce puede convertirse en una poderosa herramienta para crear entornos de aprendizaje que enriquezcan la representación (modelado), comprensión y solución de problemas, en el área de la estadística y probabilidad. Excel ofrece funcionalidades que van más allá de la tabulación, cálculo de fórmulas y graficación de datos:

- En estadística descriptiva representa todos los tipos de gráficos y calcula la media, moda, mediana, recorrido, varianza y desviación típica.
- En estadística bidimensional representa la nube de puntos y la recta de regresión. Calcula el centro de gravedad, las desviaciones típicas marginales, la covarianza, el coeficiente de correlación, la recta de regresión y buscar objetivos.
- En la distribución binomial, calcula cualquier probabilidad, la media, varianza y desviación típica.
- En la distribución normal, calcula cualquier probabilidad en la normal estándar N(0, 1) y en cualquier normal N(m, s) y genera la tabla N(0, 1)
- En inferencia estadística calcula los intervalos de confianza, el tamaño de la muestra y se puede aplicar al contraste de hipótesis, tanto en el bilateral como en el unilateral.
- En probabilidad simula todo tipo de lanzamientos.

La instalación del programa es muy sencilla, además Microsoft Excel incluye un comando para el análisis de datos, dentro de las "herramientas para el análisis", su uso es poco común, ya que no se tiene cuidado de instalar todas las funciones dentro de las "herramientas", perdiendo la oportunidad de utilizar un medio poderoso para el estudio dentro de la estadística.

Tomado de : http://goo.gl/QQ5MRL



http://goo.gl/ystisU

Prohibida su reproducción

Página 180 y 181

6 Probabilidad

CONTENIDOS:

1. Sucesos
   - 1.1. Suceso seguro y suceso imposible
   - 1.2. Operaciones con sucesos:
   - 1.3. Sucesos compatibles y sucesos incompatibles
   - 1.4. Sistema completo de sucesos
2. Probabilidad
   - 2.1. Definición experimental
   - 2.2. Definición axiomática
   - 2.3. Propiedades de la probabilidad
3. Probabilidad condicionada
   - 3.1. Concepto
   - 3.2. Propiedades de la probabilidad condicionada
   - 3.3. Sucesos dependientes y sucesos independientes
   - 3.4. Teorema de la probabilidad total
   - 3.5. Teorema de Bayes
4. Variables aleatorias
   - 4.1. Concepto
   - 4.2. Tipos de variable aleatoria
5. Distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta
   - 5.1. Función de probabilidad
6. Distribución de probabilidad de una variable aleatoria continúa
   - 6.1. Función de densidad
7. Parámetros descriptivos
   - 7.1. Esperanza
   - 7.2. Varianza
8. Distribuciones discretas
   - 8.1. Distribución de Bernoulli
   - 8.2. Distribución binomial
   - 8.3. Distribución de Poisson
9. Variable estadística bidimensional
   - 9.1. Organización de datos
   - 9.2. Análisis de datos
   - 9.3. Interpretación gráfica de la relación entre variables
   - 9.4. Coeficiente de Pearson
   - 9.5. Regresión lineal

Web:

Aquí puedes reforzar varios temas sobre probabilidad: http://pendientedemigracion.ucm.es/info/genetica/Estadistica/estadistica_basica%201.htm.

Libro:

Varios ejemplos de la aplicabilidad de la probabilidad puedes encontrarlos en esta lectura muy interesante; entra en el siguiente link: http://www2.cab.cnea.gov.ar/divulgacion/probabilidades/m_probabilidad_f1.html

EN CONTEXTO:

El estudio de probabilidad permite predecir el resultado de experimentos aleatorios. El azar es parte muy importante en juegos de mesa y de casinos, por ejemplo, al lanzar los dados. Mediante estudios probabilísticos podemos calcular estrategias para obtener resultados deseados en un experimento aleatorio.

http://goo.gl/NN4wzy

180

181

Orientación didáctica

- Para anticipar posibles dificultades en los contenidos de la unidad, el profesor o profesora puede utilizar las siguientes propuestas: repasar los conceptos de la teoría de conjuntos y los conceptos y propiedades de las operaciones de sumatoria (series), que tienen la notación sigma $\sum$.

  El profesor puede sugerir la participación de estudiantes en el pizarrón, siguiendo los procedimientos completos de los ejercicios con mayor dificultad, y de esta forma asegura conocimientos previos y anticipa posibles dificultades en los contenidos de la unidad.

  Se sugiere también que el docente les pida a los estudiantes que justifiquen sus respuestas.

Prohibida su reproducción

Página 189

Solucionario

1. Demuestra que si $A \cap B = \emptyset$, entonces se cumple que $P(B \mid A) = 0$.
2. Extraemos dos bolas de una urna en la que hay cinco bolas blancas y tres negras. Calcula la probabilidad de los sucesos A: las dos bolas son negras y B: la primera bola es blanca y la otra es negra en los casos siguientes:

    a. Sin reemplazo de la primera bola extraída.

    0.107

    b. Con reemplazo de la primera bola extraída.

    0.141

3.2. Propiedades de la probabilidad condicionada

Las principales propiedades de la probabilidad condicionada son:

- Si un suceso B está contenido en un suceso C, entonces la probabilidad de B dado A es menor o igual que la probabilidad de C dado A.

$$B \subset C \Rightarrow P(B|A) \leq P(C|A)$$

- Si un suceso B está contenido en otro suceso A, entonces la probabilidad del suceso B dado A es el cociente entre la probabilidad del suceso B y la probabilidad del suceso A.

$$B \subset A \Rightarrow P(B|A) = \frac{P(A)}{P(B)}$$

- Si un suceso A está contenido en otro suceso B, entonces la probabilidad del suceso B dado A es igual a uno.

$$A \subset B \Rightarrow P(B|A) = 1$$

Estas propiedades son consecuencia inmediata de las propiedades de la probabilidad y de la definición de probabilidad condicionada.

3.3. Sucesos dependientes y sucesos independientes

Al lanzar dos veces un dado, el hecho de que se verifique o no el suceso B: número par en el primer lanzamiento, no influye en el suceso A: número impar en el segundo lanzamiento, ni viceversa.

En este caso, la probabilidad de que ocurra un suceso no está condicionada a que ocurra el otro. Por tanto:

$$P(A|B) = P(A) \quad P(B|A) = P(B)$$

A partir del principio de la probabilidad compuesta, tenemos que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Diremos entonces que ambos sucesos son independientes.

Dados dos sucesos A y B, asociados con un mismo experimento aleatorio, diremos que A y B son independientes si se cumple:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Caso contrario, decimos que A y B son dependientes.

Actividades

6. **Demuestra** que si $A \cap B = \emptyset$, entonces se cumple que $P(B|A) = 0$.
7. Extraemos dos bolas de una urna en la que hay cinco bolas blancas y tres negras. **Calcula** la probabilidad de los sucesos A: las dos bolas son negras y B: la primera bola es blanca y la otra es negra, en los casos siguientes:

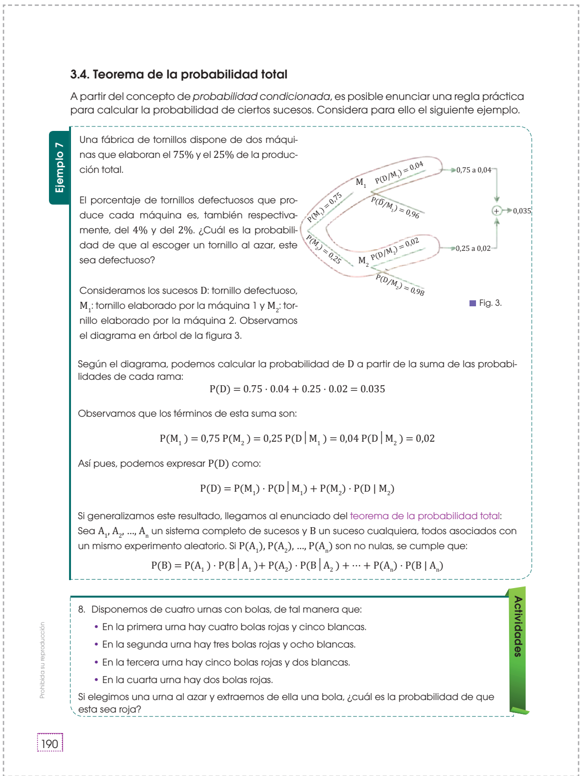
    a. Sin reemplazo de la primera bola extraída

    b. Con reemplazo de la primera bola extraída

Prohibida su reproducción

Prohibida su reproducción

Página 190



3.4. Teorema de la probabilidad total

A partir del concepto de *probabilidad condicionada*, es posible enunciar una regla práctica para calcular la probabilidad de ciertos sucesos. Considera para ello el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7

Una fábrica de tornillos dispone de dos máquinas que elaboran el 75% y el 25% de la producción total.

El porcentaje de tornillos defectuosos que produce cada máquina es, también respectivamente, del 4% y del 2%. ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger un tornillo al azar, este sea defectuoso?

Consideramos los sucesos D: tornillo defectuoso, M_1: tornillo elaborado por la máquina 1 y M_2: tornillo elaborado por la máquina 2. Observamos el diagrama en árbol de la figura 3.

Fig. 3.

Según el diagrama, podemos calcular la probabilidad de D a partir de la suma de las probabilidades de cada rama:

$$P(D) = 0.75 \cdot 0.04 + 0.25 \cdot 0.02 = 0.035$$

Observamos que los términos de esta suma son:

$$P(M_1) = 0,75 \; P(M_2) = 0,25 \; P(D \mid M_1) = 0,04 \; P(D \mid M_2) = 0,02$$

Así pues, podemos expresar $P(D)$ como:

$$P(D) = P(M_1) \cdot P(D \mid M_1) + P(M_2) \cdot P(D \mid M_2)$$

Si generalizamos este resultado, llegamos al enunciado del teorema de la probabilidad total:
Sea $A_1, A_2, ..., A_n$ un sistema completo de sucesos y B un suceso cualquiera, todos asociados con un mismo experimento aleatorio. Si $P(A_1), P(A_2), ..., P(A_n)$ son no nulas, se cumple que:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B \mid A_1) + P(A_2) \cdot P(B \mid A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B \mid A_n)$$

Actividades

8. Disponemos de cuatro urnas con bolas, de tal manera que:
   - En la primera urna hay cuatro bolas rojas y cinco blancas.
   - En la segunda urna hay tres bolas rojas y ocho blancas.
   - En la tercera urna hay cinco bolas rojas y dos blancas.
   - En la cuarta urna hay dos bolas rojas.

   Si elegimos una urna al azar y extraemos de ella una bola, ¿cuál es la probabilidad de que esta sea roja?

Prohibida su reproducción

Solucionario

R./ 0,608

Prohibida su reproducción

Página 191

3.5. Teorema de Bayes

Vamos a estudiar el ejemplo del apartado anterior desde otro punto de vista. Si sabemos que un tornillo es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado por cierta máquina?

Calculemos la probabilidad de que el tornillo haya sido fabricado por la máquina 1, sabiendo que ha resultado defectuoso, es decir, $P(M_1 \mid D)$.

Según la definición de *probabilidad condicionada*, tenemos:

$$P(M_1|D) = \frac{P(M_1 \cap D)}{P(D)}$$

Por otro lado, del diagrama de la figura podemos calcular la probabilidad de $P(M_1 \cap D)$, que corresponde a la de la rama señalada:

$$P(M_1 \cap D) = P(M_1) \cdot P(D \mid M_1)$$

Si tenemos en cuenta además el teorema de la probabilidad total:

$$P(D) = P(M_1) \cdot P(D \mid M_1) + P(M_2) \cdot P(D \mid M_2)$$

llegamos finalmente a:

$$P(M_1|D) = \frac{P(M_1) \cdot P(D \mid M_1)}{P(M_1) \cdot P(D \mid M_1) + P(M_2) \cdot P(D \mid M_1)}$$

Con los datos del ejemplo:

$$P(M_1|D) = \frac{0{,}75 \cdot 0{,}04}{0{,}75 \cdot 0{,}04 + 0{,}25 \cdot 0{,}02} = 0{,}857$$

Al enunciar de forma general el resultado anterior, llegamos al llamado teorema de Bayes:

Sea $A_1,\ldots,A_i,\ldots,A_n$ un sistema completo de sucesos y B un suceso cualquiera, todos ellos asociados con un mismo experimento aleatorio. Si $P(A_1),\ldots,P(A_i),\ldots,P(A_n)$ son no nulas, se cumple que:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)}{P(A_1) \cdot P(B \mid A_1) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B \mid A_n)}$$

Actividades

9. En un congreso se reúnen 250 médicos del Benelux, de los cuales 115 son holandeses; 65, belgas, y 70, luxemburgueses. De ellos, el 75% de los holandeses, el 60% de los belgas y el 65% de los luxemburgueses están a favor de la utilización de determinada vacuna. Seleccionamos al azar uno de los médicos y resulta estar a favor del uso de la vacuna. ¿Cuál es la probabilidad de que sea de Luxemburgo?

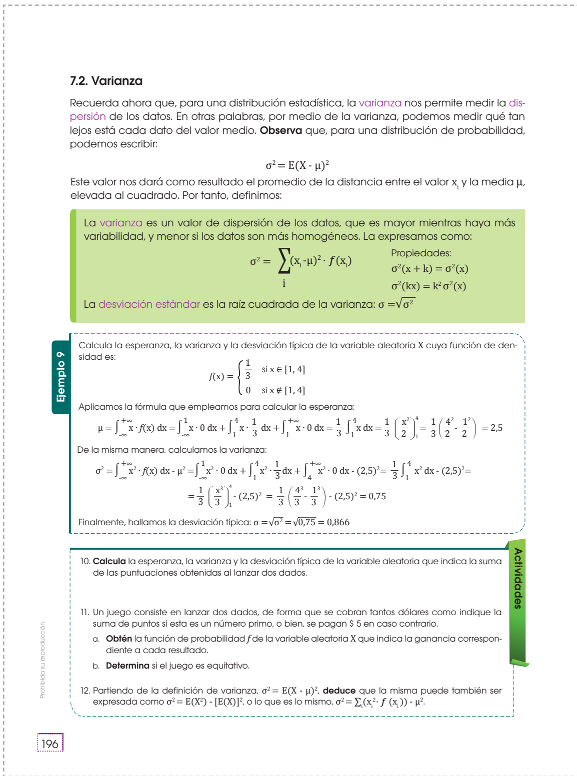
Prohibida su reproducción

Solucionario

0,683

Prohibida su reproducción

Página 196



7.2. Varianza

Recuerda ahora que, para una distribución estadística, la varianza nos permite medir la dispersión de los datos. En otras palabras, por medio de la varianza, podemos medir qué tan lejos está cada dato del valor medio. **Observa** que, para una distribución de probabilidad, podemos escribir:

$$\sigma^2 = E(X - \mu)^2$$

Este valor nos dará como resultado el promedio de la distancia entre el valor x_i y la media μ, elevada al cuadrado. Por tanto, definimos:

La varianza es un valor de dispersión de los datos, que es mayor mientras haya más variabilidad, y menor si los datos son más homogéneos. La expresamos como:

$$\sigma^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 \cdot f(x_i)$$

Propiedades:

$\sigma^2(x + k) = \sigma^2(x)$

$\sigma^2(kx) = k^2 \sigma^2(x)$

La desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

Ejemplo 9

Calcula la esperanza, la varianza y la desviación típica de la variable aleatoria X cuya función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } x \in [1, 4] \\ 0 & \text{si } x \notin [1, 4] \end{cases}$$

Aplicamos la fórmula que empleamos para calcular la esperanza:

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} x \cdot 0\,dx + \int_{1}^{4} x \cdot \frac{1}{3}\,dx + \int_{1}^{+\infty} x \cdot 0\,dx = \frac{1}{3}\int_{1}^{4} x\,dx = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2}\right)_1^4 = \frac{1}{3}\left(\frac{4^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) = 2{,}5$$

De la misma manera, calculamos la varianza:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx - \mu^2 = \int_{-\infty}^{1} x^2 \cdot 0\,dx + \int_{1}^{4} x^2 \cdot \frac{1}{3}dx + \int_{4}^{+\infty} x^2 \cdot 0\,dx - (2{,}5)^2 = \frac{1}{3}\int_{1}^{4} x^2\,dx - (2{,}5)^2 =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3}\right)_1^4 - (2{,}5)^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) - (2{,}5)^2 = 0{,}75$$

Finalmente, hallamos la desviación típica: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0{,}75} = 0{,}866$

Actividades

10. **Calcula** la esperanza, la varianza y la desviación típica de la variable aleatoria que indica la suma de las puntuaciones obtenidas al lanzar dos dados.

11. Un juego consiste en lanzar dos dados, de forma que se cobran tantos dólares como indique la suma de puntos si esta es un número primo, o bien, se pagan \$ 5 en caso contrario.
    a. **Obtén** la función de probabilidad f de la variable aleatoria X que indica la ganancia correspondiente a cada resultado.
    b. **Determina** si el juego es equitativo.

12. Partiendo de la definición de varianza, $\sigma^2 = E(X - \mu)^2$, **deduce** que la misma puede también ser expresada como $\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$, o lo que es lo mismo, $\sigma^2 = \sum_i (x_i^2 \cdot f(x_i)) - \mu^2$.

Prohibida su reproducción

Solucionario

10. Calcula la esperanza, la varianza y la desviación típica de la variable aleatoria que indica la suma de las puntuaciones obtenidas al lanzar dos dados.

    $E(X)=7, \sigma^2=6.25, \sigma=2.5$

11. Un juego consiste en lanzar dos dados, de forma que se cobran tantos dólares como indique la suma de puntos si ésta es un número primo, o bien, se pagan 5\$ en caso contrario.

    a. Obtén la función de probabilidad f de la variable aleatoria X que indica la ganancia correspondiente a cada resultado.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{7}{12} & \text{si } x = -6 \\ \frac{1}{36} & \text{si } x = 2 \\ \frac{1}{18} & \text{si } x = 3 \\ \frac{1}{9} & \text{si } x = 5 \\ \frac{1}{6} & \text{si } x = 7 \\ \frac{1}{18} & \text{si } x = 11 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

    b. Determina si el juego es equitativo

    No

12. Demostración.

Prohibida su reproducción

Solucionario

13. Un examen tipo test consta de diez preguntas. Cada pregunta tiene cuatro posibles respuestas, de las que sólo una es correcta. Un alumno que no ha estudiado responde al azar a las preguntas del examen.

a. Comprueba que la variable aleatoria que cuenta el número de aciertos sigue una distribución binomial, X~B(n,p), y halla su función de probabilidad.

Demostrar

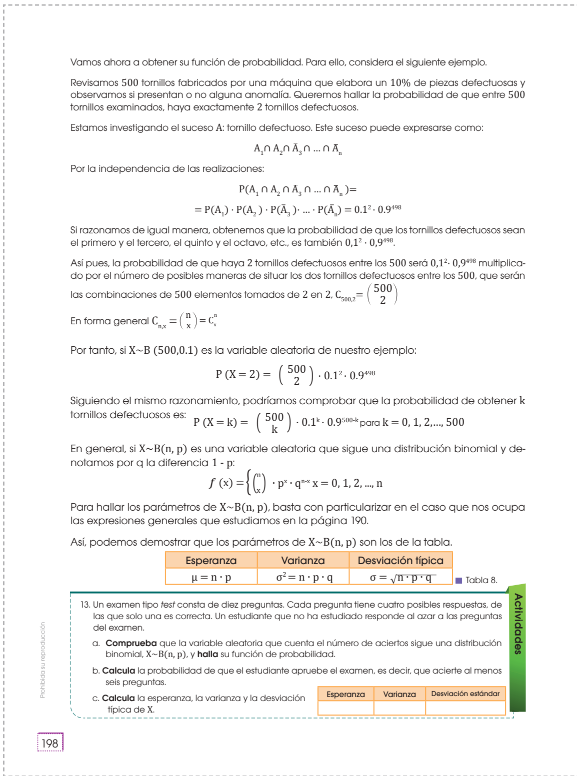
b. Calcula la probabilidad de que el alumno apruebe el examen, es decir, que acierte al menos seis preguntas.

0.0197

c. Calcula la esperanza, la varianza y la desviación típica de X.

2.5, 1.875, 1.369

Página 198



Vamos ahora a obtener su función de probabilidad. Para ello, considera el siguiente ejemplo.

Revisamos 500 tornillos fabricados por una máquina que elabora un 10% de piezas defectuosas y observamos si presentan o no alguna anomalía. Queremos hallar la probabilidad de que entre 500 tornillos examinados, haya exactamente 2 tornillos defectuosos.

Estamos investigando el suceso A: tornillo defectuoso. Este suceso puede expresarse como:

$$A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap \dots \cap \bar{A}_n$$

Por la independencia de las realizaciones:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap \dots \cap \bar{A}_n) =$$
$$= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\bar{A}_3) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n) = 0.1^2 \cdot 0.9^{498}$$

Si razonamos de igual manera, obtenemos que la probabilidad de que los tornillos defectuosos sean el primero y el tercero, el quinto y el octavo, etc., es también $0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{498}$.

Así pues, la probabilidad de que haya 2 tornillos defectuosos entre los 500 será $0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{498}$ multiplicado por el número de posibles maneras de situar los dos tornillos defectuosos entre los 500, que serán las combinaciones de 500 elementos tomados de 2 en 2, $C_{500,2} = \binom{500}{2}$

En forma general $C_{n,x} = \binom{n}{x} = C_x^n$

Por tanto, si $X \sim B(500{,}0.1)$ es la variable aleatoria de nuestro ejemplo:

$$P(X=2) = \binom{500}{2} \cdot 0.1^2 \cdot 0.9^{498}$$

Siguiendo el mismo razonamiento, podríamos comprobar que la probabilidad de obtener k tornillos defectuosos es: $P(X=k) = \binom{500}{k} \cdot 0.1^k \cdot 0.9^{500-k}$ para $k = 0, 1, 2, \dots, 500$

En general, si $X \sim B(n, p)$ es una variable aleatoria que sigue una distribución binomial y denotamos por q la diferencia $1 - p$:

$$f(x) = \left\{ \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} \quad x = 0, 1, 2, \dots, n \right.$$

Para hallar los parámetros de $X \sim B(n, p)$, basta con particularizar en el caso que nos ocupa las expresiones generales que estudiamos en la página 190.

Así, podemos demostrar que los parámetros de $X \sim B(n, p)$ son los de la tabla.

Esperanza	Varianza	Desviación típica
$\mu = n \cdot p$	$\sigma^2 = n \cdot p \cdot q$	$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

Tabla 8.

Actividades

13. Un examen tipo *test* consta de diez preguntas. Cada pregunta tiene cuatro posibles respuestas, de las que solo una es correcta. Un estudiante que no ha estudiado responde al azar a las preguntas del examen.

a. **Comprueba** que la variable aleatoria que cuenta el número de aciertos sigue una distribución binomial, $X \sim B(n, p)$, y **halla** su función de probabilidad.

b. **Calcula** la probabilidad de que el estudiante apruebe el examen, es decir, que acierte al menos seis preguntas.

c. **Calcula** la esperanza, la varianza y la desviación típica de X.

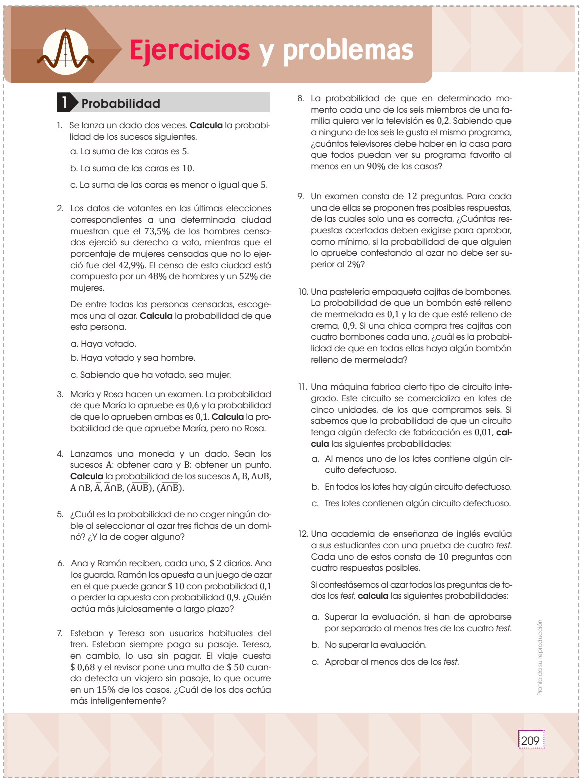
Esperanza	Varianza	Desviación estándar

Prohibida su reproducción

198

Prohibida su reproducción

Página 209



Ejercicios y problemas

1 Probabilidad

1. Se lanza un dado dos veces. **Calcula** la probabilidad de los sucesos siguientes.
   a. La suma de las caras es 5.
   b. La suma de las caras es 10.
   c. La suma de las caras es menor o igual que 5.
2. Los datos de votantes en las últimas elecciones correspondientes a una determinada ciudad muestran que el 73,5% de los hombres censados ejerció su derecho a voto, mientras que el porcentaje de mujeres censadas que no lo ejerció fue del 42,9%. El censo de esta ciudad está compuesto por un 48% de hombres y un 52% de mujeres.

   De entre todas las personas censadas, escogemos una al azar. **Calcula** la probabilidad de que esta persona.
   a. Haya votado.
   b. Haya votado y sea hombre.
   c. Sabiendo que ha votado, sea mujer.
3. María y Rosa hacen un examen. La probabilidad de que María lo apruebe es 0,6 y la probabilidad de que lo aprueben ambas es 0,1. **Calcula** la probabilidad de que apruebe María, pero no Rosa.
4. Lanzamos una moneda y un dado. Sean los sucesos A: obtener cara y B: obtener un punto. **Calcula** la probabilidad de los sucesos A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}$, $\overline{A} \cap B$, $(\overline{A \cup B})$, $(\overline{A \cap B})$.
5. ¿Cuál es la probabilidad de no coger ningún doble al seleccionar al azar tres fichas de un dominó? ¿Y la de coger alguno?
6. Ana y Ramón reciben, cada uno, \$ 2 diarios. Ana los guarda. Ramón los apuesta a un juego de azar en el que puede ganar \$ 10 con probabilidad 0,1 o perder la apuesta con probabilidad 0,9. ¿Quién actúa más juiciosamente a largo plazo?
7. Esteban y Teresa son usuarios habituales del tren. Esteban siempre paga su pasaje. Teresa, en cambio, lo usa sin pagar. El viaje cuesta \$ 0,68 y el revisor pone una multa de \$ 50 cuando detecta un viajero sin pasaje, lo que ocurre en un 15% de los casos. ¿Cuál de los dos actúa más inteligentemente?
8. La probabilidad de que en determinado momento cada uno de los seis miembros de una familia quiera ver la televisión es 0,2. Sabiendo que a ninguno de los seis le gusta el mismo programa, ¿cuántos televisores debe haber en la casa para que todos puedan ver su programa favorito al menos en un 90% de los casos?
9. Un examen consta de 12 preguntas. Para cada una de ellas se proponen tres posibles respuestas, de las cuales solo una es correcta. ¿Cuántas respuestas acertadas deben exigirse para aprobar, como mínimo, si la probabilidad de que alguien lo apruebe contestando al azar no debe ser superior al 2%?
10. Una pastelería empaqueta cajitas de bombones. La probabilidad de que un bombón esté relleno de mermelada es 0,1 y la de que esté relleno de crema, 0,9. Si una chica compra tres cajitas con cuatro bombones cada una, ¿cuál es la probabilidad de que en todas ellas haya algún bombón relleno de mermelada?
11. Una máquina fabrica cierto tipo de circuito integrado. Este circuito se comercializa en lotes de cinco unidades, de los que compramos seis. Si sabemos que la probabilidad de que un circuito tenga algún defecto de fabricación es 0,01, **calcula** las siguientes probabilidades:
    a. Al menos uno de los lotes contiene algún circuito defectuoso.
    b. En todos los lotes hay algún circuito defectuoso.
    c. Tres lotes contienen algún circuito defectuoso.
12. Una academia de enseñanza de inglés evalúa a sus estudiantes con una prueba de cuatro *test*. Cada uno de estos consta de 10 preguntas con cuatro respuestas posibles.

    Si contestásemos al azar todas las preguntas de todos los *test*, **calcula** las siguientes probabilidades:
    a. Superar la evaluación, si han de aprobarse por separado al menos tres de los cuatro *test*.
    b. No superar la evaluación.
    c. Aprobar al menos dos de los *test*.

Prohibida su reproducción

Solucionario

1. a. $\frac{1}{9}$ b. $\frac{1}{12}$ c. $\frac{1}{18}$
2. a. 0.6497,
   b. 0.3528,
   c. 0.4570
3. 0.5
4. $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{7}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{2}, \frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{11}{12}$
5. 0.406, 0.594
6. Ana
7. Esteban
8. 2
9. 8
10. 0.0429
11. a. 0.2649,
    b. ≈0,
    c. 0.0021
12. a. 0.0018,
    b. 0.9982,
    c. 0.0329

Prohibida su reproducción

Solucionario

13. Sin respuesta
14. $k = \frac{5}{12}$
15. Sin respuesta
16. 12
17. Sin respuesta
18. a. No

    b. 0.12$
19. a. 0.5$

    b. 1$
20. 0.46$
21. 2
22. 800
23. Cuatro mesas
24. a. 0.6634

    b. 0.3366

    b. 0.0573

Página 210

13. **Describe** una variable aleatoria adecuada a cada una de las siguientes situaciones e **indica** en cada caso si es discreta o continua.
    a. De una urna en la que hay tres bolas numeradas del 1 al 3 sacamos, sucesivamente y sin reemplazamiento, dos de ellas. Si el primer número es mayor que el segundo, cobramos $ 0.1. En caso contrario, pagamos $ 0,02.
    b. Un alumno responde al azar a las sucesivas preguntas que le hace su profesor hasta que acierta. Si acierta la primera, obtiene una nota de 10; si falla la primera y acierta la segunda, obtiene una nota de $\frac{10}{2}$; si falla la segunda y acierta la tercera, obtiene una nota de $\frac{10}{3}$; etc.
    c. Seleccionamos al azar un número k cualquiera del intervalo $[0,1]$ y calculamos el área del cuadrado de lado k.
14. **Considera** una variable aleatoria X cuya función de probabilidad es:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{k}{x^2+1} & x=-2,-1,0,1,2 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Halla el valor de k.

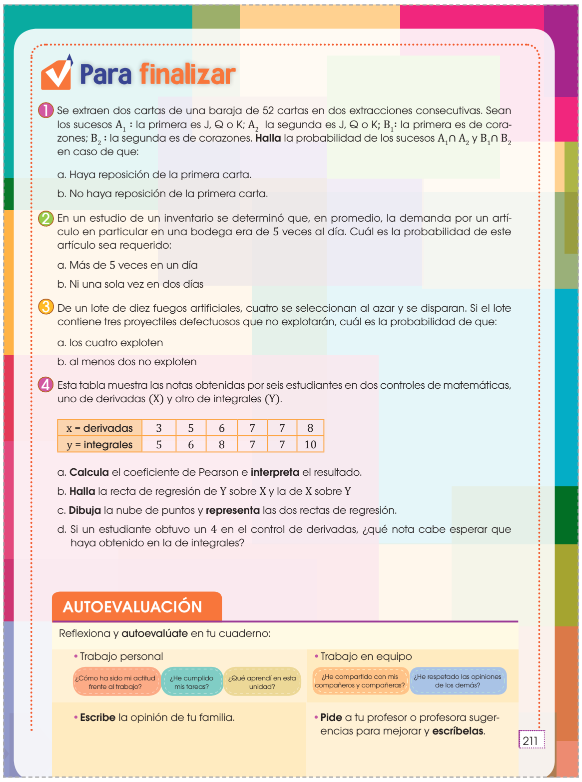
15. **Halla** la función de probabilidad de una variable aleatoria X sabiendo que solo toma los valores $1, 2$ y 3, que su esperanza matemática es $2,1$ y que su desviación típica es $0,7$.
16. **Responde**: ¿Cuánto vale la varianza de una variable aleatoria $X \sim B(50, p)$ si su esperanza es $\mu = 20$?
17. ¿Cuál es la función de probabilidad de una variable aleatoria $X \sim B(n, p)$ cuya esperanza es $1,5$ y cuya varianza es $1,05$?
18. Se sortean, entre 500 boletos, un premio de $ 100 y nueve premios de $ 10. Si cada boleto se vende al precio de $ $0,5$.
    a. ¿Es rentable para el jugador participar?
    b. ¿Qué beneficio le queda al organizador, por término medio, en cada boleto?
19. Un jugador extrae al azar una carta de una baraja, de tal manera que gana $ 10 si saca un As, $ 1 si saca una J, Q o K y no gana nada si saca cualquier otra carta.
    a. El organizador del juego cobra $ 1,5 por cada extracción. ¿Qué beneficio obtendrá, en promedio, en cada una de ellas?
    b. ¿Cuánto debe cobrar por extracción el organizador si el juego debe ser equitativo?
20. Tras apostar cierta cantidad, se lanzan a la vez una moneda y un dado. Si en la moneda sale cara, el jugador cobra $ 1 cuando la puntuación del dado es par, y $ $0,5$ cuando es impar. Si sale cruz, el jugador recupera la apuesta si la puntuación del dado es un 6, pero pierde lo apostado si es cualquier otra. ¿Cuánto debe cobrar el organizador del juego por apuesta si quiere obtener un beneficio medio de $ $0,05$ por lanzamiento?
21. Un juego consiste en lanzar cuatro monedas y apostar por el número de caras que van a salir. ¿Por qué número deberías apostar?
22. La probabilidad de obtener 1 al lanzar un dado trucado es $0,4$. ¿Cuál es el número de veces que cabe esperar obtener esa puntuación si lo lanzamos 2000 veces?
23. En un centro escolar trabajan siete profesores. Estos preparan sus clases en el mismo centro con probabilidad $0,3$ y en su casa, con probabilidad $0,7$. ¿Cuántas mesas de trabajo debe haber, como mínimo, para que todos los profesores que decidan preparar sus clases en el centro puedan hacerlo en, al menos, un 90% de los casos?
24. Una máquina produce piezas defectuosas en un 5% de los casos. Si se toman ocho piezas al azar, **calcula** la probabilidad de que:
    a. No haya ninguna defectuosa.
    b. Haya alguna defectuosa.
    c. Haya más de una defectuosa.
25. Una máquina fabrica envases plásticos para medicamentos mediante inyección de aire. Se ha estudiado que la probabilidad de que un envase presente algún defecto es $0,05$. Si los envases se comercializan en cajas de cinco, **calcula** la probabilidad de que al comprar seis cajas, exactamente dos de ellas contengan algún envase defectuoso.

Prohibida su reproducción

210

Prohibida su reproducción

Página 211



Para finalizar

1. Se extraen dos cartas de una baraja de 52 cartas en dos extracciones consecutivas. Sean los sucesos A_1 : la primera es J, Q o K; A_2 la segunda es J, Q o K; B_1: la primera es de corazones; B_2 : la segunda es de corazones. **Halla** la probabilidad de los sucesos $A_1 \cap A_2$ y $B_1 \cap B_2$ en caso de que:

   a. Haya reposición de la primera carta.

   b. No haya reposición de la primera carta.

2. En un estudio de un inventario se determinó que, en promedio, la demanda por un artículo en particular en una bodega era de 5 veces al día. Cuál es la probabilidad de este artículo sea requerido:

   a. Más de 5 veces en un día

   b. Ni una sola vez en dos días

3. De un lote de diez fuegos artificiales, cuatro se seleccionan al azar y se disparan. Si el lote contiene tres proyectiles defectuosos que no explotarán, cuál es la probabilidad de que:

   a. los cuatro exploten

   b. al menos dos no exploten

4. Esta tabla muestra las notas obtenidas por seis estudiantes en dos controles de matemáticas, uno de derivadas (X) y otro de integrales (Y).

x = derivadas	3	5	6	7	7	8
y = integrales	5	6	8	7	7	10

   a. **Calcula** el coeficiente de Pearson e **interpreta** el resultado.

   b. **Halla** la recta de regresión de Y sobre X y la de X sobre Y

   c. **Dibuja** la nube de puntos y **representa** las dos rectas de regresión.

   d. Si un estudiante obtuvo un 4 en el control de derivadas, ¿qué nota cabe esperar que haya obtenido en la de integrales?

AUTOEVALUACIÓN

Reflexiona y **autoevalúate** en tu cuaderno:

- Trabajo personal: ¿Cómo ha sido mi actitud frente al trabajo? ¿He cumplido mis tareas? ¿Qué aprendí en esta unidad?
- Trabajo en equipo: ¿He compartido con mis compañeros y compañeras? ¿He respetado las opiniones de los demás?
- **Escribe** la opinión de tu familia.
- **Pide** a tu profesor o profesora sugerencias para mejorar y **escríbelas**.

211

Solucionario

1. a. $\dfrac{9}{169}, \dfrac{1}{16}$

   b. $\dfrac{11}{221}, \dfrac{3}{52}$

2. a. 0.47

   b. 0.00005

3. a. $\dfrac{1}{6}$

   b. $\dfrac{3}{10}$

4. a. 0.8438

   b.

   c.

   d.

Prohibida su reproducción

FÍJATE

Todo razonamiento o inferencia consta de:

— **Premisas:** conjunto de enunciados que expresan los datos de partida.

— **Conclusión:** enunciado final que expresa la nueva información obtenida a partir de las premisas.

Si bien es cierto que para solucionar los problemas matemáticos hemos de razonar, ¿es tan importante el razonamiento en las matemáticas en general? Para responder a esta cuestión podemos partir de la definición de matemática que hallamos en el diccionario:

*La **matemática** es la parte de la ciencia que, a partir de determinadas nociones básicas, desarrolla sus teorías sin más apoyo que el **razonamiento lógico.***

Así pues, el razonamiento es básico en la matemática. La disciplina que estudia su validez en general recibe el nombre de **lógica.** Para empezar el análisis de los razonamientos hemos de diferenciar los dos tipos que existen: *deductivos* e *inductivos.*

— La **deducción** consiste en pasar de premisas generales a una conclusión menos general. Cuando este tipo de inferencia es correcta, la conclusión se sigue necesariamente de las premisas: es imposible que siendo éstas verdaderas, la conclusión sea falsa.

Observa, por ejemplo, el siguiente razonamiento deductivo:

Todos los números naturales son enteros. El 2,5 no es un número entero. Por tanto, el 2,5 no es un número natural.

— La **inducción** consiste en llegar a una conclusión general a partir de informaciones menos generales que vienen dadas en las premisas.

Excepto en el caso de la inducción completa descrito en el margen, sólo puede hablarse de cierta *probabilidad,* pues, aunque las premisas sean verdaderas, esto no asegura que la conclusión también lo sea.

Por ejemplo, si tenemos las siguientes premisas:

- El número 121 es divisible entre 11.
- El número 363 es divisible entre 11.
- El número 1 331 es divisible entre 11.

Podemos llegar a la conclusión de que:

Los números capicúas son divisibles entre 11.

Sin embargo, hemos de estar dispuestos a revisar la veracidad de esta conclusión.

Las premisas y la conclusión son enunciados que afirman algo o lo niegan y por tanto pueden ser verdaderas o falsas. En cambio, los razonamientos no pueden ser verdaderos ni falsos, pues no afirman ni niegan nada. Así, no hablaremos de razonamientos verdaderos, sino de **razonamientos correctos** o válidos.

La parte de la lógica que se ocupa únicamente de la validez de los razonamientos sin tener en cuenta el contenido de los enunciados es la *lógica formal.* Dentro de ésta, la *lógica proposicional* o *de enunciados* toma los enunciados en bloque, sin analizarlos.

Inducción completa

Si deseamos demostrar que la suma de los n primeros números naturales es:

$$1 + 2 + 3 ... + n = n \cdot \frac{n+1}{2}$$

utilizaremos un método de razonamiento inductivo, el *principio de inducción completa,* enunciado por el matemático italiano G. Peano en 1900. El mencionado principio dice:

«Para toda propiedad $P(n)$ de los números naturales que dependa de n y que verifique los requisitos siguientes:

- $P(n)$ se cumple para $n = 1$, es decir, se cumple $P(1)$.
- Si suponemos que se cumple $P(n-1)$, se cumple $P(n)$.

podemos asegurar que $P(n)$ se cumple para todos los números naturales.»

Así, la igualdad se cumple para $n = 1$:

$$P(1) = 1 \cdot \frac{1+1}{2} = 1$$

Y si suponemos que se cumple $P(n-1)$, veamos qué sucede para $P(n)$. Tendremos:

$$1 + ... + n - 1 + n = P(n-1) + n = \frac{(n-1) \cdot n}{2} + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Así pues, podemos garantizar que la expresión es correcta.

Prohibida su reproducción

Lógica proposicional

La frase *Carmen es europea* contiene una información concreta que, obviamente, puede ser verdadera o falsa. La lógica de enunciados no tiene interés en este aspecto, es decir, no analiza si Carmen es o no europea, sino que le basta considerar que la proposición puede ser verdadera o falsa.

Esto es debido a que su objetivo no es determinar la veracidad de los enunciados sino analizar las relaciones entre ellos, es decir, las conexiones que nos permiten obtener una conclusión válida a partir de unos enunciados que actúan como premisas.

En resumidas cuentas, la lógica proposicional no analiza cómo está constituida una proposición, sino que le basta considerarla como un todo. Para ello la representa mediante un único símbolo, una letra latina minúscula *(p, q, r…).* A partir de esto, es posible realizar un estudio de proposiciones compuestas, o complejas, a partir de otras más simples.

En el lenguaje de la lógica todos los símbolos y reglas están perfectamente definidos. Por tanto, se evitan los equívocos y ambigüedades propios del lenguaje natural. Esta propiedad del lenguaje lógico que lo distingue del lenguaje natural se denomina **precisión.**

Principios de la lógica

Hay unas cuantas formas de razonamiento que se consideran siempre correctas porque se presuponen en todo razonamiento; es decir, parece imposible que podamos razonar o incluso pensar incumpliéndolas. Son:

— Principio de **identidad.** Toda cosa es idéntica a sí misma. *A* es *A.*

— Principio de **no contradicción.** Ninguna cosa puede ser y no ser algo al mismo tiempo y en el mismo sentido. Nada puede ser *A* y no *A.*

— Principio del **tercero excluido.** Todo enunciado es verdadero o falso. Todo es *A* o no *A.*

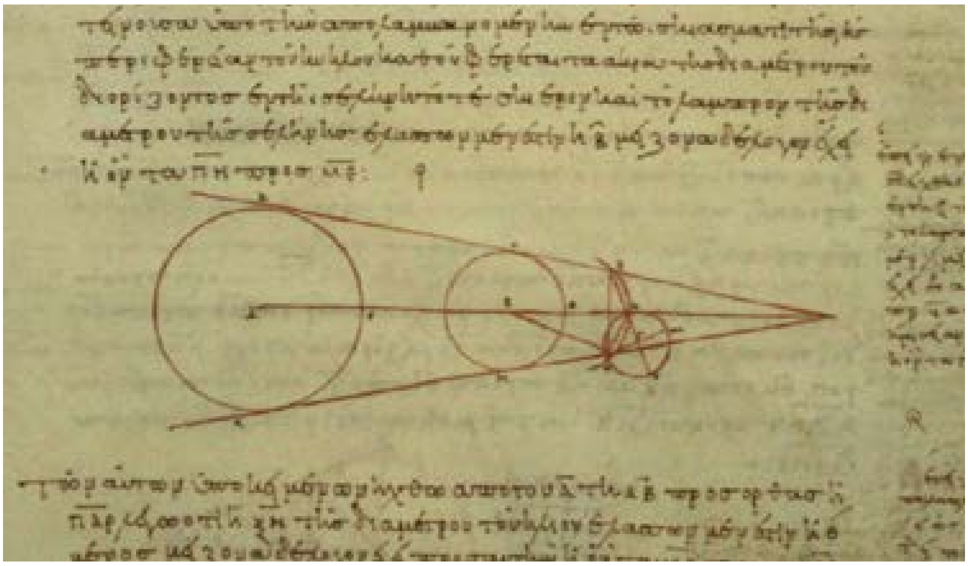
Símbolos de la lógica proposicional

El lenguaje específico de la lógica proposicional contiene un vocabulario en el que es posible distinguir dos tipos de símbolos:

Símbolos no lógicos	
Variables	**Símbolos auxiliares**
Son letras latinas minúsculas *(p, q, r, s, t…)* que representan las proposiciones. Por ejemplo: «si <u>vienes ahora</u>, entonces <u>te espero</u>» equivale a «si *p,* entonces *q*». Tienen dos **valores de verdad:** verdadero o falso, indicados con V/F o con 1/0.	Son los paréntesis y corchetes que se usan para facilitar la comprensión y lectura de algunos enunciados complejos. Por ejemplo, en «<u>si</u> [(cantas y bebes) o (bailas y comes)], <u>entonces</u> no puedes hacer ninguna de las cosas bien», el relacionante dominante sería *si…, entonces,* porque está fuera de los corchetes; después, la *o* porque está fuera de los paréntesis; y, por último, la *y.*

Símbolos lógicos	
Asociados a las funciones lógicas fundamentales, permiten formar proposiciones complejas a partir de simples.	
Negador (¬)	**Conectivas**
Sirve para negar cualquier enunciado. Se corresponde con el *no* del lenguaje natural. Se designa por ¬. Si «es verde» equivale a *p,* «<u>no</u> es verde» equivaldría a ¬ *p.*	Equivalen a los relacionantes del lenguaje natural. Existen cuatro diferentes: • Conjunción (⋀). Equivale a la conjunción *y.* • Disyunción (⋁). Equivale a la conjunción disyuntiva *o* (pero en sentido no excluyente; es decir, que pueden suceder ambas cosas a la vez). • Condicional (→). Equivale al relacionante condicional *si…, entonces.* • Bicondicional (↔). Equivale a un *si y solamente si* del lenguaje natural.

Prohibida su reproducción



http://goo.gl/Km5MFU

Aristarco nació en Samos - Grecia - en el año 310 a.C. y murió en el 230 a.C. Fue discípulo de Estratón de Lampsacos jefe de la escuela peripatética fundada por Aristóteles. Años después Aristarco sucedería a Teofrasto como jefe de esta institución entre años 288 y 287 a.C.

Fue un hábil geómetra pero es poco lo que se conoce de su vida. Sus hipótesis sobre el universo se han extraído a partir de las referencias hechas por otros autores después de su muerte. Ptolomeo en el Almagesto lo nombra como un concienzudo observador de los solsticios y equinoccios. Parece haber interpretado estas observaciones correctamente, atribuyendo estos fenómenos al movimiento de la Tierra alrededor del Sol. Dedujo por esto que era necesario que la órbita terrestre estuviera inclinada para explicar los cambios de estación.

Aristarco consideraba al Sol como una estrella y probablemente que las estrellas eran soles. De lo que se conoce de los pensamientos de sus sobre el cosmos se puede resumir que fue uno de los primeros en promulgar la teoría Heliocéntrica.

Comenzó a medir la distancia y comparar los tamaños relativos en la cosmología utilizando la trigonometría. Explicó los movimientos de rotación y traslación terrestres. Dedujo que la orbita de la tierra se encuentra inclinada. Amplio el tamaño del universo conocido - aunque con un gran margen de error ya que calculó que el Sol era 19 veces mas grande que la Luna y se encontraba 19 veces mas lejos, actualmente se sabe que es 400 veces mas grande y esta 400 veces mas lejos.

Aristarco pudo asumir que el Sol era una estrella más de las que se observan en el cielo. Desafortunadamente solo una de las obras de Aristarco nos ha llegado a los tiempos modernos, "Sobre las magnitudes y las distancias del Sol y de la Luna", y aunque la mayoría de sus ideas se conocen a través de terceros ,se puede decir que fue uno de los que se ha presentado más avanzado a su época

http://goo.gl/WCpxZB

Prohibida su reproducción

Solucionario

1. a. < -7, 8, 22 >

   b. < 16, -8, 10 >

   c. < -22, 0, -11 >

   d. < -21, -130, 22 >

2. Paralelas cuando m=2, se cortan en otro caso

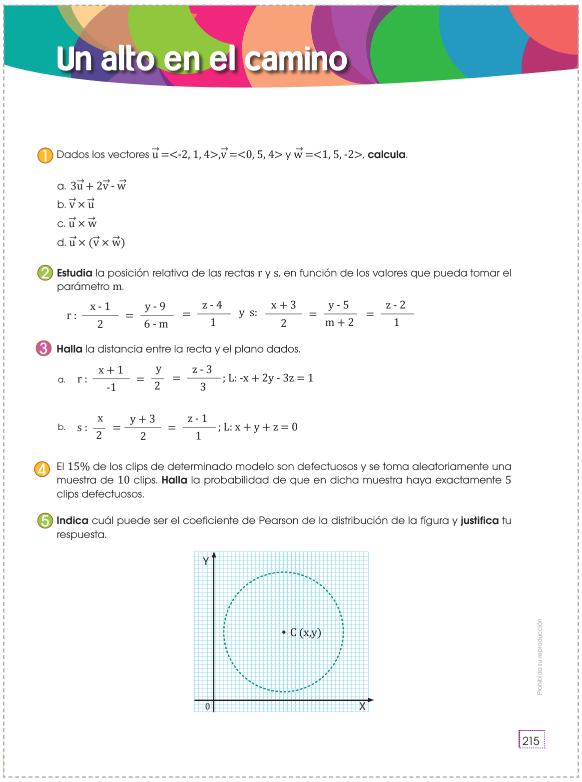
3. a. 0

   b. 0

4. 0,0085

5. Sin respuesta

Página 212



Un alto en el camino

1. Dados los vectores $\vec{u} = <-2, 1, 4>$, $\vec{v} = <0, 5, 4>$ y $\vec{w} = <1, 5, -2>$, **calcula**.

   a. $3\vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w}$

   b. $\vec{v} \times \vec{u}$

   c. $\vec{u} \times \vec{w}$

   d. $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$

2. **Estudia** la posición relativa de las rectas r y s, en función de los valores que pueda tomar el parámetro m.

   $$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-9}{6-m} = \frac{z-4}{1} \quad y \quad s: \frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{m+2} = \frac{z-2}{1}$$

3. **Halla** la distancia entre la recta y el plano dados.

   a. $r: \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{3}$; L: $-x + 2y - 3z = 1$

   b. $s: \frac{x}{2} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1}$; L: $x + y + z = 0$

4. El 15% de los clips de determinado modelo son defectuosos y se toma aleatoriamente una muestra de 10 clips. **Halla** la probabilidad de que en dicha muestra haya exactamente 5 clips defectuosos.

5. **Indica** cuál puede ser el coeficiente de Pearson de la distribución de la figura y **justifica** tu respuesta.

Y

• C (x,y)

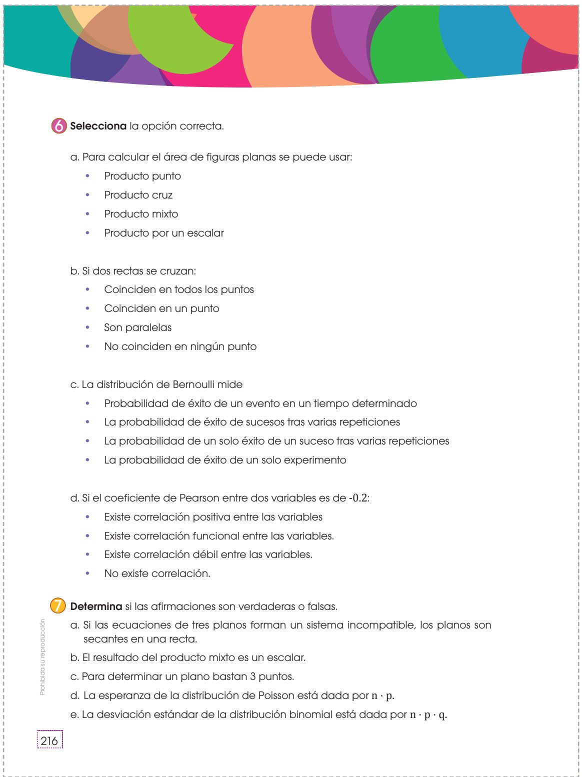
0

X

Prohibida su reproducción

Prohibida su reproducción

Página 213


6 **Selecciona** la opción correcta.

a. Para calcular el área de figuras planas se puede usar:
- Producto punto
- Producto cruz
- Producto mixto
- Producto por un escalar

b. Si dos rectas se cruzan:
- Coinciden en todos los puntos
- Coinciden en un punto
- Son paralelas
- No coinciden en ningún punto

c. La distribución de Bernoulli mide
- Probabilidad de éxito de un evento en un tiempo determinado
- La probabilidad de éxito de sucesos tras varias repeticiones
- La probabilidad de un solo éxito de un suceso tras varias repeticiones
- La probabilidad de éxito de un solo experimento

d. Si el coeficiente de Pearson entre dos variables es de -0.2:
- Existe correlación positiva entre las variables
- Existe correlación funcional entre las variables.
- Existe correlación débil entre las variables.
- No existe correlación.

7 **Determina** si las afirmaciones son verdaderas o falsas.

a. Si las ecuaciones de tres planos forman un sistema incompatible, los planos son secantes en una recta.

b. El resultado del producto mixto es un escalar.

c. Para determinar un plano bastan 3 puntos.

d. La esperanza de la distribución de Poisson está dada por $n \cdot p$.

e. La desviación estándar de la distribución binomial está dada por $n \cdot p \cdot q$.

216

Solucionario

6. Selecciona la opción correcta

   a. Para calcular el área de figuras planas se puede usar:
   - Producto punto
   - Producto cruz
   - Producto mixto
   - Producto por un escalar

   b. Si dos rectas se cruzan:
   - Coinciden en todos los puntos
   - Coinciden en un punto
   - Son paralelas
   - No coinciden en ningún punto

   c. La distribución de Bernoulli mide
   - Probabilidad de éxito de un evento en un tiempo determinado
   - La probabilidad de éxito de sucesos tras varias repeticiones
   - La probabilidad de un solo éxito de un suceso tras varias repeticiones
   - La probabilidad de éxito de un solo experimento

   d. Si el coeficiente de Pearson entre dos variables es de -0.2:
   - Existe correlación positiva entre las variables
   - Existe correlación funcional entre las variables.
   - Existe correlación débil entre las variables.
   - No existe correlación.

7. a. F

   b. V

   c. V

   d. F

   e. V

Prohibida su reproducción